УДК 519.832.4

В. В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

ПРО РІВНОЗНАЧНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ ДРУГОГО ГРАВЦЯ У ВГНУТІЙ АНТАГОНІСТИЧНІЙ ГРІ З ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНИМ ЯДРОМ НА ОДИНИЧНОМУ ГІПЕРКУБІ ЧОТИРИВИМІРНОГО ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Доведено рівноцінність трьох оптимальних змішаних стратегій другого гравця у знайденому розв'язку однієї вгнутої антагоністичної гри з експоненціальним ядром, яке задається на одиничному гіперкубі чотиривимірного евклідового простору. Ці стратегії полягають або у рівноімовірному виборі кожної з вершин одиничного квадрата, який є множиною усіх чистих стратегій другого гравця, або у рівноімовірному виборі вершин кожної з діагоналей цього квадрата.

There has been proved the equivalence of the three optimal mixed strategies of the second player in the found solution of a concave antagonistic game with the exponential kernel, which is defined on the unit hypercube of four-dimensional Euclidean space. These strategies consist either in equiprobable selection of each of the vertices of the unit square, that is the set of all the pure strategies of the second player, or in equiprobable selection of the vertices of each of the diagonals of this square.

Постановка проблеми у загальному виді

Антагоністичне ігрове моделювання техніко-економічних конфліктно-керованих явищ та процесів дозволяє швидко знаходити оптимальні ситуації та пропонувати конкуруючим сторонам ефективні процедури прийняття оптимальних рішень. У процесі еволюції взаємодії двох конкурентів з двома координатами, де завданням першого гравця є ураження другого, обидва конкуренти рухаються у межах своїх одиничних квадратів $\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1]\subset\mathbb{R}^2$, намагаючись отримати якомога більший виграш з ядра

$$K(x_1,\,x_2,\,y_1,\,y_2)=\exp\left[-\alpha(x_1-y_1)^2\right]\exp\left[-\alpha(x_2-y_2)^2\right]=\exp\left[-\alpha(x_1-y_1)^2-\alpha(x_2-y_2)^2\right] \tag{1}$$

відповідної антагоністичної гри, де $\mathbf{X}=[x_1\quad x_2]\in\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1]\subset\mathbb{R}^2$ є координатами руху першого гравця, а $\mathbf{Y}=[y_1\quad y_2]\in\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1]\subset\mathbb{R}^2$ є координатами маневрування другого гравця. Додатний параметр α визначає рівень точності кожного удару першого гравця, імовірність ураження при якому і визначається як (1). Оптимальні ситуації у представленій грі в загальному випадку невідомі.

Аналіз першоджерел по темі дослідження та мета роботи

У [1, с. 62 — 66] розглядається одномірний випадок руху гравців, проте і він розв'язується лише частково. Тому метою даної роботи є виявлення тих властивостей антагоністичної гри з ядром (1) на гіперкубі

$$\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1]\times\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1]=\coprod_{l=1}^{4}[0;\,1]\subset\mathbb{R}^4\,, \tag{2}$$

котрі дозволять розв'язати цю гру аналітично. Якщо це вдасться здійснити, то за умови існування декількох розв'язків необхідно буде порівняти їх між собою.

Оптимальна стратегія першого гравця та оптимальне значення гри

Спочатку перевіримо умову випуклості

$$\frac{\partial^2 K(x_1,\,y_1,\,x_2,\,y_2)}{\partial y_j\partial y_j}\geqslant 0\quad\forall\ j\in\{1,\,2\} \tag{3}$$

гри з ядром (1) на гіперкубі (2), що має виконуватись для довільних пар точок $\mathbf{X}$ та $\mathbf{Y}$. Маємо:

$$\frac{\partial^2 K(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial y_j \partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\left(2\alpha\left(x_j - y_j\right)\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right]\right) =$$

$$= -2\alpha\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] + 4\alpha^2\left(x_j - y_j\right)^2\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] =$$

$$= 2\alpha\left(2\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 - 1\right)\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right], \; j \in \{1, 2\}. \quad (4)$$

Але очевидно, що

$$0 < \exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] \leqslant 1, \quad (5)$$

тому умова (3) з урахуванням (4) і (5) перепишеться у вигляді

$$2\alpha\left(2\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 - 1\right) \geqslant 0, \; j \in \{1, 2\}. \quad (6)$$

Оскільки $\alpha > 0$, то (6) можна представити як

$$\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}, \; j \in \{1, 2\}. \quad (7)$$

Проте умова (7) не є дійсною, адже при $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ виходить, що $0 \geqslant \frac{1}{2}$. Тому умова випуклості (3) тут не виконана, і досліджувана гра не є випуклою ні при якому α.

Тепер перевіримо умову вгнутості

$$\frac{\partial^2 K(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial x_j \partial x_j} \leqslant 0 \quad \forall\, j \in \{1, 2\} \quad (8)$$

гри з ядром (1) на гіперкубі (2), що має виконуватись для довільних пар точок $\mathbf{X}$ та $\mathbf{Y}$. Маємо:

$$\frac{\partial^2 K(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(-2\alpha\left(x_j - y_j\right)\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right]\right) =$$

$$= -2\alpha\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] + 4\alpha^2\left(x_j - y_j\right)^2\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] =$$

$$= 2\alpha\left(2\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 - 1\right)\exp\left[-\alpha\left(x_1 - y_1\right)^2 - \alpha\left(x_2 - y_2\right)^2\right] = \frac{\partial^2 K(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\partial y_j \partial y_j}, \; j \in \{1, 2\}. \quad (9)$$

З урахуванням (9) і (5) умова (8) перепишеться у вигляді

$$2\alpha\left(2\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 - 1\right) \leqslant 0, \; j \in \{1, 2\}, \quad (10)$$

звідки

$$\alpha\left(x_j - y_j\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}, \; j \in \{1, 2\}. \quad (11)$$

Але значення $\left(x_j - y_j\right)^2$ належить сегменту $[0; 1]$, тому умова (11) виконується при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Значить, властивістю антагоністичної гри з ядром (1) на гіперкубі (2) є її вгнутість при $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$.

Відомо, що у вгнутій антагоністичній грі перший гравець володіє чистою оптимальною стратегією, яка визначається максимінним способом [2, р. 86]. Маємо:

$$\min_{\mathbf{Y}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} K(x_1, x_2, y_1, y_2) = \min_{\mathbf{Y}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} \left(\exp\left[-\alpha(x_1 - y_1)^2 - \alpha(x_2 - y_2)^2\right]\right) =$$
$$= \exp\left[-\alpha(x_1 + 2s_1 - 1)^2 - \alpha(x_2 + 2s_2 - 1)^2\right], \tag{12}$$

де $x_j \in \left[s_j;\, s_j + \frac{1}{2}\right]$ при $s_j \in \left\{0, \frac{1}{2}\right\}$, $j \in \{1, 2\}$, звідки оптимальна стратегія першого гравця

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} \in \arg\max_{\mathbf{X}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} \left(\min_{\mathbf{Y}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} K(x_1, x_2, y_1, y_2)\right) =$$
$$= \arg\max_{\mathbf{X}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} \left[\min_{\mathbf{Y}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} \left(\exp\left[-\alpha(x_1 - y_1)^2 - \alpha(x_2 - y_2)^2\right]\right)\right] =$$
$$= \arg\max_{\mathbf{X}\in[0;\,1]\times[0;\,1]} \left(\exp\left[-\alpha(x_1 + 2s_1 - 1)^2 - \alpha(x_2 + 2s_2 - 1)^2\right]\right) = \left\{\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\right\}. \tag{13}$$

При цьому оптимальним значенням гри є

$$v_{\text{opt}} = \exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2} + 2s_1 - 1\right)^2 - \alpha\left(\frac{1}{2} + 2s_2 - 1\right)^2\right] = \exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{14}$$

Оптимальні стратегії другого гравця

У вгнутій антагоністичній грі спектр оптимальної стратегії другого гравця складається з кінцевої кількості активних чистих стратегій [2, p. 86 — 89]. Множину усіх активних стратегій другого гравця визначаємо зі стандартного рівняння [2, p. 77]

$$v_{\text{opt}} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2} - y_1\right)^2 - \alpha\left(\frac{1}{2} - y_2\right)^2\right] = K(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \mathbf{Y}), \tag{15}$$

яке переписується як

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - y_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y_2\right)^2. \tag{16}$$

З тотожності (16) випливає, що коренями рівняння (15) є $y_j = 0$ або $y_j = 1$, $j \in \{1, 2\}$. Таким чином, потенційними активними стратегіями другого гравця є вершини $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ одиничного квадрата $\coprod_{j=1}^{2}[0;\,1] \subset \mathbb{R}^2$.

Нехай вектор імовірностей

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix}\theta_1 & \theta_2 & \theta_3 & \theta_4\end{bmatrix} \tag{17}$$

є змішаною стратегією другого гравця, де $\theta_i \in [0;\,1]$ $\forall\, i = \overline{1, 4}$, $\sum_{i=1}^{4} \theta_i = 1$, а координати вектора (17) є імовірностями обирання вершин $\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$ відповідно. Очевидно, що можна висунути припущення про таку оптимальну поведінку другого гравця, за якої він обиратиме кожну вершину одиничного квадрата $[0;\,1]\times[0;\,1]$ з однаковими імовірностями. Тобто якщо вектор

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix} \tag{18}$$

є оптимальною стратегією другого гравця, то має виконуватись нерівність

$$\frac{1}{4}K(x_1, x_2, 0, 0)+\frac{1}{4}K(x_1, x_2, 0, 1)+\frac{1}{4}K(x_1, x_2, 1, 0)+\frac{1}{4}K(x_1, x_2, 1, 1)=$$
$$=\frac{1}{4}\exp\left[-\alpha(x_1)^2-\alpha(x_2)^2\right]+\frac{1}{4}\exp\left[-\alpha(x_1)^2-\alpha(x_2-1)^2\right]+$$
$$+\frac{1}{4}\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2-\alpha(x_2)^2\right]+\frac{1}{4}\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2-\alpha(x_2-1)^2\right]\leqslant v_{\mathrm{opt}}=\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{19}$$

для довільної точки $\mathbf{X}$. Але ліву частину нерівності (19) можна переписати як

$$\frac{1}{4}\left(\exp\left[-\alpha(x_1)^2\right]+\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2\right]\right)\left(\exp\left[-\alpha(x_2)^2\right]+\exp\left[-\alpha(x_2-1)^2\right]\right). \tag{20}$$

Легко перевірити, що кожна із сум-співмножників у (20) має точку максимуму, яка ділить одиничний сегмент $[0; 1]$ навпіл. Справді, перша похідна

$$\frac{d}{dx_j}\left(\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]+\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right]\right)=-2\alpha x_j\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]-2\alpha(x_j-1)\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right] \tag{21}$$

перетворюється у нуль, очевидно, у точці $x_j=\frac{1}{2},\ j\in\{1, 2\}$. Друга похідна

$$\frac{d^2}{dx_j dx_j}\left(\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]+\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right]\right)=$$
$$=-2\alpha\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]+4\alpha^2(x_j)^2\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]-2\alpha\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right]+4\alpha^2(x_j-1)^2\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right]=$$
$$=2\alpha\left(2\alpha(x_j)^2-1\right)\exp\left[-\alpha(x_j)^2\right]+2\alpha\left(2\alpha(x_j-1)^2-1\right)\exp\left[-\alpha(x_j-1)^2\right] \tag{22}$$

у цій точці набуває від’ємного значення

$$=2\alpha\left(2\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right)\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+2\alpha\left(2\alpha\left(\frac{1}{2}-1\right)^2-1\right)\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right]=$$
$$=2\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+2\alpha\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)=2\alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right), \tag{23}$$

оскільки $\alpha\in\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Значить, функція (20) як невід’ємна поверхня від аргументів x_1 та x_2 має точку максимуму $\left[\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\right]$, у якій її значенням є

$$\frac{1}{4}\left(\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right]\right)\left(\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]+\exp\left[-\alpha\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\right]\right)=$$
$$=\frac{1}{4}\left[\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)+\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)\right]^2=\frac{4}{4}\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)\exp\left(-\frac{\alpha}{4}\right)=\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right). \tag{24}$$

Отже, нерівність (19) виконується, і (18) є оптимальною стратегією другого гравця.

А ось тепер перевіримо, чи буде оптимальним для другого гравця рівноімовірний вибір діагоналей одиничного квадрата $[0; 1]\times[0; 1]$. Тобто перевірятимемо на оптимальність діагональні змішані стратегії

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{25}$$

та

$$\mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

другого гравця. Для оптимальності (25) і (26) достатньо виконання нерівностей

$$\frac{1}{2}K(x_1, x_2, 0, 0) + \frac{1}{2}K(x_1, x_2, 1, 1) =$$
$$= \frac{1}{2}\exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] \leqslant v_{\text{opt}} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{27}$$

та

$$\frac{1}{2}K(x_1, x_2, 0, 1) + \frac{1}{2}K(x_1, x_2, 1, 0) =$$
$$= \frac{1}{2}\exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] + \frac{1}{2}\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] \leqslant v_{\text{opt}} = \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) \tag{28}$$

відповідно. Ліві частин нерівностей (27) і (28) позначимо як $fdiag_1$ та $fdiag_2$ відповідно, і вважатимемо їх функціями від x_1 та x_2. Маємо похідні, які стосуються нерівності (27):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} fdiag_1 = -\alpha x_1 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] - \alpha(x_1-1)\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{29}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} fdiag_1 = -\alpha x_2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] - \alpha(x_2-1)\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{30}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1 = -\alpha \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] + 2\alpha^2(x_1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] -$$
$$-\alpha \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] + 2\alpha^2(x_1-1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{31}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_1 = -\alpha \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] + 2\alpha^2(x_2)^2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] -$$
$$-\alpha \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] + 2\alpha^2(x_2-1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1 = 2\alpha^2 x_1 x_2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] +$$
$$+2\alpha^2(x_1-1)(x_2-1)\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_1, \tag{33}$$

звідки легко перевірити, що точка $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ є стаціонарною точкою функції $fdiag_1$, адже

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = 0, \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_2} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = 0. \tag{35}$$

Для визначення типу екстремуму виконуємо обчислення значень других похідних (31) — (33) у точці (13):

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = -2\alpha \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = -2\alpha \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \alpha^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right), \tag{38}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \alpha^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1\bigg|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}. \tag{39}$$

Визначник

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1\Big|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1\Big|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_1\Big|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} & \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_1\Big|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \left[\alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 - \left[\alpha^2 \exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 =$$

$$= \alpha^2\left[(\alpha-2)^2 - \alpha^2\right]\exp(-\alpha) = 4\alpha^2(1-\alpha)\exp(-\alpha) \tag{40}$$

при $\alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$ є додатним. А оскільки (36) є від'ємним $\forall\, \alpha \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$, то точка (13) є точкою максимуму поверхні $fdiag_1$, і у цій точці поверхня $fdiag_1$ набуває значення, яке стоїть у правій частині (27). Отже, нерівність (27) виконується, і (25) є оптимальною стратегією.

Тепер знаходимо похідні, які стосуються нерівності (28):

$$\frac{\partial}{\partial x_1} fdiag_2 = -\alpha(x_1-1)\exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] - \alpha x_1 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{41}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} fdiag_2 = -\alpha x_2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] - \alpha(x_2-1)\exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{42}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_2 = -\alpha \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] + 2\alpha^2(x_1-1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] -$$

$$-\alpha \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] + 2\alpha^2(x_1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{43}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_2 = -\alpha \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] + 2\alpha^2(x_2)^2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] -$$

$$-\alpha \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] + 2\alpha^2(x_2-1)^2 \exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right], \tag{44}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_2 = 2\alpha^2(x_1-1)x_2 \exp\left[-\alpha(x_1-1)^2 - \alpha(x_2)^2\right] +$$

$$+2\alpha^2(x_1)(x_2-1)\exp\left[-\alpha(x_1)^2 - \alpha(x_2-1)^2\right] = \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_2, \tag{45}$$

звідки легко переконатися, що точка $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ є стаціонарною точкою функції $fdiag_2$, адже і тут

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = 0\,, \tag{46}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = 0\,. \tag{47}$$

Для визначення типу екстремуму виконуємо обчислення значень других похідних (43) — (45) у точці (13):

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = -2\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}\,, \tag{48}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = -2\alpha\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) + \alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) =$$

$$= \alpha(\alpha-2)\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}\,, \tag{49}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}\,, \tag{50}$$

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \alpha^2\exp\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} =$$

$$= \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} = \left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_1\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}}\,. \tag{51}$$

Відповідний визначник

$$\begin{vmatrix} \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} \\ \left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} & \left.\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} fdiag_2\right|_{x_1=\frac{1}{2},\, x_2=\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \alpha^2\left[(\alpha-2)^2 - \alpha^2\right]\exp(-\alpha) = 4\alpha^2(1-\alpha)\exp(-\alpha) \tag{52}$$

при $\alpha \in \left(0;\, \frac{1}{2}\right]$ виявляється так само додатним, як і (40). А оскільки (48), як і (36), є від'ємним $\forall\, \alpha \in \left(0;\, \frac{1}{2}\right]$, то точка (13) є точкою максимуму поверхні $fdiag_2$, і у цій точці поверхня $fdiag_2$ набуває значення, яке стоїть у правій частині (28). Отже, нерівність (28) виконується, і (26) також є оптимальною стратегією другого гравця.

Питання про те, яку з трьох оптимальних стратегій (18), (25) і (26) використовувати другому гравцю, вирішується сумуванням наслідків усіх ситуацій, в яких фігурує кожна оптимальна стратегія другого гравця. Наслідками використання кожної з оптимальних стратегій (18), (25) і (26) є інтеграли

$$\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1 \left[K(x_1, x_2, 0, 0) + K(x_1, x_2, 0, 1) + K(x_1, x_2, 1, 0) + K(x_1, x_2, 1, 1)\right] dx_1 dx_2\,, \tag{53}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left[K(x_1, x_2, 0, 0) + K(x_1, x_2, 1, 1)\right] dx_1 dx_2 \tag{54}$$

та

$$\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left[K\left(x_1, x_2, 0, 1\right)+K\left(x_1, x_2, 1, 0\right)\right]dx_1 dx_2 \tag{55}$$

відповідно. Застосувавши спеціальне програмне забезпечення Maple 7, переконуємося в однаковості значень цих інтегралів (рис. 1, 2). Отже, кожна з оптимальних стратегій (18), (25) і (26) другого гравця є рівнозначною, і немає ніяких підстав рекомендувати другому гравцю використовувати ту чи іншу з них [3, 4].

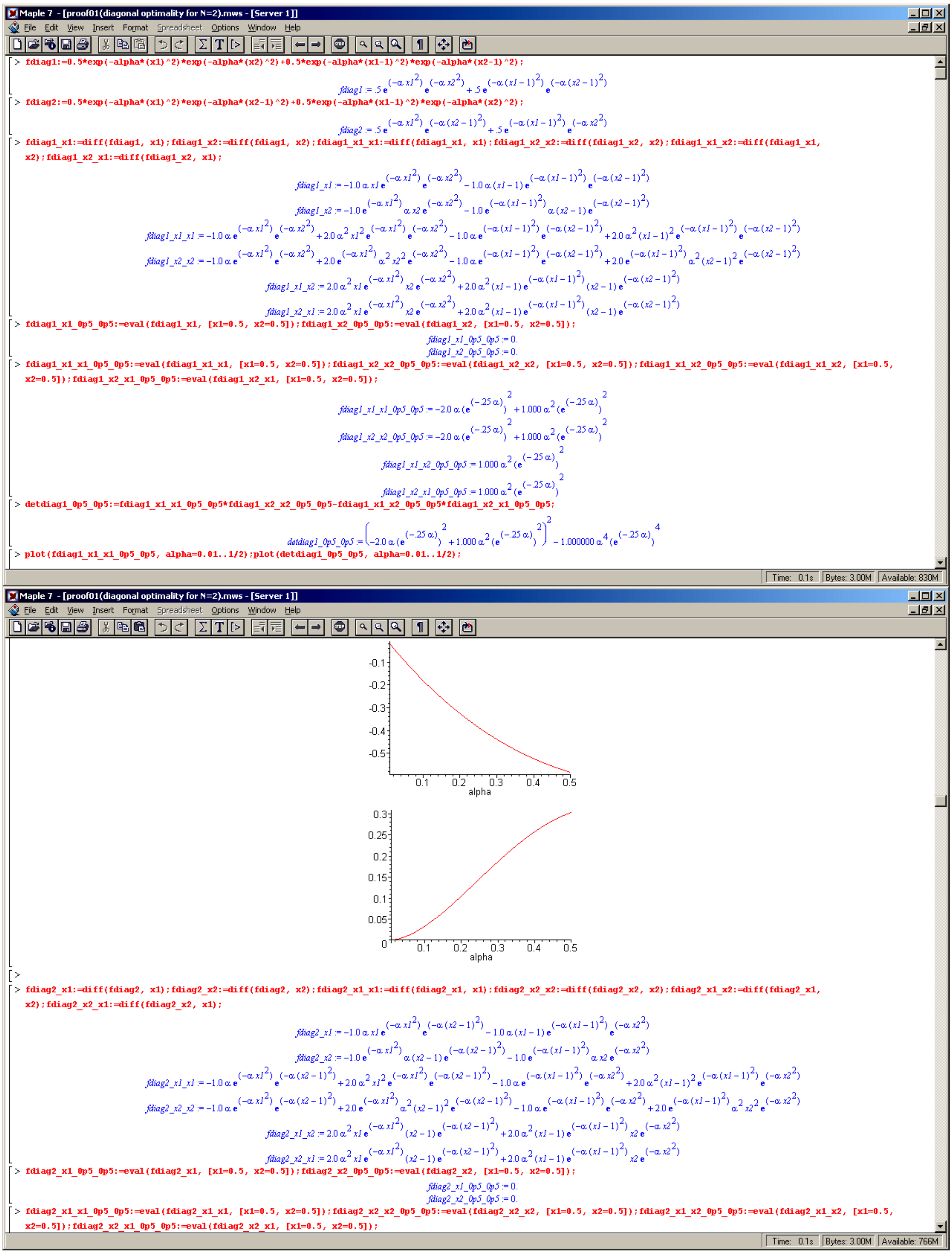
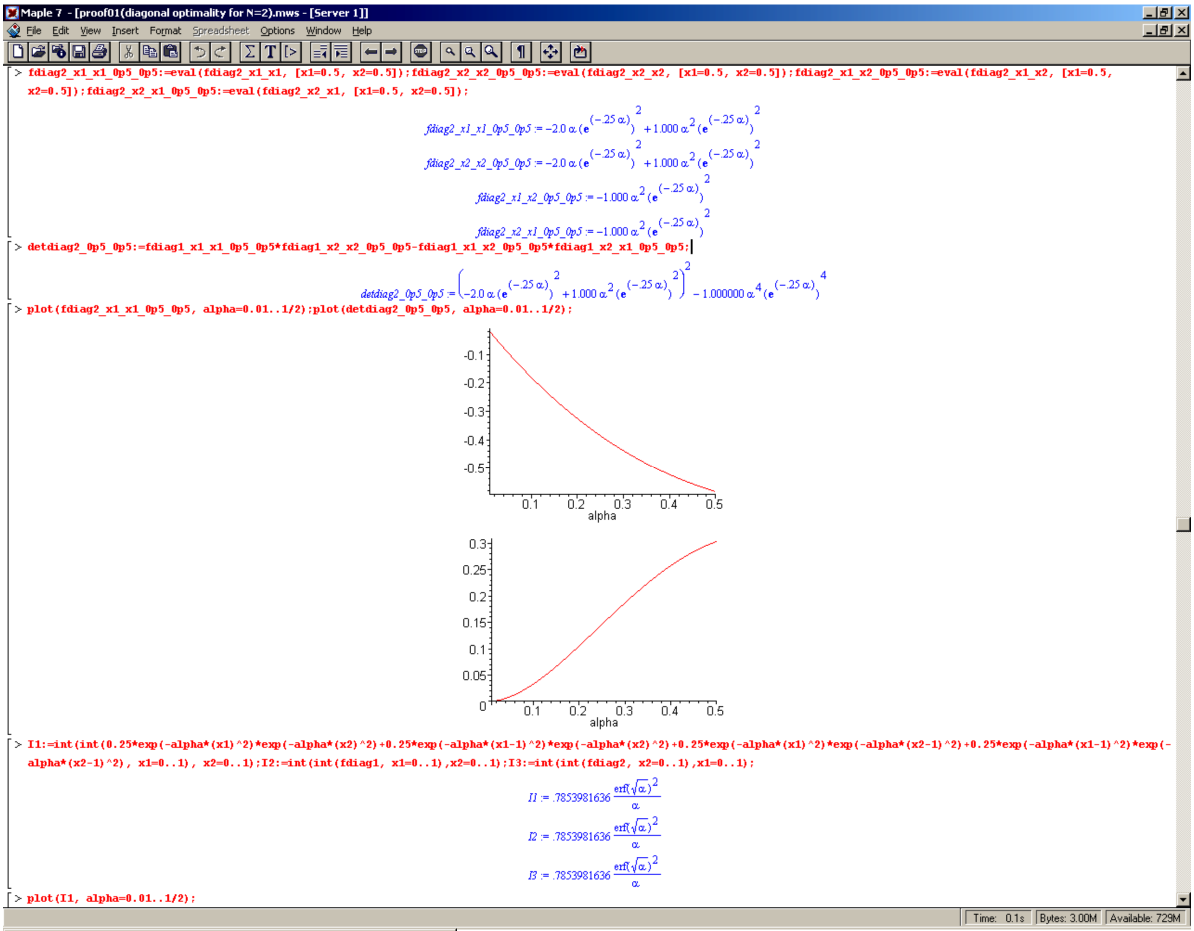


Рис. 1



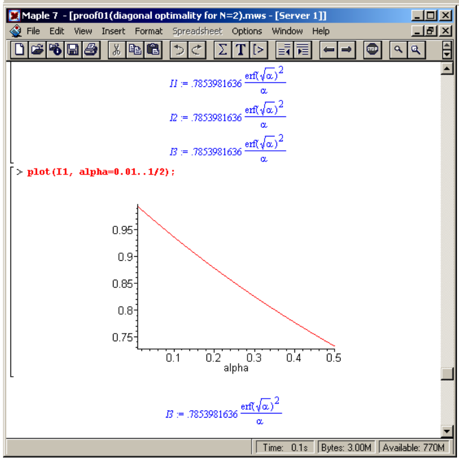


Рис. 2

Висновок та планування подальших досліджень

На основі проведених аналітичних доведень необхідно стверджувати, що у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром (1), яке задається на одиничному гіперкубі (2), перший гравець має оптимальну стратегію (13), а другий володіє трьома рівноцінними оптимальними змішаними стратегіями у формі векторів імовірностей (18), (25) і (26), що дає оптимальне значення гри (14). Подальше дослідження у даному напрямку слід пов'язати зі знаходженням ситуацій рівноваги у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром, яке задається на одиничному шестивимірному гіперкубі.

Література

1. Вентцель Е. С. Элементы теории игр: Вып. 32. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 67 с. — (Серия: Популярные лекции по математике).
2. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. — 304 с.: ил.
3. Романюк В. В. Моделювання реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі з двома чистими стратегіями в кожного з гравців // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2007. — № 3. — С. 74 — 77.
4. Романюк В. В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. — Харків: НТУ "ХПІ", 2008. — № 49. — С. 146 — 154.

Надійшла 14.04.2009