

оптимальний варіант розвитку даного регіону, який сприятиме досягненню сталого розвитку. Запропонований алгоритм може бути основою для побудови економіко-математичної моделі сталого розвитку регіону.

Література

1. Программа действий. Повестка дня на 21 век. Принята Конференцией ООН по окружающей среде и развитию, Рио-де-Жанейро, 3-14 июня 1992 года. [Электронный ресурс] – Режим доступа: <http://www.un.org/russian/conferen/wssd/agenda21>.
2. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: Словарь современной экономической науки. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Дело, 2003. — 520 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://slovari.yandex.ru/dict/lopatnikov/article/lop/lop-1754.htm>.
3. Кобелев Н.Б. Основы имитационного моделирования сложных экономических систем. – М.: Дело, 2003. – 236 с.
4. Устойчивое развитие: теория, методология, практика: учебник / под ред. проф. Л.Г. Мельника. – Сумы: Университетская книга, 2009. – 1230 с.
5. Згуровський М.З. Україна в глобальних вимірах сталого розвитку /М.З. Згуровський // Дзеркало тижня. – 2006. – № 19 (598).

Надійшла 14.03.2010

УДК 330.42

О. В. ЦУКАНОВ, К. А. ЧЕРНОМОРЧЕНКО

Севастопольський національний технічний університет

ІДЕНТИФІКАЦІЯ ХАРАКТЕРНИХ ТОЧОК НА КРИВІЙ ЖИТТЄВОГО ЦИКЛУ ТОВАРІВ ЧЕРЕЗ СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЮ

У статті наведено аналіз існуючих математичних моделей життєвого циклу товару. Запропоновано нову математичну модель, що дозволяє враховувати характерні точки життєвого циклу, яку було побудовано за допомогою сплайн-апроксимації. Наведено результати її практичного застосування для опису життєвого циклу високотехнологічного товару.

Analysis of product lifecycle's mathematical models is presented. A new mathematical model is introduced, which includes product lifecycle's characteristic points. This model was obtained by spline approximation of experimental data. Results of modelling hi-tech product's lifecycle are presented.

Ключові слова: маркетинговий набір, життєвий цикл товару, характерні точки, «S»-крива, математична модель, сплайн-апроксимація.

Постановка проблеми

Маркетингова діяльність підприємства довгий час розглядалася лише як окрема функція стратегічного менеджменту, завдяки якій були можливі збір та обробка інформації для подальшої розробки, визначення та реалізації стратегій.

Сучасна концепція керування змінила ставлення до маркетингу. Сьогодні він є основою стратегічного менеджменту компанії, що дає можливість постійного моніторингу ринку і забезпечує, таким чином, більш гнучку, швидко адаптацію підприємства до зовнішнього середовища.

Одним із засобів здійснення стратегій фірм є пропозиції, що стосуються чотирьох елементів комплексу маркетингового набору, або «4Р»: товару, ціни, просування й методів розповсюдження [2]. Як вважає американський фахівець із маркетингу Ф. Котлер, «товар – перший і найважливіший елемент комплексу маркетингу» [2].

Слід звернути увагу на те, що товар можна розглядати з декількох позицій: статичної, або його безпосередніх характеристик, і динамічної, тобто життєвого циклу [1].

Маркетинговий набір виступає не тільки як інструмент регулювання життєвого циклу залежно від стадії розвитку, але й багато в чому визначається етапом розвитку продукту. Знаходження товару на тій або іншій стадії життєвого циклу багато в чому визначає вибір цілей і стратегій, форм і методів керування створенням і реалізацією продукту, управлінські та інформаційні схеми.

Таким чином, життєвий цикл товару є одним з основних інструментів планування діяльності підприємства, що висуває особливі вимоги до його математичної моделі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

У 1950-70 рр. вийшла безліч теоретичних і практичних робіт, присвячених вивченню життєвого циклу товару. Дослідники пропонували найрізноманітнішу кількість стадій, границі їхнього розбиття й види кривих.

Так, у 1959 р. Д. Р. Форрестер запропонував для опису життєвого циклу товару використовувати

«S»-криву, яка потім стала вважатися класичною кривою. Учений розділив її на чотири стадії: впровадження, зростання, зрілості та спаду. У 1966 р. Р. Базелл визначив, що буває кілька різновидів стадії зрілості. У 1967 р. виходить стаття У. Кокса, у якій було наведено ще п'ять різновидів життєвого циклу товару, крім уже відомого. Автор указував, що життєві цикли 28,3% досліджуваних ім товарів можуть бути описані «S»-кривою. Пізніше, у 1974 р., Ч. Уоссон виявив ще дев'ять різновидів життєвого циклу товару. У 1981 р., а потім – ще раз у 1986 р., було представлено п'ятнадцять різновидів життєвого циклу товару, однак вони не були практично перевірені. У 1986 р. вийшла робота, присвячена аналізу життєвих циклів товарів довгострокового вживання для дому за період 1922-1978 рр. [10]. Автори встановили, що 50% товарів мають традиційну «S»-криву життєвого циклу, а інші можуть бути описані п'ятьма іншими типами моделей. В одному з найпопулярніших підручників маркетингу – «Основи маркетингу» Ф. Котлера – автор приводить шість різновидів життєвого циклу, крім класичного [2].

Сьогодні у теорії маркетингу життєвий цикл товару прийнято описувати «S»-кривою, що складається із чотирьох стадій: впровадження (або виведення на ринок), зростання, зрілість і спад [2].

Етапом виведення на ринок є період повільного зростання обсягу продажів у міру виходу товару на ринок. На цій стадії компанії витрачають значні кошти на виведення самого продукту на ринок, тому прибутку немає. Для етапу зростання характерне збільшення обсягу продажів за рахунок швидкого сприйняття споживачами товару, а отже – прибутку. На стадії зрілості продукт уже добився сприйняття більшістю потенційних покупців, що зумовлює вповільнення обсягу продажів, стабілізацію або падіння обсягів продажів, зниження прибутку та вихід продукту з ринку. Отже, момент переходу з одного етапу на інший є вкрай важливим, тому що менеджерам компанії необхідно грамотно планувати обсяги інвестицій і виробництва, матеріали, чисельність торговельного персоналу, дистрибуцію, маркетингові й рекламні заходи.

Крива життєвого циклу товару описується обмеженою кількістю математичних моделей: поліномами до четвертого степеня, експонентною та логістичною (див. [7]). Між тим, у статті американських дослідників (див. [4]) наведено близько 15 математичних моделей, проте більшість із них не заслуговують на інтерес, тому що представляють із себе різновиди класичної кривої.

Найчастіше як у вітчизняних, так і в закордонних дослідженнях прийнято для опису життєвого циклу товару приводити логістичну математичну модель. На думку авторів, вона має декілька недоліків: по-перше, у неї немає максимуму, отже, неможливо знайти «піковий» обсяг продажів; по-друге, наявність горизонтальної асимптоти дозволяє описати лише перші три стадії. Моделі, що розроблені на базі логістичної, наприклад, модель У. Кокса, мають ті ж самі недоліки. У статті румунських учених [6] згадується про дослідження, що було проведено їхнім співвітчизником Н. А. Попом. Математичну модель життєвого циклу було описано за допомогою експоненти, вигин якої регулюється трьома параметрами. Подібна модель, через одержання першої й другої похідної функції, дозволяє знайти максимальну точку обсягу продажів, яку дослідник назвав точкою насичення, і дві симетричні їй точки перегину. У той же час, як показав досвід моделювання кривої життєвого циклу, введення більшої кількості параметрів у модель, з одного боку, дозволяє краще апроксимувати вихідні дані, але й може привести до проблем хибного вибору масштабу, взаємодії параметрів та ефекту нуля, які на практиці вирішити досить складно. Також варто вказати на високу ймовірність появи проблеми «перенавчання» даних, що зумовлено невеликим розміром вибірок, які, як правило, характеризують розвиток товару.

Головним недоліком усіх вищевказаних математичних моделей, який обмежує їх застосування у прогнозуванні, є те, що за їх допомогою неможливо знайти всі граничні точки стадій, які відображують зміну зростання й приросту обсягу продажів і які, таким чином, дозволяють відстежити зміну стадій. Складність знаходження цих точок полягає в тому, що експериментальні дані апроксимуються одною функцією, для якої вони не є ані точками перегину, ані точками екстремуму.

Мета дослідження

Метою цього дослідження є побудова такої математичної моделі життєвого циклу товару, яка б дозволяла визначити граничні точки стадій, що характеризують зміни зростання та приросту обсягів продажів, і її практична перевірка.

Опис характерних точок кривої життєвого циклу товару

Основою для розробки нової кривої життєвого циклу є класична модель.

Американськими вченими П. Голдером і Д. Теллісом було запропоновано для опису початку й закінчення перших двох стадій – впровадження й зростання – виділяти такі точки [5]:

1. Комерціалізації – це момент часу, коли товар було продано вперше.
2. Зльоту – момент переходу з першої стадії на другу. Перший ріст обсягу продажів. Точка зльоту обсягу продажів позначає критичну точку переходу зі стадії впровадження на стадію зростання.
3. Уповільнення – момент переходу із другої стадії на третю. Визначається обсягом продажів, що повільно зростає або убиває.

Важливим також є те, що авторам не вдалося виявити статті, які присвячені аналізу стадії спаду, що характеризується різним темпом падіння обсягів продажів: спочатку різким, а потім поступовим і повільним, що наближається до осі ОХ. Таким чином, у рамках цієї роботи стаття спаду розбивається на два

етапи: різкого спаду й загасання, а точку, їх поділяючу, можна назвати точкою спаду.

Якщо розглядати стадію зрілості більш докладно, то слід відзначити, що вона може бути охарактеризована спочатку поступовим зростанням обсягу продажів, а потім – спадом. Точку, що розділяє спад стадії зрілості та наступну стадію, назвемо точкою вповільнення 2, і, відповідно, момент переходу із другої стадії на третю – точкою вповільнення 1. Важливою також є точка, що характеризує максимальний обсяг продажів товару, яку можна назвати точкою зрілості.

Виходячи з цих припущень, можна побудувати нову, уточнену, криву життєвого циклу товару, яку представлено на Малюнку 1.

Опис теоретичних допущень щодо математичної моделі

Для побудови кривої життєвого циклу товару було обрано апроксимацію регресійної залежності за допомогою сплайн-техніки, що дозволяє описувати функцію за стадіями.

Оскільки основним критерієм розбиття життєвого циклу товару за стадіями є зміна приросту, то необхідно буде визначити поведінку першої й другої похідних, що відповідно характеризують ріст і приріст обсягу продажів.

Серед сплайн-функцій найбільше застосування одержали кубічні, тому що, на думку ряду вчених (див., наприклад, [3], [8] або [11]), вони найкраще підходять для опису багатьох залежностей, а їх перша й друга похідні безперервні. Тому як апроксимуючу функцію виберемо кубічний сплайн.

Сплайн степеня l являє собою функцію, безперервну разом зі своїми $(l-1)$ -ми похідними, у якій похідна l -ого порядку постійна на інтервалах між заданими точками, названими вузлами [3]. До того ж, він складається із гладко склеєних у вузлах поліномів l -го степеня.

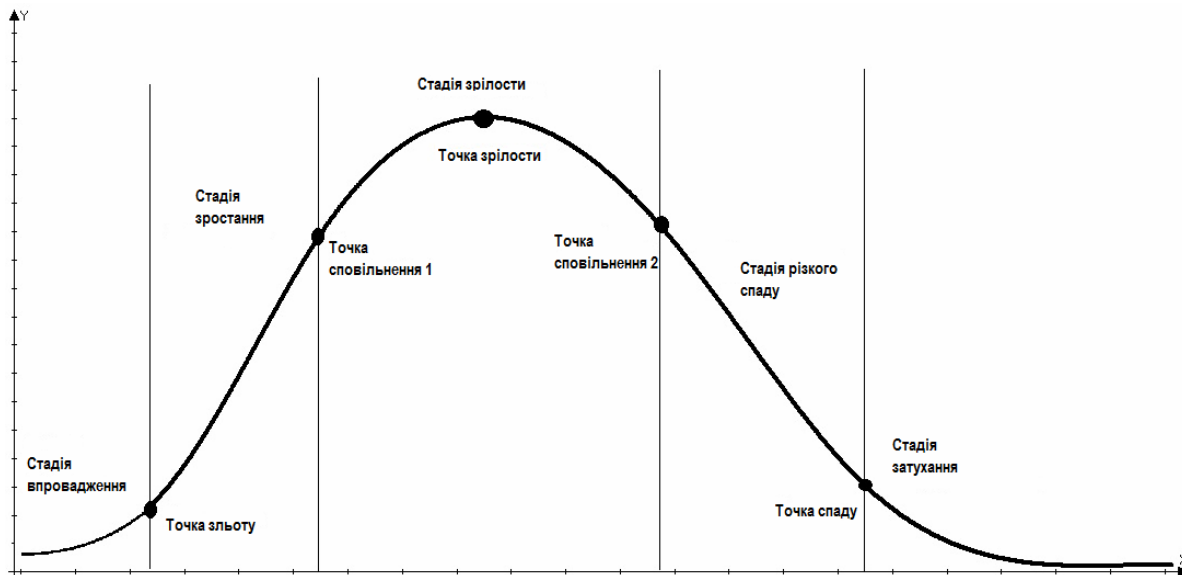


Рис. 1. Уточнена крива життєвого циклу товару

При використанні сплайна необхідно вирішити наступні завдання: знайти порядок полінома, визначити число вузлів та їх положення, обчислити коефіцієнти рівнянь.

Нехай залежна функція – це фактичний обсяг продажів товару в момент часу t_i , що позначимо як y_i , де індекс вказує момент часу й дорівнює $i = \overline{1, \dots, N}$. Незалежна змінна – це число років на ринку на момент часу i , позначимо її як t . Загальне число стадій, або інтервалів розділення, становить 5. Позначимо точки розділення інтервалів, або вузли, як t_j , при цьому $j = \overline{1, \dots, 4}$.

Отже, модель функції на деякому інтервалі k матиме наступний вигляд:

$$y_k = \alpha_{0k} + \alpha_{1k} \cdot t + \alpha_{2k} \cdot t^2 + \alpha_{3k} \cdot t^3 + m(k) + \varepsilon \quad (1)$$

де α_{0k} , α_{1k} , α_{2k} , α_{3k} – значення коефіцієнтів при незалежній змінній, які отримані за допомогою методу найменших квадратів;

$m(k)$ – рівняння сплайна на k -ому інтервалі;

ε – помилка регресії, що має нормальний закон розподілення.

Рівняння сплайна на k -ому інтервалі має наступний вигляд:

$$m(k) = \sum_{j=1}^4 \beta_j \cdot (t_i - t_j)_+^3 \quad (2)$$

Знак «+» у формулі 2 означає зрізання, яке для першого випадку може бути представлено за

допомогою наступної формули:

$$(t_i - t_j)_+^3 = \begin{cases} (t_i - t_j)^3, & \text{якщо } t_i > t_j \\ 0, & \text{якщо } t_i \leq t_j \end{cases} \quad (3)$$

Докладніше про сплайн-апроксимації можна ознайомитися в книгах [3], [8], [9] або [11].

Для оцінки якості й точності побудованої регресійної моделі використовуються такі показники, як коефіцієнт детермінації, критерії Стюдента та Фішера.

Для перевірки припущень щодо правильності розбиття кривої життєвого циклу на стадії необхідно буде знайти перші й другу похідну функцію на кожному інтервалі та проаналізувати характер її зміни.

Опис вихідних даних

З метою перевірки теоретичних припущень щодо математичної моделі та її перевірки було зібрано дані про обсяги продажів магнітофонних касет на ринку США у 1973-2007 рр.

Якщо прийняти 1964 р. за перший рік уведення касет на ринок США, то значення фактора, що впливає, у 1973 р., тобто x_1 , дорівнює 9, $x_2 = 10$ і т. д.

Опис результатів дослідження

Спочатку для вихідних даних було побудовано та оцінено класичні математичні моделі кривої життєвого циклу товару.

Потім було побудовано кубічну сплайн-регресійну модель. Візуально визначено вузли в наступних точках: $t_1 = x_7 = 15$ (1979 р.), $t_2 = x_{12} = 20$ (1984 р.), $t_3 = x_{22} = 30$ (1994 р.), $t_4 = x_{28} = 36$ (2000 р.).

Результати всіх обчислень представлено в Таблиці 1.

Таблиця 1

Результати побудови класичних математичних моделей для опису життєвого циклу товару

Назва математичної моделі	Значення коефіцієнту детермінації	Адекватність моделі	Значущість коефіцієнтів рівняння
Поліном 2-го степеня	0,776	адекватна	усі коефіцієнти значущі
Поліном 3-го-степеня	0,797	адекватна	коефіцієнт при x^3 статистично не значущий
Поліном 4-го степеня	0,964	адекватна	усі коефіцієнти значущі
Експоненційна	0,144	адекватна	константа статистично не значуща
Логістична	0,100	неадекватна	-
Кубічна сплайн-регресійна	0,986	адекватна	усі коефіцієнти значущі

Таким чином, кубічна сплайн-регресійна модель найточніше описує вихідні дані. Незважаючи на досить велике значення коефіцієнта детермінації полінома четвертого степеня, він також, як і інші функції, не дозволяє враховувати характер зміни зростання й приросту обсягу продажів, які є досить відмінними для кожної стадії життєвого циклу товару.

Графіки вихідних значень, кубічної сплайн-функції та її першої й другої похідних представлено на рис. 2.

Порожнім кружком позначено графік вихідних значень, штрих-пунктиром – кубічну сплайн-функцію, тонкою суцільною лінією – першу похідну, штрихом – другу.

Перша похідна перетинає вісь Ox у точці максимуму, тобто відповідає максимальному обсягу продажів у 1989 р. Зміна знаку похідної з «+» на «-» свідчить про зміну зростання обсягу продажів: спочатку обсяг продажів зростає до точки екстремума, а потім – убуває.

Перетин графіка другої похідної з віссю Ox свідчить про зміну зростання обсягу продажів, а також про зміну знака приросту: у точці вповільнення 1 відбувається його убування, а в точці вповільнення 2 – зростання.

Зміна нахилу кривої другої похідної відбувається у візуально обраних вузлах і означає, що ці точки є локальними екстремумами. Якщо приріст до вузла зростає, а потім убуває, то це – точка максимуму. Або мінімуму, якщо навпаки. Таким чином, аналітично можна довести наявність двох характерних точок на кривій життєвого циклу: зльоту й спаду.

Висновки

У цій роботі запропоновано для побудови математичної моделі життєвого циклу товару використовувати кубічну сплайн-функцію, що дозволяє точніше описувати зміну динаміки обсягів продажів у часі.

Точку зльоту товаром було досягнуто у 1979 р. Точку вповільнення 1 життєвого циклу товару було досягнуто у 1984 р., тобто через рік після уведення на ринок компакт-дисків. На момент проходження точки вповільнення 2, тобто 1994 р., компакт-диск досяг стадії зростання. Точка спаду життєвого циклу касети – 2000 р., коли компакт-диск досяг точки вповільнення 2, а на ринку все більшу популярність завойовує цифрова музика, розповсюджувана через Інтернет.

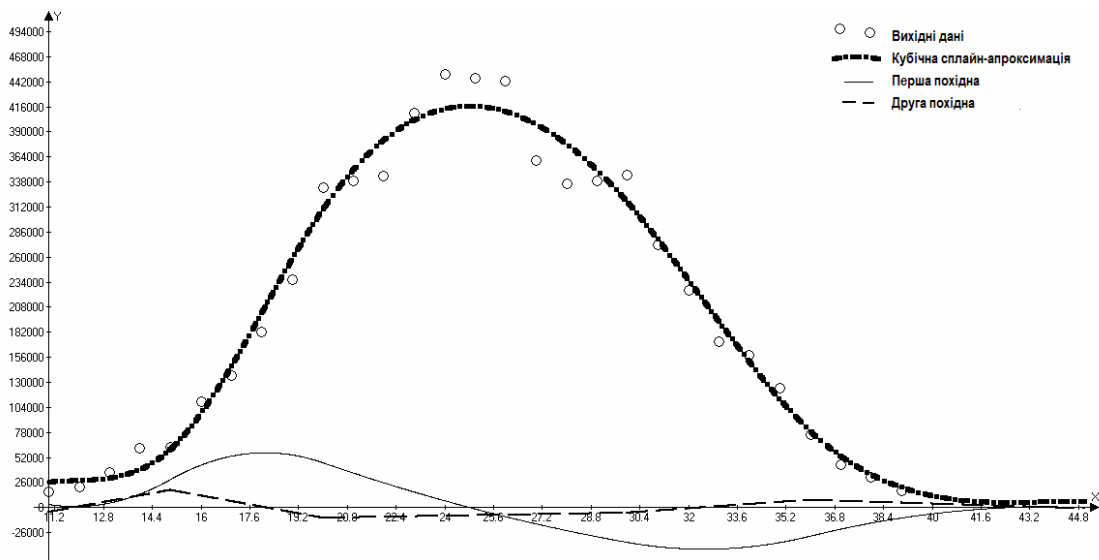


Рис.2. Графіки вихідних значень, кубічної сплайн-функції, її першої та другої похідних

Подібне «кусове» розбиття функції надзвичайно важливе з погляду управління, тому що правильне визначення стадії життєвого циклу товару багато в чому зумовлює подальше планування діяльності компанії: навчання споживачів, проведення різних маркетингових заходів, своєчасне впровадження інновацій та вивід товару з ринку, удосконалювання виробничих процесів, посилення або зменшення конкуренції, зниження прибутку й обсягу продажів тощо.

Чотири точки розбиття стадій життєвого циклу товару в першу чергу характеризують зміну зростання й приросту обсягу продажів, але дві з них не є точками перегину і їх не можна аналітично визначити через дослідження функції. Саме тому сплайн-регресійна модель є найоптимальнішою, тому що поводження її похідних на кожному інтервалі дозволяє виявити будь-які зміни.

Перспективи подальших досліджень

Подальші дослідження будуть спрямовані на подолання обмежень запропонованої моделі. По-перше, на залежну змінну на практиці впливає безліч факторів, а не один. По-друге, саму модель необхідно перевірити для опису більшої кількості класів товарів. По-третє, у рамках статті обсяг продажів був узятий у натуральних одиницях виміру, тобто модель необхідно перевірити для обсягу продажів у грошовому вираженні.

Література

1. Виханский О. С. Стратегическое управление. – М.: Гардарики, 1998. – 296 с.
2. Котлер Ф. Основы маркетинга. Краткий курс. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2007. – 656 с.
3. Прикладная статистика: Исследование зависимостей: Справ. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
4. Crompton, J. L., Reid, I. S. and M. Uysal. Empirical identification of product life-cycle patterns in the delivery of municipal park and recreation services. *Journal of Park and Recreation Administration*, Vol. 5, No. 1, Spring 1987, pp. 17-34.
5. Golder, P. N. and Tellis, G. J. Growing, Growing, Gone: Cascades, Diffusion, and Turning Points in the Product Life Cycle. *Marketing Science*, 2004, 23(2), pp. 207-218.
6. Isaic-Maniu, A. and Vodă, V. G. On a model regarding the product life cycle. *Management & Marketing* (2008) Vol. 3, No. 3, pp. 87-96.
7. Meenaghan, J. A. and P. J. P. O'Sullivan. The shape and length of the product life cycle. *Irish Marketing review*, Vol. 1, spring 1986, pp. 83-102.
8. Montgomery, D. C., Peck, E. A., and Vining, G. G. 2001. *Introduction to Linear Regression Analysis*, 3rd edn. New York, NY: JohnWiley&Sons.
9. Paulson, D. S. 2007. *Handbook of regression and modeling: applications for clinical and pharmaceutical industries*. 1st edn. Chapman & Hall/CRC.
10. Schultz, S. R. and Rao, S. R. Product Life Cycles of Durable Goods for the Home. *Journal of the Academy of Marketing Science*, Spring, 1986, Vol. 14, No. 1, pp. 7-12.
11. Suits, D. B., Mason, A. and Chan, L. Spline functions fitted by standard regression methods. *The Review of Economics and Statistics*, Vol. 60, No. 1 (Feb., 1978), pp. 132-139.

Надійшла 14.03.2010