УДК 519.832.4

В. В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

ВІСІМ БАЗИСНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ СЕМИ ВИДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕПЕРЕРВНОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ СТРОГО ВИПУКЛО-ВГНУТОЇ ГРИ

Розв'язано одну неперервну антагоністичну строго випукло-вгнуту гру, що має сім видів розв'язку при зазначених коефіцієнтах ядра, яке задається на одиничному квадраті. Показано, як отримані сім видів розв'язку гри визначаються вісьмома базисними співвідношеннями між коефіцієнтами ядра цієї гри.

There has been solved a continuous antagonistic strictly convex-concave game, that has the seven types of the solution by the indicated coefficients of the kernel, which is defined on the unit square. It has been attested, how the obtained seven types of the game solution are determined by the eight basis relationships between the kernel coefficients of this game.

Формулювання завдання дослідження

Ігрове моделювання та, зокрема, моделювання конфліктно-керованих техніко-економічних систем є сучасним напрямком прикладних математичних досліджень. У цій математичній галузі існує актуальна проблема знаходження усіх розв'язків $\mathscr{S}$ випукло-вгнутих неперервних антагоністичних ігор [1], у яких ядро $H(x, y)$ у загальному виді задається на одиничному квадраті $D_H = X \times Y = [0; 1] \times [0; 1]$, де $x \in X = [0; 1]$ та $y \in Y = [0; 1]$ є чистими стратегіями першого та другого гравців відповідно. У даній роботі значення гри позначатимемо V_{opt}, множини оптимальних стратегій першого та другого гравців позначатимемо $\mathscr{X}_{\text{opt}}$ та $\mathscr{Y}_{\text{opt}}$ відповідно. Визначимо $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$ для неперервної антагоністичної строго випукло-вгнутої гри з ядром

$$H(x, y) = ax^2 + bx + gxy + hy^2 + k \, , \tag{1}$$

яке задається на одиничному квадраті D_H, де $k \in \mathbb{R}$, і коефіцієнти $b > 0$ та $g < 0$. Оскільки гра є строго випуклою, то $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} > 0$, звідки $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$, тобто коефіцієнт $h > 0$. До того ж, для строго вгнутої гри $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} < 0$, звідки $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial x^2} = 2a < 0$, тобто коефіцієнт $a < 0$. У роботі [2] така гра була розв'язана при $a < 0$ та ненульових коефіцієнтах b та g, проте саме випадок $b > 0$ та $g < 0$ не був розглянутий через його об'ємність.

Повні розв'язки заданої строго випукло-вгнутої неперервної антагоністичної гри

Максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x залежить від того, чи максимум ядра (1) по змінній x належить сегменту X. Перша похідна ядра (1) по змінній x

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + bx + gxy + hy^2 + k\right) = 2ax + b + gy \tag{2}$$

перетворюється у нуль у точці $x_{\max} = -\frac{b + gy}{2a}$. Точка $x_{\max} = -\frac{b + gy}{2a} \geqslant 0$ при $b + gy \geqslant 0$, тобто коли $y \leqslant -\frac{b}{g}$; і точка $x_{\max} = -\frac{b + gy}{2a} \leqslant 1$ при $2a + b + gy \leqslant 0$, тобто коли $y \geqslant -\frac{2a + b}{g}$. Таким чином, $x_{\max} = -\frac{b + gy}{2a} \in [0; 1]$ при $y \in \left[-\frac{2a + b}{g}; -\frac{b}{g}\right]$. Далі матимемо на увазі, що $a + b + gy > 0$ при $y < -\frac{a + b}{g}$, причому

$-\dfrac{a+b}{g}-\left(-\dfrac{2a+b}{g}\right)=\dfrac{a}{g}>0$, $-\dfrac{a+b}{g}-\left(-\dfrac{b}{g}\right)=-\dfrac{a}{g}<0$, тобто $-\dfrac{2a+b}{g}<-\dfrac{a+b}{g}<-\dfrac{b}{g}$. Зауважимо також, що

$$H\left(x_{\max},\ y\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right)=a\left(-\frac{b+gy}{2a}\right)^2+b\left(-\frac{b+gy}{2a}\right)+g\left(-\frac{b+gy}{2a}\right)y+hy^2+k=hy^2-\frac{\left(b+gy\right)^2}{4a}+k\,. \quad (3)$$

1.1. $b+g\leqslant 0$; $2a+b\geqslant 0$. Тут маємо значення $-\dfrac{b}{g}\in\left(0;\,1\right]$ та $-\dfrac{2a+b}{g}\in\left[0;\,-\dfrac{b}{g}\right)$, тобто при $y\in\left[-\dfrac{2a+b}{g};\,-\dfrac{b}{g}\right]\subseteq\left[0;\,1\right]$ точка $x_{\max}=-\dfrac{b+gy}{2a}\in\left[0;\,1\right]$. Тоді максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є функція

$$\max_{x\in X}H\left(x,\ y\right)=\begin{cases}\max\left\{H\left(0,\ y\right),\ H\left(1,\ y\right)\right\}=H\left(1,\ y\right)=a+b+gy+hy^2+k,\ y\in\left[0;\,-\dfrac{2a+b}{g}\right],\\ H\left(x_{\max},\ y\right)=H\left(-\dfrac{b+gy}{2a},\ y\right)=hy^2-\dfrac{\left(b+gy\right)^2}{4a}+k,\ y\in\left[-\dfrac{2a+b}{g};\,-\dfrac{b}{g}\right],\\ \max\left\{H\left(0,\ y\right),\ H\left(1,\ y\right)\right\}=H\left(0,\ y\right)=hy^2+k,\ y\in\left[-\dfrac{b}{g};\,1\right].\end{cases} \quad (4)$$

Відмітимо, що окрім рівності $H\left(x_{\max},\,-\dfrac{2a+b}{g}\right)=H\left(1,\,-\dfrac{2a+b}{g}\right)$, ще має місце рівність у явній нерівності

$$H\left(x_{\max},\,-\frac{b}{g}\right)=H\left(0,\,-\frac{b}{g}\right)<H\left(0,\,1\right). \quad (5)$$

Для визначення мінімуму функції (4) на сегменті Y необхідно спочатку знайти точку мінімуму $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ параболи $H\left(1,\ y\right)$ і з'ясувати, чи $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\in\left[0;\,-\dfrac{2a+b}{g}\right]$. Далі необхідно знайти точку мінімуму $y_{\min}$ параболи $H\left(x_{\max},\ y\right)=H\left(-\dfrac{b+gy}{2a},\ y\right)$ і з'ясувати, чи $y_{\min}\in\left[-\dfrac{2a+b}{g};\,-\dfrac{b}{g}\right]$. Перша похідна параболи $H\left(1,\ y\right)$ по змінній y

$$\frac{d}{dy}H\left(1,\ y\right)=\frac{d}{dy}\left(a+b+gy+hy^2+k\right)=g+2hy \quad (6)$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}^{\langle 1\rangle}=-\dfrac{g}{2h}$. Так як $-\dfrac{g}{2h}>0$ та

$$-\frac{g}{2h}-\left(-\frac{2a+b}{g}\right)=-\frac{g}{2h}+\frac{2a+b}{g}=\frac{2h\left(2a+b\right)-g^2}{2hg}, \quad (7)$$

то $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\geqslant-\dfrac{2a+b}{g}$ при $2h\left(2a+b\right)-g^2\leqslant 0$, звідки випливає нерівність

$$H\left(1,\,0\right)>H\left(1,\,-\frac{2a+b}{g}\right)\geqslant H\left(1,\,y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right). \quad (8)$$

Перша похідна параболи $H\left(x_{\max},\, y\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right)$ по змінній y

$$\frac{d}{dy}H\left(x_{\max},\, y\right)=\frac{d}{dy}H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right)=\frac{d}{dy}\left(hy^2-\frac{\left(b+gy\right)^2}{4a}+k\right)=2hy-g\frac{b+gy}{2a}=\frac{4ah-g^2}{2a}y-\frac{bg}{2a} \qquad (9)$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}=\frac{bg}{4ah-g^2}$. Так як $\frac{bg}{4ah-g^2}>0$ та

$$\frac{bg}{4ah-g^2}-\left(-\frac{2a+b}{g}\right)=\frac{bg}{4ah-g^2}+\frac{2a+b}{g}=\frac{bg^2+8a^2h+4abh-2ag^2-bg^2}{\left(4ah-g^2\right)g}=\frac{2a\left[2h\left(2a+b\right)-g^2\right]}{\left(4ah-g^2\right)g}, \qquad (10)$$

$$\frac{bg}{4ah-g^2}-\left(-\frac{b}{g}\right)=\frac{bg}{4ah-g^2}+\frac{b}{g}=\frac{bg^2+4abh-bg^2}{\left(4ah-g^2\right)g}=\frac{4abh}{\left(4ah-g^2\right)g}<0, \qquad (11)$$

то $y_{\min}=\frac{bg}{4ah-g^2}\in\left[-\frac{2a+b}{g};\,-\frac{b}{g}\right)$ при $2h\left(2a+b\right)-g^2\leqslant 0$. Тоді виходить, що

$$H\left(1,\,-\frac{2a+b}{g}\right)=H\left(x_{\max},\,-\frac{2a+b}{g}\right)\geqslant H\left(x_{\max},\, y_{\min}\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,\frac{bg}{4ah-g^2}\right)=$$

$$=H\left(-\frac{b+\frac{bg^2}{4ah-g^2}}{2a},\,\frac{bg}{4ah-g^2}\right)=H\left(\frac{2bh}{g^2-4ah},\,\frac{bg}{4ah-g^2}\right)=h\frac{b^2g^2}{\left(4ah-g^2\right)^2}-\frac{\left(b+g\frac{bg}{4ah-g^2}\right)^2}{4a}+k=$$

$$=h\frac{b^2g^2}{\left(4ah-g^2\right)^2}-\frac{\left(4abh\right)^2}{4a\left(4ah-g^2\right)^2}+k=\frac{b^2g^2h-4ab^2h^2}{\left(4ah-g^2\right)^2}+k=$$

$$=\frac{b^2h\left(g^2-4ah\right)}{\left(4ah-g^2\right)^2}+k=\frac{b^2h\left(g^2-4ah\right)}{\left(g^2-4ah\right)^2}+k=\frac{hb^2}{g^2-4ah}+k, \qquad (12)$$

$$H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,\frac{bg}{4ah-g^2}\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right)=H\left(x_{\max},\, y_{\min}\right)<H\left(x_{\max},\,-\frac{b}{g}\right)=H\left(0,\,-\frac{b}{g}\right). \qquad (13)$$

1.1.1. $b+g\leqslant 0$; $2a+b\geqslant 0$; $2h\left(2a+b\right)-g^2\leqslant 0$. Мінімум функції (4) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H\left(x,\, y\right)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{2a+b}{g}\right]}H\left(1,\, y\right),\,\min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\,-\frac{b}{g}\right]}H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right),\,\min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\,1\right]}H\left(0,\, y\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{H\left(1,\,0\right),\,H\left(1,\,-\frac{2a+b}{g}\right)\right\},\,H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right),\,\min\left\{H\left(0,\,-\frac{b}{g}\right),\,H\left(0,\,1\right)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{H\left(1,\,-\frac{2a+b}{g}\right),\,H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right),\,H\left(0,\,-\frac{b}{g}\right)\right\}=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right)=H\left(x_{\max},\, y_{\min}\right)=$$

$$=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,\frac{bg}{4ah-g^2}\right)=\frac{hb^2}{g^2-4ah}+k=V_{\text{opt}} \qquad (14)$$

досягається у точці $y=y_{\text{opt}}=\frac{bg}{4ah-g^2}$, точніше кажучи, на множині оптимальних чистих стратегій другого гравця $Y_{\text{opt}} = \left\{ \frac{bg}{4ah - g^2} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}$, де $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}}$. Множину оптимальних чистих стратегій першого гравця X_{opt} спочатку спробуємо визначати за коренями x_1 та x_2 квадратного рівняння [1, с. 74]

$$V_{\text{opt}} = H\left(x,\ y_{\text{opt}}\right). \tag{15}$$

Для даного випадку маємо таке рівняння (15):

$$V_{\text{opt}} = H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ \frac{bg}{4ah-g^2}\right) = H\left(\frac{2bh}{g^2-4ah},\ \frac{bg}{4ah-g^2}\right) = \frac{hb^2}{g^2-4ah} + k = ax^2 + bx + gx\frac{bg}{4ah-g^2} +$$

$$+h\frac{b^2g^2}{\left(4ah-g^2\right)^2} + k = ax^2 + x\frac{4abh}{4ah-g^2} + \frac{hb^2g^2}{\left(4ah-g^2\right)^2} + k = H\left(x,\ \frac{bg}{4ah-g^2}\right) = H\left(x,\ y_{\text{opt}}\right); \tag{16}$$

$$ax^2 + x\frac{4abh}{4ah-g^2} + \frac{hb^2g^2}{\left(4ah-g^2\right)^2} - \frac{hb^2}{g^2-4ah} = a\left(x^2 - 2x\frac{2bh}{g^2-4ah} + \frac{4h^2b^2}{\left(g^2-4ah\right)^2}\right) = a\left(x - \frac{2bh}{g^2-4ah}\right)^2 = 0. \tag{17}$$

З (17) випливає, що коренями рівняння (16) є $x_1 = x_2 = \frac{2bh}{g^2-4ah}$, тобто $X_{\text{opt}} = \left\{x_1\right\} = \left\{x_2\right\} = \left\{\frac{2bh}{g^2-4ah}\right\}$. Тому $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{\frac{2bh}{g^2-4ah}\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{\frac{2bh}{g^2-4ah}\right\},\ \left\{\frac{bg}{4ah-g^2}\right\},\ \frac{hb^2}{g^2-4ah} + k\right\}. \tag{18}$$

1.1.2. $b+g \leqslant 0$; $2a+b \geqslant 0$; $2h(2a+b) - g^2 > 0$. Тут точка мінімуму $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < -\frac{2a+b}{g}$ та мінімум $y_{\min} = \frac{bg}{4ah-g^2} < -\frac{2a+b}{g}$, а це означає виконання нерівностей

$$H\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right) = a + b - \frac{g^2}{2h} + h\frac{g^2}{4h^2} + k = a + b - \frac{g^2}{4h} + k < H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right) = H\left(x_{\max},\ -\frac{2a+b}{g}\right), \tag{19}$$

$$H\left(x_{\max},\ y_{\min}\right) = H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y_{\min}\right) < H\left(x_{\max},\ -\frac{2a+b}{g}\right) < H\left(x_{\max},\ -\frac{b}{g}\right) = H\left(0,\ -\frac{b}{g}\right) < H\left(0,\ 1\right). \tag{20}$$

Звідси мінімум функції (4) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\ -\frac{2a+b}{g}\right]} H\left(1,\ y\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\ -\frac{b}{g}\right]} H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\ 1\right]} H\left(0,\ y\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right),\ \min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ -\frac{2a+b}{g}\right),\ H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ -\frac{b}{g}\right)\right\},\ \min\left\{H\left(0,\ -\frac{b}{g}\right),\ H\left(0,\ 1\right)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right),\ H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right),\ H\left(0,\ -\frac{b}{g}\right)\right\} = H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right) = a + b - \frac{g^2}{4h} + k = V_{\text{opt}} \tag{21}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Виписуємо відповідне рівняння (15):

$$V_{\text{opt}} = H\left(1, -\frac{g}{2h}\right) = a + b - \frac{g^2}{4h} + k = ax^2 + bx - x\frac{g^2}{2h} + h\frac{g^2}{4h^2} + k =$$
$$= ax^2 + x\left(b - \frac{g^2}{2h}\right) + \frac{g^2}{4h} + k = H\left(x, -\frac{g}{2h}\right) = H\left(x, y_{\text{opt}}\right); \tag{22}$$
$$ax^2 + x\left(b - \frac{g^2}{2h}\right) + \frac{g^2 - 2h(a+b)}{2h} = a\left(x^2 + x\frac{2bh - g^2}{2ah} + \frac{g^2 - 2h(a+b)}{2ah}\right) = a(x-1)\left(x - \frac{g^2 - 2h(a+b)}{2ah}\right) = 0. \tag{23}$$

Із (23) слідує, що коренями рівняння (22) є $x_1 = 1$ та $x_2 = \frac{g^2 - 2h(a+b)}{2ah}$. Але із $2h(2a+b) - g^2 > 0$ виходить, що $\frac{g^2 - 2h(a+b)}{2ah} > 1$, тому $x_2 \notin X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\{1\}, \left\{-\frac{g}{2h}\right\}, a + b - \frac{g^2}{4h} + k\right\}. \tag{24}$$

1.2. $b + g \leqslant 0$; $2a + b < 0$. Оскільки $-\frac{2a+b}{g} < 0$, то максимумом ядра гри на X по x є

$$\max_{x\in X} H(x, y) = \begin{cases} H(x_{\max}, y) = H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right) = hy^2 - \frac{(b+gy)^2}{4a} + k, \ y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right], \\ \max\{H(0, y), H(1, y)\} = H(0, y) = hy^2 + k, \ y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]. \end{cases} \tag{25}$$

Завдяки (11) ми знаємо, що $y_{\min} = \frac{bg}{4ah - g^2} \in \left(0; -\frac{b}{g}\right)$, тому мінімум функції (25) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{b}{g}\right]} H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right), \min_{y\in\left[-\frac{b}{g}; 1\right]} H(0, y)\right\} =$$
$$= \min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y_{\min}\right), \min\left\{H\left(0, -\frac{b}{g}\right), H(0, 1)\right\}\right\} = \min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y_{\min}\right), H\left(0, -\frac{b}{g}\right)\right\} =$$
$$= H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y_{\min}\right) = H(x_{\max}, y_{\min}) = H\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg}{4ah - g^2}\right) = \frac{hb^2}{g^2 - 4ah} + k = V_{\text{opt}} \tag{26}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{\frac{bg}{4ah - g^2}\right\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Тому тут маємо (16), (17), і розв'язком гри є (18).

2. $b + g > 0$. Так як $-\frac{b}{g} > 1$, то точка $x_{\max} = -\frac{b+gy}{2a} \geqslant 0$ при $b + gy \geqslant 0$, тобто коли $y \leqslant 1$; і точка $x_{\max} = -\frac{b+gy}{2a} \leqslant 1$ при $2a + b + gy \leqslant 0$, тобто коли $y \geqslant -\frac{2a+b}{g}$. Таким чином, $x_{\max} = -\frac{b+gy}{2a} \in [0; 1]$ при $y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]$. Зауважимо, що $a + b + gy > 0$ при $y < -\frac{a+b}{g}$, причому $-\frac{2a+b}{g} < -\frac{a+b}{g}$.

2.1.1. $b + g > 0$; $2a + b \geqslant 0$; $2a + b + g \leqslant 0$. Тут $-\frac{2a+b}{g} \in [0; 1]$, тому

$$\max_{x\in X} H(x,\ y)=\begin{cases}\max\left\{H(0,\ y),\ H(1,\ y)\right\}=H(1,\ y)=a+b+gy+hy^2+k,\ y\in\left[0;\ -\dfrac{2a+b}{g}\right],\\ H(x_{\max},\ y)=H\left(-\dfrac{b+gy}{2a},\ y\right)=hy^2-\dfrac{(b+gy)^2}{4a}+k,\ y\in\left[-\dfrac{2a+b}{g};\ 1\right].\end{cases} \tag{27}$$

Точка мінімуму $y_{\min}=\dfrac{bg}{4ah-g^2}\in\left[-\dfrac{2a+b}{g};\ 1\right]$, коли $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$ та, враховуючи

$$\frac{bg}{4ah-g^2}-1=\frac{bg-4ah+g^2}{4ah-g^2}=\frac{g(b+g)-4ah}{4ah-g^2}, \tag{28}$$

ще при $g(b+g)-4ah\geqslant 0$. Тоді також згідно (7) матимемо $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\geqslant-\dfrac{2a+b}{g}$, тобто співвідношення (8).

2.1.1.1.1. $b+g>0$; $2a+b\geqslant 0$; $2a+b+g\leqslant 0$; $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$; $g(b+g)-4ah\geqslant 0$. Мінімум функції (27) на сегменті Y

$$\begin{aligned}\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\ y)&=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\ -\frac{2a+b}{g}\right]} H(1,\ y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\ 1\right]} H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right)\right\}=\\ &=\min\left\{\min\left\{H(1,\ 0),\ H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right)\right\},\ H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y_{\min}\right)\right\}=\\ &=\min\left\{H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right),\ H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y_{\min}\right)\right\}=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y_{\min}\right)=\\ &=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ \frac{bg}{4ah-g^2}\right)=\frac{hb^2}{g^2-4ah}+k=V_{\text{opt}}\end{aligned} \tag{29}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{\dfrac{bg}{4ah-g^2}\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Ясно, що тут маємо (16), (17), і розв'язком гри є множина (18).

2.1.1.1.2. $b+g>0$; $2a+b\geqslant 0$; $2a+b+g\leqslant 0$; $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$; $g(b+g)-4ah<0$. Тут точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\geqslant-\dfrac{2a+b}{g}$ та $y_{\min}>1$, значить, буде виконуватись (8) і

$$H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ -\frac{2a+b}{g}\right)>H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ 1\right)>H\left(-\frac{b+gy}{2a},y_{\min}\right)=H\left(x_{\max},\ y_{\min}\right). \tag{30}$$

Тоді відповідний мінімум функції (27) на сегменті Y

$$\begin{aligned}\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\ y)&=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\ -\frac{2a+b}{g}\right]} H(1,\ y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\ 1\right]} H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right)\right\}=\\ &=\min\left\{\min\left\{H(1,\ 0),\ H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right)\right\},\ \min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ -\frac{2a+b}{g}\right),\ H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ 1\right)\right\}\right\}=\\ &=\min\left\{H\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right),\ H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ 1\right)\right\}=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ 1\right)=H\left(-\frac{b+g}{2a},\ 1\right)=h-\frac{(b+g)^2}{4a}+k=V_{\text{opt}}\end{aligned} \tag{31}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{1\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Для даного випадку маємо таке рівняння (15):

$$V_{\text{opt}} = H\left(x_{\max}, 1\right) = H\left(-\frac{b+g}{2a}, 1\right) = h - \frac{\left(b+g\right)^2}{4a} + k = ax^2 + bx + gx + h + k = ax^2 + \left(b+g\right)x + h + k =$$

$$= a\left(x + \frac{b+g}{2a}\right)^2 + h - \frac{\left(b+g\right)^2}{4a} + k = H\left(x, 1\right) = H\left(x, y_{\text{opt}}\right). \qquad (32)$$

Коренями рівняння (32) є $x_1 = x_2 = -\frac{b+g}{2a}$. Тому $X_{\text{opt}} = \left\{x_1\right\} = \left\{x_2\right\} = \left\{-\frac{b+g}{2a}\right\}$ та $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{-\frac{b+g}{2a}\right\}$, а розв'язком гри є множина

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{-\frac{b+g}{2a}\right\}, \left\{1\right\}, h - \frac{\left(b+g\right)^2}{4a} + k\right\}. \qquad (33)$$

2.1.1.2. $b+g>0$; $2a+b \geqslant 0$; $2a+b+g \leqslant 0$; $2h\left(2a+b\right) - g^2 > 0$. Тут $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left(0; -\frac{2a+b}{g}\right)$ та $y_{\min} < -\frac{2a+b}{g}$, звідки справедливими є нерівності

$$H\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = H\left(1, -\frac{g}{2h}\right) < H\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), \qquad (34)$$

$$H\left(x_{\max}, y_{\min}\right) = H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y_{\min}\right) < H\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right) = H\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) < H\left(-\frac{b+gy}{2a}, 1\right). \qquad (35)$$

Тоді мінімум функції (27) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x, y\right) = \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]} H\left(1, y\right), \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} H\left(-\frac{b+gy}{2a}, y\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{H\left(1, -\frac{g}{2h}\right), \min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right), H\left(-\frac{b+gy}{2a}, 1\right)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{H\left(1, -\frac{g}{2h}\right), H\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{H\left(1, -\frac{g}{2h}\right), H\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\} = H\left(1, -\frac{g}{2h}\right) = H\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = a + b - \frac{g^2}{4h} + k = V_{\text{opt}} \qquad (36)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Із (22) та (23) слідує, що у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{1\right\}$ та розв'язком гри є (24).

2.1.2. $b+g>0$; $2a+b \geqslant 0$; $2a+b+g>0$. Так як $-\frac{2a+b}{g} > 1$, то $x_{\max} = -\frac{b+gy}{2a} \notin X$ при $y \in Y$. Таким чином, $a+b+gy>0 \quad \forall\ y \in Y$, і максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є функція

$$\max_{x\in X} H\left(x, y\right) = \max\left\{H\left(0, y\right), H\left(1, y\right)\right\} = \max\left\{hy^2 + k, a + b + gy + hy^2 + k\right\} =$$

$$= H\left(1, y\right) = a + b + gy + hy^2 + k. \qquad (37)$$

2.1.2.1. $b+g>0$; $2a+b \geqslant 0$; $2a+b+g>0$; $2h+g \geqslant 0$. Так як $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{g}{2h} \in \left(0; 1\right]$, то мінімум параболи (37) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right)=\min_{y\in Y} H\left(1,\ y\right)=\min_{y\in Y}\left(a+b+gy+hy^2+k\right)=$$
$$=H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right)=H\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=a+b-\frac{g^2}{4h}+k=V_{\text{opt}} \qquad (38)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{-\frac{g}{2h}\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Оскільки $-\frac{g}{2h}<-\frac{2a+b}{g}$, то знову із (22) та (23) слідує, що $x_2=\frac{g^2-2h\left(a+b\right)}{2ah}>1$, $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\left\{1\right\}$ та розв'язком гри є (24).

2.1.2.2. $b+g>0$; $2a+b\geqslant 0$; $2a+b+g>0$; $2h+g<0$. Так як $y_{\min}^{\langle 1\rangle}=-\frac{g}{2h}>1$, то

$$H\left(1,\ 0\right)<H\left(1,\ 1\right)<H\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=H\left(1,\ -\frac{g}{2h}\right), \qquad (39)$$

а мінімум параболи (37) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right)=\min_{y\in Y} H\left(1,\ y\right)=\min_{y\in Y}\left(a+b+gy+hy^2+k\right)=H\left(1,\ 1\right)=a+b+g+h+k=V_{\text{opt}} \qquad (40)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{1\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (15)

$$V_{\text{opt}}=H\left(1,\ 1\right)=a+b+g+h+k=ax^2+bx+gx+h+k=ax^2+\left(b+g\right)x+h+k=$$
$$=a\left(x-1\right)\left(x+\frac{a+b+g}{a}\right)+a+b+g+h+k=H\left(x,\ 1\right)=H\left(x,\ y_{\text{opt}}\right) \qquad (41)$$

є $x_1=1$ та $x_2=-\frac{a+b+g}{a}$. Але $x_2=-\frac{a+b+g}{a}>1$, тому $x_2\notin X$ та $X_{\text{opt}}=\left\{x_1\right\}=\left\{1\right\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\left\{1\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S}=\left\{\left\{1\right\},\ \left\{1\right\},\ a+b+g+h+k\right\}. \qquad (42)$$

2.2. $b+g>0$; $2a+b<0$. Оскільки $-\frac{2a+b}{g}<0$, то $x_{\max}=-\frac{b+gy}{2a}\in X$ при $y\in Y$. Тому максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є парабола

$$\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right)=\max_{x\in X}\left(ax^2+bx+gxy+hy^2+k\right)=H\left(x_{\max},\ y\right)=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right)=hy^2-\frac{\left(b+gy\right)^2}{4a}+k. \qquad (43)$$

При цьому точка мінімуму $y_{\min}=\frac{bg}{4ah-g^2}\in\left(0;\ 1\right]$ при $g\left(b+g\right)-4ah\geqslant 0$.

2.2.1. $b+g>0$; $2a+b<0$; $g\left(b+g\right)-4ah\geqslant 0$. Мінімум параболи (43) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H\left(x,\ y\right)=\min_{y\in Y} H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ y\right)=\min_{y\in Y}\left(hy^2-\frac{\left(b+gy\right)^2}{4a}+k\right)=$$
$$=H\left(-\frac{b+gy}{2a},\ \frac{bg}{4ah-g^2}\right)=\frac{hb^2}{g^2-4ah}+k=V_{\text{opt}} \qquad (44)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{\frac{bg}{4ah-g^2}\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Тому тут маємо (16), (17), і розв'язком гри є (18).

2.2.2. $b+g>0$; $2a+b<0$; $g(b+g)-4ah<0$. Так як $y_{\min}>1$, то має місце нерівність

$$H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,0\right)=H\left(-\frac{b}{2a},\,0\right)>H\left(-\frac{b+gy}{2a},1\right)=H\left(-\frac{b+g}{2a},1\right)>H\left(-\frac{b+gy}{2a},y_{\min}\right)=H\left(x_{\max},\,y_{\min}\right),\quad(45)$$

згідно якої мінімум параболи (43) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}H(x,\,y)=\min_{y\in Y}H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,y\right)=\min\left\{H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,0\right),\,H\left(-\frac{b+gy}{2a},\,1\right)\right\}=$$

$$=H\left(-\frac{b+gy}{2a},1\right)=H\left(-\frac{b+g}{2a},1\right)=h-\frac{(b+g)^2}{4a}+k=V_{\mathrm{opt}}\quad(46)$$

досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}}=\{1\}=\{y_{\mathrm{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}$. З рівняння (32) отримуємо $\mathscr{X}_{\mathrm{opt}}=X_{\mathrm{opt}}=\left\{-\frac{b+g}{2a}\right\}$ та розв'язок гри (33).

Висновок

Розглянуті 10 випадків співвідношень коефіцієнтів ядра (1) можна згрупувати за отриманими чотирма видами розв'язків у п'ять базисних співвідношень. Таким чином, розв'язком гри є множина (18) при $b+g\leqslant 0$, $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$, а також, окрім цього, при $b+g>0$, $2a+b+g\leqslant 0$, $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$ та $g(b+g)-4ah\geqslant 0$; множина (24) є розв'язком гри, якщо $2a+b\geqslant 0$, $2h(2a+b)-g^2>0$, $2h+g\geqslant 0$; розв'язком гри є множина (33) при $b+g>0$, $2a+b+g\leqslant 0$, $2h(2a+b)-g^2\leqslant 0$ та $g(b+g)-4ah<0$; нарешті, при $b+g>0$, $2a+b+g>0$ та $2h+g<0$ розв'язком гри є множина (42). Ще три види розв'язку такої строго випукло-вгнутої гри отримані у роботі [2], де розглянуті сім випадків співвідношень коефіцієнтів ядра (1) було перегруповано у відповідних три базисних співвідношення: якщо $b>0$, $g>0$ та $2a+b\leqslant 0$, то розв'язком гри є множина

$$\mathscr{S}=\left\{\left\{-\frac{b}{2a}\right\},\,\{0\},\,k-\frac{b^2}{4a}\right\};\quad(47)$$

при $b>0$, $g>0$ та $2a+b>0$ розв'язком гри є множина

$$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\,\{0\},\,a+b+k\right\};\quad(48)$$

якщо ж $b<0$, то розв'язком гри є множина

$$\mathscr{S}=\left\{\{0\},\,\{0\},\,k\right\}.\quad(49)$$

Отже, як і слід було очікувати, неперервна антагоністична строго випукло-вгнута гра з ядром (1) розв'язується виключно у чистих стратегіях і має усього сім видів розв'язку, котрі визначаються вісьмома базисними співвідношеннями коефіцієнтів ядра цієї гри.

Література

1. Romanuke V. V. The convex game on the unit square with the kernel, that is the sum of the weighted strategies and their weighted product // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: сборник статей VII Международной научно-технической конференции. Ч. II. — Пенза: РИО ПГСХА, 2007. — С. 73 — 77.

2. Романюк В. В. Три базових співвідношення для трьох видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випукло-вгнутої гри // Всеукраїнський науково-виробничий журнал "Інноваційна економіка". — № 4 (10), 2008. — С. 166 — 172.

Надійшла 25.12.2008 р.