УДК 519.832.4

В. В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

СІМ ВИДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ СТРОГО ВИПУКЛОЇ НЕПЕРЕРВНОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ ГРИ ДЛЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ ПІДПРИЄМНИЦЬКОЇ КОНКУРЕНТНОЇ АКТИВНОСТІ

У загальному виді розв'язано одну неперервну строго випуклу антагоністичну гру з ядром на одиничному квадраті. Представлено сім видів розв'язку цієї гри, які визначаються при 25 варіантах співвідношень коефіцієнтів ядра гри.

In the general form there has been solved a continuous strictly convex antagonistic game with the kernel on the unit square. There have been presented the seven types of this game solution, which are defined by the 25 variants of the relationships of the game kernel coefficients.

Постановка задачі дослідження

Центральне місце у дослідженні багатьох конфліктно-керованих систем посідають неперервні антагоністичні ігри [1 — 4], в яких функція виграшу $W(x, y)$ або, як ще її називають, ядро, задається на одиничному квадраті

$$S_W = X \times Y = [0; 1] \times [0; 1], \tag{1}$$

де чистою стратегією першого гравця є $x \in X = [0; 1]$, а чистою стратегією другого гравця є $y \in Y = [0; 1]$. Зокрема, практичний інтерес становлять строго випуклі неперервні антагоністичні ігри, ядро яких, нагадаємо, є таким, що $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ виконується $\dfrac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} > 0$. Такі ігри можуть бути моделями найпростіших процесів підприємницької конкурентної активності. У роботі [5] було визначено п'ять видів розв'язку (рис. 1) строго випуклої неперервної антагоністичної гри з ядром

$$W(x, y) = hy^2 + cy + gxy + bx + k, \tag{2}$$

де g та b є довільними ненульовими коефіцієнтами, а $k \in \mathbb{R}$, причому $c > 0$, а також $h > 0$, що випливає з умови $\dfrac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$. У даній роботі визначимо усі види розв'язку цієї гри при $c < 0$ і, таким чином, на основі даної роботи і роботи [5] складемо загальний розв'язок строго випуклої неперервної антагоністичної гри з ядром (2) при довільних ненульових коефіцієнтах c, g та b.

Розв'язування заданої строго випуклої неперервної антагоністичної гри

Позначимо через $\mathscr{X}_{\text{opt}}$ та $\mathscr{Y}_{\text{opt}}$ множини оптимальних стратегій першого і другого гравців відповідно. Значення гри позначимо як V_{opt}. Розв'язок гри, як зазвичай, будемо записувати у виді множини $\mathscr{S} = \left\{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\right\}$. Нехай $X_{\text{opt}} \subseteq X$ та $Y_{\text{opt}} \subseteq Y$ є множинами оптимальних чистих стратегій першого і другого гравців відповідно. Тоді якщо $\left|X_{\text{opt}}\right| = 1$ та $\left|Y_{\text{opt}}\right| = 1$, то $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}}$ та $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}}$. Якщо $\left|X_{\text{opt}}\right| = 2$, тобто $X_{\text{opt}} = \left\{x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}, x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right\}$, то писатимемо $\mathscr{X}_{\text{opt}} = \left\{X_{\text{opt}}, \left\{P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right), P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right)\right\}\right\}$, де $P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right)$ і $P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right)$ є імовірностями обирання першим гравцем чистих стратегій $x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle} \in X_{\text{opt}} \subseteq X$ та $x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle} \in X_{\text{opt}} \subseteq X$ відповідно, причому $P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right) + P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right) = 1$.

Так як $h > 0$ і $c < 0$, то для ненульових коефіцієнтів g та b необхідно розв'язувати дану строго випуклу гру при усіх можливих комбінаціях їх знаків, тобто для чотирьох варіантів.

Варіант 1. $g > 0$, $b > 0$. Визначаємо максимум поверхні (2) на одиничному сегменті X по змінній x:

$$\begin{gathered}\max_{x \in X} W(x, y) = \max_{x \in X}\left(hy^2 + cy + gxy + bx + k\right) = \max\left\{W(0, y), W(1, y)\right\} = \\ = \max\left\{hy^2 + cy + k,\; hy^2 + cy + gy + b + k\right\} = hy^2 + cy + gy + b + k = W(1, y).\end{gathered} \tag{3}$$

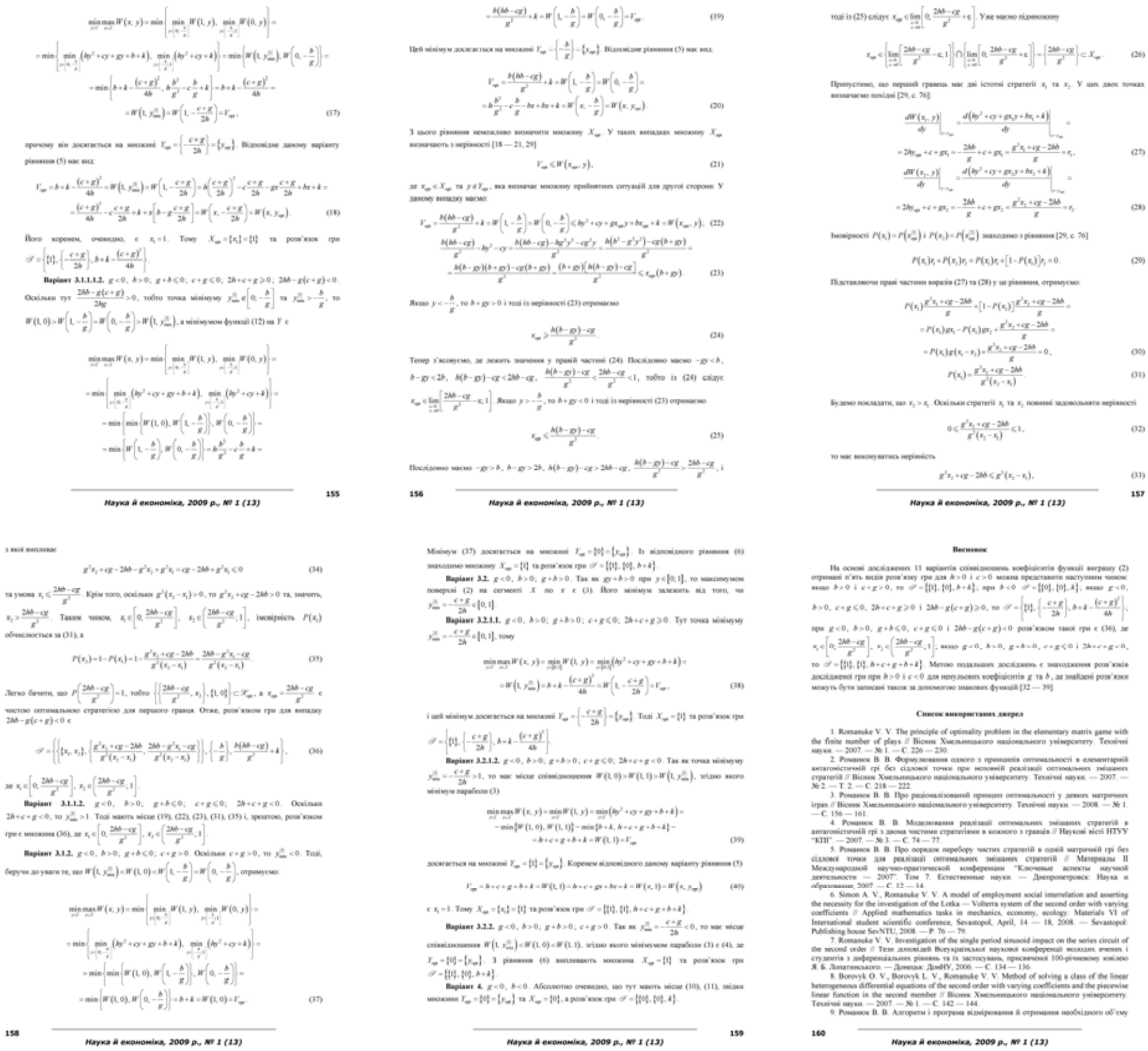

Рис. 1. Сканер-копії шести останніх сторінок статті [5]

Для визначення мінімуму параболи (3) по змінній y на Y необхідно знайти глобальний мінімум $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ функції $W(1,\ y)$, після чого вже установлювати його приналежність сегменту Y. Перша похідна параболи $W(1,\ y)$ по змінній y

$$\frac{dW(1,\ y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right) = 2hy + c + g \tag{4}$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{c+g}{2h}$, причому $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{c+g}{2h} \in [0;\ 1]$, якщо $c + g \leqslant 0$, $2h + c + g \geqslant 0$. Попередньо ще випишемо значення функції $W(1,\ y)$ у точці $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$:

$$W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = W\left(1,\ -\frac{c+g}{2h}\right) = h\left(y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)^2 + cy_{\min}^{\langle 1\rangle} + gy_{\min}^{\langle 1\rangle} + b + k =$$

$$= h\left(\frac{c+g}{2h}\right)^2 - c\frac{c+g}{2h} - g\frac{c+g}{2h} + b + k = b + k - \frac{(c+g)^2}{4h}. \tag{5}$$

Варіант 1.1.1. $g > 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g \geqslant 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{c+g}{2h} \in [0;\ 1]$, то

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\ y) = \min_{y\in[0;\ 1]} W(1,\ y) = \min_{y\in[0;\ 1]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right) =$$

$$= W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = b + k - \frac{(c+g)^2}{4h} = W\left(1,\ -\frac{c+g}{2h}\right) = V_{\text{opt}}, \tag{6}$$

а цей мінімум досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \arg\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\ y) = \left\{-\frac{c+g}{2h}\right\} = \{y_{\text{opt}}\}$. Множину X_{opt} спочатку визначають [6 — 12] за коренями рівняння

$$V_{\text{opt}} = W(x,\ y_{\text{opt}}). \tag{7}$$

Для даному варіанта маємо таке рівняння:

$$V_{\text{opt}} = b + k - \frac{(c+g)^2}{4h} = W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = W\left(1,\ -\frac{c+g}{2h}\right) = h\left(\frac{c+g}{2h}\right)^2 - c\frac{c+g}{2h} - gx\frac{c+g}{2h} + bx + k =$$
$$= \frac{(c+g)^2}{4h} - c\frac{c+g}{2h} + k + x\left[b - g\frac{c+g}{2h}\right] = W\left(x,\ -\frac{c+g}{2h}\right) = W(x,\ y_{\text{opt}}). \tag{8}$$

Його коренем, очевидно, є стратегія $x_1 = 1$. Тому множина $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\ \left\{-\frac{c+g}{2h}\right\},\ b + k - \frac{(c+g)^2}{4h}\right\}$.

Варіант 1.1.2. $g > 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g < 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c+g}{2h} > 1$, то з урахуванням очевидного, як для параболи $W(1,\ y)$, співвідношення $W(1,\ 0) > W(1,\ 1) > W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)$ отримуємо:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\ y) = \min_{y\in Y} W(1,\ y) = \min_{y\in Y}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right) =$$
$$= \min\{W(1,\ 0),\ W(1,\ 1)\} = \min\{b + k,\ h + c + g + b + k\} = h + c + g + b + k = W(1,\ 1) = V_{\text{opt}}, \tag{9}$$

де мінімум (9) досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{1\} = \{y_{\text{opt}}\}$. Коренем відповідного даному варіанту рівняння (7)

$$V_{\text{opt}} = h + c + g + b + k = W(1,\ 1) = h + c + gx + bx + k = W(x,\ 1) = W(x,\ y_{\text{opt}}) \tag{10}$$

є знову $x_1 = 1$. Тому $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{1\},\ \{1\},\ h + c + g + b + k\}$.

Варіант 1.2. $g > 0$, $b > 0$; $c + g > 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c+g}{2h} < 0$, то з урахуванням знову очевидного, як для параболи $W(1,\ y)$, співвідношення $W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) < W(1,\ 0) < W(1,\ 1)$ отримуємо:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\ y) = \min_{y\in Y} W(1,\ y) = \min_{y\in Y}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right) =$$
$$= \min\{W(1,\ 0),\ W(1,\ 1)\} = \min\{b + k,\ h + c + g + b + k\} = b + k = W(1,\ 0) = V_{\text{opt}}. \tag{11}$$

Мінімум (11) досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\}$. Коренем відповідного даному варіанту рівняння (7)

$$V_{\text{opt}} = b + k = W(1,\ 0) = bx + k = W(x,\ 0) = W(x,\ y_{\text{opt}}) \tag{12}$$

є $x_1 = 1$. Тому і тут $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$, а розв'язком гри є $\mathscr{S} = \{\{1\},\ \{0\},\ b + k\}$.

Варіант 2. $g > 0$, $b < 0$. Максимум ядра (2) на сегменті X по змінній x залежить від знаку виразу $gy + b$. Оскільки $gy + b > 0$ при $y > -\frac{b}{g}$, то цей максимум визначається знаком виразу $g + b$.

Варіант 2.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$. Так як $-\frac{b}{g} \in (0;\ 1]$, то максимумом ядра (2) на X по x є функція

$$\max_{x\in X} W(x,\ y) = \max\{W(0,\ y),\ W(1,\ y)\} = \begin{cases} W(0,\ y) = hy^2 + cy + k,\ y \in \left[0;\ -\dfrac{b}{g}\right], \\ W(1,\ y) = hy^2 + cy + gy + b + k,\ y \in \left[-\dfrac{b}{g};\ 1\right]. \end{cases} \tag{13}$$

Знайдемо глобальний мінімум $y_{\min}^{\langle 0\rangle}$ параболи $W(0,\ y)$. Перша похідна функції $W(0,\ y)$ по змінній y

$$\frac{dW(0,\ y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(hy^2 + cy + k\right) = 2hy + c \tag{14}$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\dfrac{c}{2h}$. Зрозуміло, що $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\dfrac{c}{2h} \in [0;\ 1]$ при $2h + c \geqslant 0$. Значенням функції $W(0,\ y)$ у точці $y_{\min}^{\langle 0\rangle}$ є

$$W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) = h\left(y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)^2 + cy_{\min}^{\langle 0\rangle} + k = h\left(\frac{c}{2h}\right)^2 - c\frac{c}{2h} + k = k - \frac{c^2}{4h}. \tag{15}$$

Визначаємо взаємне розташування мінімумів $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ та $y_{\min}^{\langle 0\rangle}$ функцій $W(1,\ y)$ і $W(0,\ y)$ відповідно:

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle} - y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{c+g}{2h} - \left(-\frac{c}{2h}\right) = -\frac{c+g}{2h} + \frac{c}{2h} = -\frac{g}{2h}. \tag{16}$$

Так як $g > 0$, то $y_{\min}^{\langle 1\rangle} - y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\dfrac{g}{2h} < 0$, тобто $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < y_{\min}^{\langle 0\rangle}$ у цьому варіанті. Тоді умова $2h + c \geqslant 0$ означає також те, що $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < 1$, а при $c + g \leqslant 0$ матимемо $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{c+g}{2h} \in [0;\ 1)$. Але мінімізуючи $W(0,\ y)$ на сегменті $\left[0;\ -\dfrac{b}{g}\right]$, необхідно знати чи $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\dfrac{c}{2h} \in \left[0;\ -\dfrac{b}{g}\right]$. Для цього обчислюємо різницю

$$y_{\min}^{\langle 0\rangle} - \left(-\frac{b}{g}\right) = -\frac{c}{2h} - \left(-\frac{b}{g}\right) = -\frac{c}{2h} + \frac{b}{g} = \frac{2hb - cg}{2hg}. \tag{17}$$

З формули (17) випливає, що $y_{\min}^{\langle 0\rangle} \leqslant -\dfrac{b}{g}$ при $2hb - cg \leqslant 0$, де враховується, звісно, $g > 0$.

Варіант 2.1.1.1.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg \leqslant 0$. У такому варіанті маємо $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\dfrac{c}{2h} \in \left(0;\ -\dfrac{b}{g}\right]$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{c+g}{2h} \in \left[0;\ -\dfrac{b}{g}\right)$, тобто $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \notin \left[-\dfrac{b}{g};\ 1\right]$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < -\dfrac{b}{g}$, то має місце подвійна нерівність

$$W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) < W\left(1,\ -\frac{b}{g}\right) < W(1,\ 1). \tag{18}$$

Тоді врахуємо очевидне співвідношення

$$W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) \leqslant W\left(0,\ -\frac{b}{g}\right) = W\left(1,\ -\frac{b}{g}\right) < W(1,\ 1) \tag{19}$$

і знайдемо мінімум функції (13) по змінній y на сегменті Y:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\ y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\ -\frac{b}{g}\right]} W(0,\ y),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\ 1\right]} W(1,\ y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\ -\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + k\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\ 1\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right)\right\} = \min\left\{W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),\ \min\left\{W\left(1,\ -\frac{b}{g}\right),\ W(1,\ 1)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{W\left(0,\, y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right),\, W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right)\right\} = W\left(0,\, y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) = k - \frac{c^2}{4h} = W\left(0,\, -\frac{c}{2h}\right) = V_{\mathrm{opt}}\,. \tag{20}$$

Мінімум (20) досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}} = \left\{-\frac{c}{2h}\right\} = \left\{y_{\mathrm{opt}}\right\}$. Виписуємо відповідне рівняння (7)

$$V_{\mathrm{opt}} = k - \frac{c^2}{4h} = W\left(0,\, -\frac{c}{2h}\right) = h\left(\frac{c}{2h}\right)^2 - c\frac{c}{2h} - gx\frac{c}{2h} + bx + k = k - \frac{c^2}{4h} + x\left(b - \frac{cg}{2h}\right) = W\left(x,\, -\frac{c}{2h}\right) = W\left(x,\, y_{\mathrm{opt}}\right), \tag{21}$$

коренем якого, очевидно, є $x_1 = 0$. Тому $X_{\mathrm{opt}} = \left\{x_1\right\} = \left\{0\right\}$, а розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{\left\{0\right\},\, \left\{-\frac{c}{2h}\right\},\, k - \frac{c^2}{4h}\right\}$.

Варіант 2.1.1.1.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$. Так як тут уже $y_{\min}^{\langle 0\rangle} > -\frac{b}{g}$, то точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$, для якої, нагадаємо, поки що виконується $y_{\min}^{\langle 1\rangle} < y_{\min}^{\langle 0\rangle}$, може попасти у сегмент $\left[-\frac{b}{g};\, 1\right]$. Для визначення того, чи $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\frac{b}{g};\, 1\right]$, обчислюємо різницю

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle} - \left(-\frac{b}{g}\right) = -\frac{c+g}{2h} - \left(-\frac{b}{g}\right) = -\frac{c+g}{2h} + \frac{b}{g} = \frac{2hb - g\left(c+g\right)}{2hg}\,. \tag{22}$$

У нас все ще виконується $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{c}{2h} \in \left(-\frac{b}{g};\, 1\right] \subset \left(0;\, 1\right]$, тому з урахуванням (22) точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in \left[-\frac{b}{g};\, 1\right)$ при умові $2hb - g\left(c+g\right) \geqslant 0$.

Варіант 2.1.1.1.2.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$; $2hb - g\left(c+g\right) < 0$. Тут $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \notin \left[-\frac{b}{g};\, 1\right)$, але $y_{\min}^{\langle 0\rangle} > -\frac{b}{g} > y_{\min}^{\langle 1\rangle}$. Тому виконані співвідношення (18) і

$$W\left(0,\, y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) < W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right) < W\left(0,\, 0\right). \tag{23}$$

З урахуванням того, що $W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right) = W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right)$, маємо мінімум функції (13) на сегменті Y:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W\left(x,\, y\right) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{b}{g}\right]} W\left(0,\, y\right),\, \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\, 1\right]} W\left(1,\, y\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + k\right),\, \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\, 1\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{W\left(0,\, 0\right),\, W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right)\right\},\, \min\left\{W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right),\, W\left(1,\, 1\right)\right\}\right\} = \min\left\{W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right),\, W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right)\right\} =$$

$$= W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right) = W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right) = \frac{b\left(hb - cg\right)}{g^2} + k = V_{\mathrm{opt}}\,. \tag{24}$$

Мінімум (24) досягається на множині $Y_{\mathrm{opt}} = \left\{-\frac{b}{g}\right\} = \left\{y_{\mathrm{opt}}\right\}$. Проте з рівняння (7)

$$V_{\mathrm{opt}} = \frac{b\left(hb - cg\right)}{g^2} + k = W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right) = W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right) = h\frac{b^2}{g^2} - c\frac{b}{g} - bx + bx + k = W\left(x,\, -\frac{b}{g}\right) = W\left(x,\, y_{\mathrm{opt}}\right) \tag{25}$$

неможливо визначити множину X_{opt}. У таких випадках множину X_{opt} визначають з нерівності [9, 10, 12]

$$V_{\text{opt}}=W\left(x_{\text{opt}},\, y_{\text{opt}}\right)\leqslant W\left(x_{\text{opt}},\, y\right), \tag{26}$$

де $x_{\text{opt}}\in X_{\text{opt}}$ та $y\notin Y_{\text{opt}}$, яка визначає множину прийнятних ситуацій для другої гравця. У даному випадку маємо:

$$V_{\text{opt}}=\frac{b\left(hb-cg\right)}{g^2}+k=W\left(0,-\frac{b}{g}\right)=W\left(1,-\frac{b}{g}\right)\leqslant hy^2+cy+gx_{\text{opt}}y+bx_{\text{opt}}+k=W\left(x_{\text{opt}},\, y\right); \tag{27}$$

$$\frac{b\left(hb-cg\right)}{g^2}-hy^2-cy=\frac{b\left(hb-cg\right)-hg^2y^2-cg^2y}{g^2}=\frac{h\left(b^2-g^2y^2\right)-cg\left(b+gy\right)}{g^2}=$$

$$=\frac{h\left(b-gy\right)\left(b+gy\right)-cg\left(b+gy\right)}{g^2}=\frac{\left(b+gy\right)\left[h\left(b-gy\right)-cg\right]}{g^2}\leqslant x_{\text{opt}}\left(b+gy\right). \tag{28}$$

Якщо $y>-\dfrac{b}{g}$, то $b+gy>0$ і тоді із нерівності (28) отримаємо

$$x_{\text{opt}}\leqslant\frac{h\left(b-gy\right)-cg}{g^2}. \tag{29}$$

Тепер з’ясовуємо, де лежить значення у правій частині (29). Послідовно маємо $-gy<b$, $b-gy<2b$, $h\left(b-gy\right)-cg<2hb-cg$, $\dfrac{h\left(b-gy\right)-cg}{g^2}<\dfrac{2hb-cg}{g^2}<1$, тобто із (29) слідує $x_{\text{opt}}\in\lim\limits_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\left[0;\,\dfrac{2hb-cg}{g^2}-\varepsilon\right]$. Якщо $y<-\dfrac{b}{g}$, то $b+gy<0$ і тоді із нерівності (28) отримаємо

$$x_{\text{opt}}\geqslant\frac{h\left(b-gy\right)-cg}{g^2}. \tag{30}$$

Послідовно маємо $-gy>b$, $b-gy>2b$, $h\left(b-gy\right)-cg>2hb-cg$, $\dfrac{h\left(b-gy\right)-cg}{g^2}>\dfrac{2hb-cg}{g^2}$, і тоді із (30) слідує $x_{\text{opt}}\in\lim\limits_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\left[\dfrac{2hb-cg}{g^2}+\varepsilon;\,1\right]$. Уже маємо підмножину

$$x_{\text{opt}}\in\left\{\lim_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\left[0;\,\frac{2hb-cg}{g^2}-\varepsilon\right]\right\}\bigcap\left\{\lim_{\substack{\varepsilon>0\\ \varepsilon\to 0}}\left[\frac{2hb-cg}{g^2}+\varepsilon;\,1\right]\right\}=\left\{\frac{2hb-cg}{g^2}\right\}\subset X_{\text{opt}}. \tag{31}$$

Припустимо, що перший гравець має дві істотні стратегії x_1 та x_2. У цих двох точках визначаємо похідні:

$$\left.\frac{dW\left(x_1,\, y\right)}{dy}\right|_{y=y_{\text{opt}}}=\left.\frac{d\left(hy^2+cy+gx_1y+bx_1+k\right)}{dy}\right|_{y=y_{\text{opt}}}=2hy_{\text{opt}}+c+gx_1=-\frac{2hb}{g}+c+gx_1=\frac{g^2x_1+cg-2hb}{g}=r_1, \tag{32}$$

$$\left.\frac{dW\left(x_2,\, y\right)}{dy}\right|_{y=y_{\text{opt}}}=\left.\frac{d\left(hy^2+cy+gx_2y+bx_2+k\right)}{dy}\right|_{y=y_{\text{opt}}}=2hy_{\text{opt}}+c+gx_2=-\frac{2hb}{g}+c+gx_2=\frac{g^2x_2+cg-2hb}{g}=r_2. \tag{33}$$

Імовірності $P\left(x_1\right)=P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right)$ і $P\left(x_2\right)=P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right)$ знаходимо з рівняння [9, 10, 11]

$$P\left(x_1\right)r_1+P\left(x_2\right)r_2=P\left(x_1\right)r_1+\left[1-P\left(x_1\right)\right]r_2=0. \tag{34}$$

Підставляючи праві частини виразів (32) та (33) у це рівняння, отримуємо:

$$P\left(x_1\right)\frac{g^2x_1+cg-2hb}{g}+\left[1-P\left(x_1\right)\right]\frac{g^2x_2+cg-2hb}{g}=P\left(x_1\right)gx_1-P\left(x_1\right)gx_2+\frac{g^2x_2+cg-2hb}{g}=$$

$$= P\left(x_1\right) g\left(x_1 - x_2\right) + \frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g} = 0, \tag{35}$$

$$P\left(x_1\right) = \frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g^2\left(x_2 - x_1\right)}. \tag{36}$$

Будемо покладати, що $x_2 > x_1$. Оскільки стратегії x_1 та x_2 повинні задовольняти нерівності

$$0 \leqslant \frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g^2\left(x_2 - x_1\right)} \leqslant 1, \tag{37}$$

то має виконуватись нерівність

$$g^2 x_2 + cg - 2hb \leqslant g^2\left(x_2 - x_1\right), \tag{38}$$

з якої випливає

$$g^2 x_2 + cg - 2hb - g^2 x_2 + g^2 x_1 = cg - 2hb + g^2 x_1 \leqslant 0 \tag{39}$$

та умова $x_1 \leqslant \frac{2hb - cg}{g^2}$. Крім того, оскільки $g^2\left(x_2 - x_1\right) > 0$, то $g^2 x_2 + cg - 2hb > 0$ та, значить, $x_2 > \frac{2hb - cg}{g^2}$. Таким чином, $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2}\right]$, $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1\right]$, імовірність $P\left(x_1\right)$ обчислюється за (36), а

$$P\left(x_2\right) = 1 - P\left(x_1\right) = 1 - \frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g^2\left(x_2 - x_1\right)} = \frac{2hb - g^2 x_1 - cg}{g^2\left(x_2 - x_1\right)}. \tag{40}$$

Легко бачити, що $P\left(\frac{2hb - cg}{g^2}\right) = 1$, тобто $\left\{\left\{\frac{2hb - cg}{g^2}, x_2\right\}, \{1, 0\}\right\} \subset \mathscr{X}_{\text{opt}}$, а $x_{\text{opt}} = \frac{2hb - cg}{g^2}$ є чистою оптимальною стратегією для першого гравця. Отже, розв'язком гри у даному випадку є множина

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{\left\{x_1, x_2\right\}, \left\{\frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g^2\left(x_2 - x_1\right)}, \frac{2hb - g^2 x_1 - cg}{g^2\left(x_2 - x_1\right)}\right\}\right\}, \left\{-\frac{b}{g}\right\}, \frac{b\left(hb - cg\right)}{g^2} + k\right\}, \tag{41}$$

де чисті стратегії першого гравця $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2}\right]$ та $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1\right]$.

Варіант 2.1.1.1.2.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$; $2hb - g\left(c + g\right) \geqslant 0$. Тут уже $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right)$ і все ще $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} > -\frac{b}{g}$, тобто має місце подвійна нерівність (23). З урахуванням того, що $W\left(0, -\frac{b}{g}\right) = W\left(1, -\frac{b}{g}\right)$, мінімумом функції (13) на сегменті Y є

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} W\left(x, y\right) = \min\left\{\min_{y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right]} W\left(0, y\right), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} W\left(1, y\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y \in \left[0; -\frac{b}{g}\right]} \left(hy^2 + cy + k\right), \min_{y \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]} \left(hy^2 + cy + gy + b + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{W\left(0, 0\right), W\left(0, -\frac{b}{g}\right)\right\}, W\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right)\right\} = \min\left\{W\left(0, -\frac{b}{g}\right), W\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{W\left(1, -\frac{b}{g}\right), W\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right)\right\} = W\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) = b + k - \frac{\left(c + g\right)^2}{4h} = W\left(1, -\frac{c + g}{2h}\right) = V_{\text{opt}}. \tag{42}$$

Цей мінімум досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{ -\frac{c+g}{2h} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}$. Ясно, що коренем відповідного рівняння (8) є $x_1 = 1$. Тому $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$ та розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \left\{ -\frac{c+g}{2h} \right\}, b + k - \frac{(c+g)^2}{4h} \right\}$.

Варіант 2.1.1.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\frac{c}{2h} > 1 \geqslant -\frac{b}{g}$, то із (17) слідує умова $2hb - cg > 0$. Згідно з (22) знак виразу $2hb - g(c+g)$ і тут визначає приналежність точки $y_{\min}^{\langle 1 \rangle}$ напівсегменту $\left[-\frac{b}{g}; 1 \right)$.

Варіант 2.1.1.2.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$; $2hb - g(c+g) < 0$. Маємо нерівності (23) й $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} < -\frac{b}{g}$, звідки випливає нерівність (18). Тому справедливими є мінімум (24) та $Y_{\text{opt}} = \left\{ -\frac{b}{g} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}$. Цілком зрозуміло, що у такому варіанті розв'язком гри є множина (41), де $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2} \right]$ та $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1 \right]$.

Варіант 2.1.1.2.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$. Маємо нерівність (23) й $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} \in \left[-\frac{b}{g}; 1 \right)$, тобто має місце (42), де $Y_{\text{opt}} = \left\{ -\frac{c+g}{2h} \right\} = \left\{ y_{\text{opt}} \right\}$, звідки $X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \left\{ -\frac{c+g}{2h} \right\}, b + k - \frac{(c+g)^2}{4h} \right\}$.

Варіант 2.1.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$. Тут $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} = -\frac{c+g}{2h} < 0$, а знаки виразів $2h + c$ та $2hb - cg$ визначають положення точки $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\frac{c}{2h}$ відносно сегмента $\left[0; -\frac{b}{g} \right]$.

Варіант 2.1.2.1.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg \leqslant 0$. Мають місце подвійна нерівність $W\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) < W(1, 0) < W(1, 1)$ та $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} \in \left(0; -\frac{b}{g} \right]$, звідки випливають (19) — (21). Тому множина $X_{\text{opt}} = \{0\}$, а розв'язком гри є множина $\mathscr{S} = \left\{ \{0\}, \left\{ -\frac{c}{2h} \right\}, k - \frac{c^2}{4h} \right\}$.

Варіант 2.1.2.1.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$. Тут маємо $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} < 0$ й $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} > -\frac{b}{g}$, звідки дістаємо розв'язок гри у виді множини (41), де $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2} \right]$ та $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1 \right]$.

Варіант 2.1.2.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c < 0$. При такому варіанті буде $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} < 0$ й $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} > 1$, звідки знову розв'язком гри є множина (41), де $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2} \right]$ та $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1 \right]$.

Варіант 2.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b < 0$. Оскільки $-\frac{b}{g} > 1$, а $gy + b < 0$ при $y < -\frac{b}{g}$, то максимум ядра (2)

$$\max_{x \in X} W(x, y) = \max_{x \in X} \left(hy^2 + cy + gxy + bx + k \right) = \max \left\{ W(0, y), W(1, y) \right\} =$$
$$= \max \left\{ hy^2 + cy + k,\ hy^2 + cy + gy + b + k \right\} = hy^2 + cy + k = W(0, y). \tag{43}$$

Ясно, що мінімум параболи (43) на сегменті Y залежить від того, чи $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\frac{c}{2h} \in [0; 1]$.

Варіант 2.2.1. $g > 0$, $b < 0$; $g + b < 0$; $2h + c \geqslant 0$. Тут $y_{\min}^{\langle 0 \rangle} = -\frac{c}{2h} \in (0; 1]$, тому мінімум параболи

(43)

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\, y) = \min_{y\in Y} W(0,\, y) = \min_{y\in Y}\left(hy^2 + cy + k\right) = W\left(0,\, y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) = k - \frac{c^2}{4h} = W\left(0,\, -\frac{c}{2h}\right) = V_{\text{opt}} \tag{44}$$

досягається на $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{c}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\}$. З рівняння (21) маємо $X_{\text{opt}} = \{0\}$ і розв'язок $\mathscr{S} = \left\{\{0\},\, \left\{-\frac{c}{2h}\right\},\, k - \frac{c^2}{4h}\right\}$.

Варіант 2.2.2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b < 0$; $2h + c < 0$. Тут $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{c}{2h} > 1$, тому мінімум параболи (43)

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\, y) = \min_{y\in Y} W(0,\, y) = \min_{y\in Y}\left(hy^2 + cy + k\right) =$$

$$= \min\left\{W(0,\, 0),\, W(0,\, 1)\right\} = \min\left\{k,\, h + c + k\right\} = h + c + k = W(0,\, 1) = V_{\text{opt}} \tag{45}$$

досягається на $Y_{\text{opt}} = \{1\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\}$. Коренем відповідного даному варіанту рівняння (7)

$$V_{\text{opt}} = h + c + k = W(0,\, 1) = h + c + gx + bx + k = W(x,\, 1) = W\left(x,\, y_{\text{opt}}\right) \tag{46}$$

є знову $x_1 = 0$. Тому $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{0\},\, \{1\},\, h + c + k\right\}$.

Варіант 3. $g < 0$, $b > 0$. Максимум ядра (2) на X по x визначається знаком виразу $g + b$.

Варіант 3.1. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$. Так як $-\frac{b}{g} \in (0;\, 1]$ і $gy + b > 0$ при $y < -\frac{b}{g}$, то максимумом ядра (2) на X по x є функція

$$\max_{x\in X} W(x,\, y) = \max\left\{W(0,\, y),\, W(1,\, y)\right\} = \begin{cases} W(1,\, y) = hy^2 + cy + gy + b + k,\ y \in \left[0;\, -\frac{b}{g}\right], \\ W(0,\, y) = hy^2 + cy + k,\ y \in \left[-\frac{b}{g};\, 1\right]. \end{cases} \tag{47}$$

Для цього варіанта $y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{c}{2h} > 0$, $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c+g}{2h} > 0$, а також із (16) слідує $y_{\min}^{\langle 1\rangle} - y_{\min}^{\langle 0\rangle} = -\frac{g}{2h} > 0$. Але, мінімізуючи $W(1,\, y)$ на сегменті $\left[0;\, -\frac{b}{g}\right]$, необхідно знати чи $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c+g}{2h} \in \left[0;\, -\frac{b}{g}\right]$. Для цього будемо враховувати різницю (22) між $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ та значенням $-\frac{b}{g}$.

Варіант 3.1.1. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c + g) \geqslant 0$. З формули (22) випливає, що $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \leqslant -\frac{b}{g}$ при $2hb - g(c + g) \geqslant 0$, тому з урахуванням подвійної нерівності

$$W\left(0,\, y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) < W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right) = W\left(1,\, -\frac{b}{g}\right) < W(0,\, 1) \tag{48}$$

та першої нерівності у формулі (18) мінімум функції (47) по змінній y на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{b}{g}\right]} W(1,\, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\, 1\right]} W(0,\, y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\, 1\right]}\left(hy^2 + cy + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{W\left(1,\, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right),\, \min\left\{W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right),\, W(0,\, 1)\right\}\right\} = \min\left\{W\left(1,\, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right),\, W\left(0,\, -\frac{b}{g}\right)\right\} =$$

$$= W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = b + k - \frac{(c+g)^2}{4h} = W\left(1, -\frac{c+g}{2h}\right) = V_{\text{opt}} \tag{49}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{c+g}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\}$. Ясно, що множина $X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{1\}, \left\{-\frac{c+g}{2h}\right\}, b + k - \frac{(c+g)^2}{4h}\right\}$.

Варіант 3.1.2. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$. З нерівності $2hb - g(c+g) < 0$ випливає, що $-\frac{b}{g} < -\frac{c+g}{2h} = y_{\min}^{\langle 1\rangle}$. Тепер треба знати, чи $y_{\min}^{\langle 0\rangle} \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]$, а це визначається (17), тобто знаком виразу $2hb - cg$.

Варіант 3.1.2.1.1. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$; $2hb - cg \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$. Із нерівностей (17) і $2h + c \geqslant 0$ слідує, що $y_{\min}^{\langle 0\rangle} \in \left[-\frac{b}{g}; 1\right]$. Користуючись нерівністю

$$W(1, 0) > W\left(1, -\frac{b}{g}\right) > W\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) \tag{50}$$

та рівністю в (48), отримуємо мінімум функції (47) по змінній y на сегменті Y:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{b}{g}\right]} W(1, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g}; 1\right]} W(0, y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g}; 1\right]}\left(hy^2 + cy + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{W(1, 0), W\left(1, -\frac{b}{g}\right)\right\}, W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)\right\} = \min\left\{W\left(1, -\frac{b}{g}\right), W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)\right\} =$$

$$= W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) = k - \frac{c^2}{4h} = W\left(0, -\frac{c}{2h}\right) = V_{\text{opt}}. \tag{51}$$

Мінімум (51) досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{c}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\}$. Ясно, що множина $X_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок $\mathscr{S} = \left\{\{0\}, \left\{-\frac{c}{2h}\right\}, k - \frac{c^2}{4h}\right\}$.

Варіант 3.1.2.1.2. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$; $2hb - cg \leqslant 0$; $2h + c < 0$. Тут буде $y_{\min}^{\langle 0\rangle} > 1$ та $y_{\min}^{\langle 1\rangle} > 1$. Відповідні нерівності

$$W\left(0, -\frac{b}{g}\right) > W(0, 1) > W\left(0,\ y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right) \tag{52}$$

та (50) дають

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{b}{g}\right]} W(1, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g}; 1\right]} W(0, y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0; -\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g}; 1\right]}\left(hy^2 + cy + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{W(1,\,0),\,W\left(1,\,-\frac{b}{g}\right)\right\},\,\min\left\{W\left(0,\,-\frac{b}{g}\right),\,W(0,\,1)\right\}\right\} = \min\left\{W\left(1,\,-\frac{b}{g}\right),\,W(0,\,1)\right\} =$$

$$= W(0,\,1) = h + c + k = V_{\text{opt}}\,. \tag{53}$$

Ясно, що у даному варіанті мають місце $Y_{\text{opt}} = \{1\}$, рівняння (46), $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{0\},\,\{1\},\,h + c + k\}$.

Варіант 3.1.2.2. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c + g) < 0$; $2hb - cg > 0$. Із нерівності (17) слідує, що $y_{\min}^{\langle 0\rangle} < -\frac{b}{g}$, тобто мають місце подвійні нерівності (48) і (50). Тому мінімум функції (47) по y на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} W(x,\,y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{b}{g}\right]} W(1,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\,1\right]} W(0,\,y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{b}{g}\right]}\left(hy^2 + cy + gy + b + k\right),\ \min_{y\in\left[-\frac{b}{g};\,1\right]}\left(hy^2 + cy + k\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{W(1,\,0),\,W\left(1,\,-\frac{b}{g}\right)\right\},\,\min\left\{W\left(0,\,-\frac{b}{g}\right),\,W(0,\,1)\right\}\right\} = \min\left\{W\left(1,\,-\frac{b}{g}\right),\,W\left(0,\,-\frac{b}{g}\right)\right\} =$$

$$= W\left(1,\,-\frac{b}{g}\right) = W\left(0,\,-\frac{b}{g}\right) = \frac{b(hb - cg)}{g^2} + k = V_{\text{opt}} \tag{54}$$

досягається на $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{b}{g}\right\} = \{y_{\text{opt}}\}$. Тут розв'язком є (41), де $x_1 \in \left[0;\,\frac{2hb - cg}{g^2}\right]$ та $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2};\,1\right]$.

Варіант 3.2. $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$. Маємо $-\frac{b}{g} > 1$, тому максимумом ядра (2) на X по x є функція (3). Далі необхідно визначати істинність приналежності $y_{\min}^{\langle 1\rangle} \in [0;\,1]$.

Варіант 3.2.1. $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$; $2h + c + g \geqslant 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c + g}{2h} \in (0;\,1]$, то мають місце (6) і (8), звідки $X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\,\left\{-\frac{c + g}{2h}\right\},\,b + k - \frac{(c + g)^2}{4h}\right\}$.

Варіант 3.2.2. $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$; $2h + c + g < 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{c + g}{2h} > 1$, то із очевидної нерівності $W(1,\,0) > W(1,\,1) > W\left(1,\,y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)$ отримуємо (9), (10) та розв'язок $\mathscr{S} = \{\{1\},\,\{1\},\,h + c + g + b + k\}$.

Варіант 4. $g < 0$, $b < 0$. Очевидно, що має місце (43), і далі усе визначається тим, чи $y_{\min}^{\langle 0\rangle} \in [0;\,1]$.

Варіант 4.1. $g < 0$, $b < 0$; $2h + c \geqslant 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 0\rangle} \in (0;\,1]$, то маємо мінімум (44), що досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{c}{2h}\right\} = \{y_{\text{opt}}\}$. Тому $X_{\text{opt}} = \{0\}$ і розв'язок $\mathscr{S} = \left\{\{0\},\,\left\{-\frac{c}{2h}\right\},\,k - \frac{c^2}{4h}\right\}$.

Варіант 4.2. $g < 0$, $b < 0$; $2h + c < 0$. Оскільки $y_{\min}^{\langle 0\rangle} > 1$, то із очевидної подвійної нерівності $W(0,\,0) > W(0,\,1) > W\left(0,\,y_{\min}^{\langle 0\rangle}\right)$ отримуємо (45), множину $Y_{\text{opt}} = \{1\}$, (46), множину $X_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{0\},\,\{1\},\,h + c + k\}$.

Висновок

Розглянуті 20 варіантів співвідношень коефіцієнтів ядра (2) можна згрупувати за отриманими розв'язками та представити у вигляді табл. 1:

Таблиця 1

Розв'язки строго випуклої гри з ядром (2) при $c < 0$

Варіанти співвідношень коефіцієнтів ядра	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{ \mathscr{X}_{\mathrm{opt}}, \mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}, V_{\mathrm{opt}} \right\}$
1. $g > 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g \geqslant 0$ 2. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 3. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 4. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 5. $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$; $2h + c + g \geqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \left\{ -\dfrac{c+g}{2h} \right\}, b + k - \dfrac{(c+g)^2}{4h} \right\}$
6. $g > 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g < 0$ 7. $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$; $2h + c + g < 0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \{1\}, h + c + g + b + k \right\}$
8. $g > 0$, $b > 0$; $c + g > 0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{1\}, \{0\}, b + k \right\}$
9. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg \leqslant 0$ 10. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg \leqslant 0$ 11. $g > 0$, $b < 0$; $g + b < 0$; $2h + c \geqslant 0$ 12. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$; $2hb - cg \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$ 13. $g < 0$, $b < 0$; $2h + c \geqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{0\}, \left\{ -\dfrac{c}{2h} \right\}, k - \dfrac{c^2}{4h} \right\}$

Варіанти співвідношень коефіцієнтів ядра	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$
14. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$; $2hb - g(c+g) < 0$ 15. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$; $2hb - g(c+g) < 0$ 16. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$ 17. $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g > 0$; $2h + c < 0$ 18. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$; $2hb - cg > 0$	$\mathscr{S} = \left\{\left\{\{x_1, x_2\}, \left\{\frac{g^2 x_2 + cg - 2hb}{g^2(x_2 - x_1)}, \frac{2hb - g^2 x_1 - cg}{g^2(x_2 - x_1)}\right\}\right\}, \left\{-\frac{b}{g}\right\}, \frac{b(hb - cg)}{g^2} + k\right\},$ де $x_1 \in \left[0; \frac{2hb - cg}{g^2}\right]$, $x_2 \in \left(\frac{2hb - cg}{g^2}; 1\right]$
19. $g > 0$, $b < 0$; $g + b < 0$; $2h + c < 0$ 20. $g < 0$, $b < 0$; $2h + c < 0$ 21. $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) < 0$; $2hb - cg \leqslant 0$; $2h + c < 0$	$\mathscr{S} = \{\{0\}, \{1\}, h + c + k\}$

Долучимо до отриманих розв'язків результати роботи [5] і складемо загальний розв'язок строго випуклої неперервної антагоністичної гри з ядром (2) при довільних ненульових коефіцієнтах c, g та b (табл. 2).

Таблиця 2

Розв'язки строго випуклої гри з ядром (2)

Варіанти співвідношень коефіцієнтів ядра	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$
1. $c < 0$, $g > 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g \geqslant 0$ 2. $c < 0$, $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c \geqslant 0$; $2hb - cg > 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 3. $c < 0$, $g > 0$, $b < 0$; $g + b \geqslant 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c < 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 4. $c < 0$, $g < 0$, $b > 0$; $b + g \leqslant 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$ 5. $c < 0$, $g < 0$, $b > 0$; $b + g > 0$; $2h + c + g \geqslant 0$ 6. $c > 0$, $g < 0$, $b > 0$; $c + g \leqslant 0$; $2h + c + g \geqslant 0$; $2hb - g(c+g) \geqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{1\}, \left\{-\frac{c+g}{2h}\right\}, b + k - \frac{(c+g)^2}{4h}\right\}$

Варіанти співвідношень коефіцієнтів ядра	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$
7. $c<0$, $g>0$, $b>0$; $c+g\leqslant 0$; $2h+c+g<0$ 8. $c<0$, $g<0$, $b>0$; $b+g>0$; $2h+c+g<0$ 9. $c>0$, $g<0$, $b>0$; $g+b>0$; $c+g\leqslant 0$; $2h+c+g<0$	$\mathscr{S} = \{\{1\}, \{1\}, h+c+g+b+k\}$
10. $c<0$, $g>0$, $b>0$; $c+g>0$ 11. $c>0$, $b>0$; $c+g>0$	$\mathscr{S} = \{\{1\}, \{0\}, b+k\}$
12. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g\leqslant 0$; $2h+c\geqslant 0$; $2hb-cg\leqslant 0$ 13. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g>0$; $2h+c\geqslant 0$; $2hb-cg\leqslant 0$ 14. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b<0$; $2h+c\geqslant 0$ 15. $c<0$, $g<0$, $b>0$; $b+g\leqslant 0$; $2hb-g(c+g)<0$; $2hb-cg\leqslant 0$; $2h+c\geqslant 0$ 16. $c<0$, $g<0$, $b<0$; $2h+c\geqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{0\}, \left\{-\frac{c}{2h}\right\}, k-\frac{c^2}{4h}\right\}$
17. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g\leqslant 0$; $2h+c\geqslant 0$; $2hb-cg>0$; $2hb-g(c+g)<0$ 18. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g\leqslant 0$; $2h+c<0$; $2hb-g(c+g)<0$ 19. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g>0$; $2h+c\geqslant 0$; $2hb-cg>0$ 20. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b\geqslant 0$; $c+g>0$; $2h+c<0$ 21. $c<0$, $g<0$, $b>0$; $b+g\leqslant 0$; $2hb-g(c+g)<0$; $2hb-cg>0$ 22. $c>0$, $g<0$, $b>0$; $g+b\leqslant 0$; $c+g\leqslant 0$; $2hb-g(c+g)<0$	$\mathscr{S} = \left\{\left\{\{x_1, x_2\}, \left\{\frac{g^2x_2+cg-2hb}{g^2(x_2-x_1)}, \frac{2hb-g^2x_1-cg}{g^2(x_2-x_1)}\right\}\right\}, \left\{-\frac{b}{g}\right\}, \frac{b(hb-cg)}{g^2}+k\right\}$, де $x_1 \in \left[0; \frac{2hb-cg}{g^2}\right]$, $x_2 \in \left(\frac{2hb-cg}{g^2}; 1\right]$

Варіанти співвідношень коефіцієнтів ядра	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{ \mathscr{X}_{\mathrm{opt}}, \mathscr{Y}_{\mathrm{opt}}, V_{\mathrm{opt}} \right\}$
23. $c<0$, $g>0$, $b<0$; $g+b<0$; $2h+c<0$ 24. $c<0$, $g<0$, $b<0$; $2h+c<0$ 25. $c<0$, $g<0$, $b>0$; $b+g \leqslant 0$; $2hb-g(c+g)<0$; $2hb-cg \leqslant 0$; $2h+c<0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{0\}, \{1\}, h+c+k \right\}$
26. $c>0$, $b<0$	$\mathscr{S} = \left\{ \{0\}, \{0\}, k \right\}$

Отже, досліджена строго випукла гра має сім видів розв'язку. Кожен із них може бути визначений за одним із 25 співвідношень коефіцієнтів ядра (2) цієї гри, що представлені у табл. 2. Тому найпростіші процеси підприємницької конкурентної активності [13], котрі описуватимуться строго випуклою неперервною антагоністичною грою з ядром (2), за представленими розв'язками стабілізуються в умовах чесної конкуренції.

Література

1. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

2. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.

3. Популярные лекции по математике. Выпуск 32. Вентцель Е. С. Элементы теории игр. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. — 67 с.

4. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики: Пер. с франц. — М.: Мир, 1985. — 199 с.: ил.

5. Романюк В. В. П'ять видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випуклої гри // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету "Наука й економіка". — Випуск 1 (13), 2009. — С. 151 — 162.

6. Романюк В. В. Базові вісім співвідношень для шести видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випуклої гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2009. — № 1. — С. 261 — 268.

7. Романюк В. В. Три базових співвідношення для трьох видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випукло-вгнутої гри // Всеукраїнський науково-виробничий журнал "Інноваційна економіка". — № 4 (10), 2008. — С. 166 — 172.

8. Романюк В. В. Вісім базисних співвідношень для семи видів розв'язку однієї неперервної антагоністичної строго випукло-вгнутої гри // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2009. — № 1. — С. 226 — 234.

9. Романюк В. В. Чотири опорних співвідношення для чотирьох видів розв'язку однієї строго випуклої неперервної антагоністичної гри // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2008. — № 1. — С. 169 — 174.

10. Romanuke V. V. The 12 situations in the kernel of a continuous strictly convex antagonistic game and the nine game solution forms // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей IX Международной научно-технической конференции. — Пенза: РИО ПГСХА, 2008. — С. 247 — 257.

11. Romanuke V. V. The nine solution forms of a continuous strictly convex-concave antagonistic game // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2008. — № 5. — Т. 3. — С. 30 — 37.

12. Romanuke V. V. The figured 10 subcases of the coefficients interrelationships in the kernel of a continuous strictly convex antagonistic game with the corresponding six types of the solution // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету "Наука й економіка". — Випуск 2 (14), 2009. — С. 308 — 326.

13. Охорзин В. А. Оптимизация экономических систем. Примеры и алгоритмы в среде Mathcad: Учеб. пособие. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 144 с.

Надійшла 11.06.2009