УДК 519.832.4

В. В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

РОЗБИТТЯ НА 13 ВИПАДКІВ ПАРАМЕТРІВ ОДНІЄЇ СТРОГО ОПУКЛО-ВГНУТОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ ГРИ ТА ОТРИМАННЯ ШЕСТИ ВИДІВ ЇЇ РОЗВ'ЯЗКУ

Досліджено одну строго опукло-вгнуту антагоністичну гру, ядро якої задається на одиничному квадраті. Цю гру розв'язано за допомогою розбиття на 13 випадків знаків групи коефіцієнтів ядра та їх співвідношень у ядрі. Шість відсортованих видів розв'язку гри представлено у відповідній таблиці. Кожен з шести отриманих видів розв'язку складається із виключно чистих оптимальних стратегій гравців.

There has been investigated a strictly convex-concave antagonistic game, which kernel is defined on the unit square. That game has been solved with the fragmentation into 13 cases of signs of the group of the kernel coefficients and their correlations in the kernel. The six sorted out solution types of the game have been represented within the corresponding table. Each of the six obtained solution types consists of exceptionally pure optimal strategies of the players.

Ключові слова: опукло-вгнута антагоністична гра, ядро гри, одиничний квадрат, вид розв'язку гри.

Опис задачі та формулювання завдання дослідження

Одним з найбільш простих шляхів дослідження та прогнозування конфліктно-керованих техніко-економічних систем є ігрове математичне моделювання [1 — 3]. Задача про конкуренцію двох фірм на двох ринках збуту, котра полягає у знаходженні раціонального інвестування у кожен ринок для кожної фірми [1], є основною, й у загальному виді ця задача вирішується на основі розв'язків строго опукло-вгнутої антагоністичної гри з довільним ядром [2, 3]. Будемо розглядати поверхню

$$S(x, y) = ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k \tag{1}$$

з параметрами $b > 0$, $g > 0$, $g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ і константою $k \in \mathbb{R}$. Нехай ця поверхня є ядром антагоністичної строго опукло-вгнутої гри, що задається на одиничному квадраті

$$D_S = X \times Y = [0;1] \times [0;1], \tag{2}$$

де $x \in X = [0;1]$ та $y \in Y = [0;1]$ є чистими стратегіями, а одиничні сегменти $X = [0;1]$ та $Y = [0;1]$ — множинами чистих стратегій першого та другого гравців відповідно. Зауважимо, що оскільки гра є строго опуклою, то $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} > 0$, звідки $\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$, тобто коефіцієнт $h > 0$. До того ж, для строго вгнутої гри $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} < 0$, звідки $\frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x^2} = 2a < 0$, тобто коефіцієнт $a < 0$. Тому завданням цього дослідження є визначення розв'язку $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$ неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри з ядром (1) при вказаних його параметрах, де $\mathscr{X}_{\text{opt}}$ та $\mathscr{Y}_{\text{opt}}$ є множинами оптимальних стратегій першого та другого гравців відповідно, а V_{opt} є значенням гри.

Знаходження усіх розв'язків заданої неперервної антагоністичної строго опукло-вгнутої гри

Випадок 1. $b > 0$, $g > 0$, $c > 0$. Максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x залежить від того, чи глобальний максимум ядра (1) по змінній x належить сегменту X. Перша похідна ядра (1) по змінній x

$$\frac{\partial}{\partial x} S(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k\right) = 2ax + b + gy \tag{3}$$

перетворюється у нуль у стаціонарній точці $x = x_{\text{cr}} = -\frac{b + gy}{2a}$. Оскільки

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} S(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(ax^2 + bx + gxy + cy + hy^2 + k\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2ax + b + gy\right) = 2a < 0\,, \tag{4}$$

то ця точка є точкою глобального максимуму $x = x_{\max} = x_{\mathrm{cr}} = -\dfrac{b+gy}{2a}$ ядра (1) по змінній x. Точка $x_{\max} \geqslant 0$ при $-\dfrac{b+gy}{2a} \geqslant 0$, $b+gy \geqslant 0$, звідки $y \geqslant -\dfrac{b}{g}$. З іншого боку, точка $x_{\max} \leqslant 1$, якщо $-\dfrac{b+gy}{2a} \leqslant 1$, $2a+b+gy \leqslant 0$, звідки $y \leqslant -\dfrac{2a+b}{g}$. Але тут $-\dfrac{b}{g} < 0$ і тому $x_{\max} \geqslant 0 \quad \forall\, y \in Y$. Значення $-\dfrac{2a+b}{g} < 1$ при $2a+b+g > 0$ та $-\dfrac{2a+b}{g} > 0$ при $2a+b < 0$. Тоді точка $-\dfrac{2a+b}{g} \in (0;\,1)$.

Випадок 1. $b > 0$, $g > 0$, $c > 0$; **1.** $2a+b \leqslant 0$; **1.** $2a+b+g > 0$. Оскільки $-\dfrac{2a+b}{g} \in [0;\,1)$, то $x_{\max} \leqslant 1$ при $y \leqslant -\dfrac{2a+b}{g}$, й $a+b+gy > 0$ при $y > -\dfrac{a+b}{g}$, де виконується

$$0 < -\frac{a+b}{g} < -\frac{2a+b}{g} < 1. \tag{5}$$

Тоді, враховуючи, що $S(0,\, y) < S(1,\, y)$ при $y > -\dfrac{a+b}{g}$, максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є функція

$$\max_{x \in X} S(x,\, y) = \begin{cases} S(x_{\max},\, y) = S\left(-\dfrac{b+gy}{2a},\, y\right),\ y \in \left[0;\, -\dfrac{2a+b}{g}\right], \\ \max\left\{S(0,\, y),\, S(1,\, y)\right\} = S(1,\, y) = a+b+gy+cy+hy^2+k,\ y \in \left[-\dfrac{2a+b}{g};\, 1\right]. \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що

$$\begin{aligned} S(x_{\max},\, y) &= S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right) = a\frac{(b+gy)^2}{4a^2} - b\frac{b+gy}{2a} - gy\frac{b+gy}{2a} + cy + hy^2 + k = -\frac{(b+gy)^2}{4a} + cy + hy^2 + k = \\ &= -\frac{b^2}{4a} - \frac{bg}{2a}y + cy - \frac{g^2}{4a}y^2 + hy^2 + k = y^2\frac{4ah-g^2}{4a} + y\frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k, \end{aligned} \tag{7}$$

а також виконується рівність

$$S\left(x_{\max},\, -\frac{2a+b}{g}\right) = S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, -\frac{2a+b}{g}\right) = S\left(1,\, -\frac{2a+b}{g}\right). \tag{8}$$

Так як $\dfrac{4ah-g^2}{4a} > 0$, то парабола (7) має точку глобального мінімуму. Перша похідна функції $S(x_{\max},\, y)$ по змінній y

$$\frac{d}{dy}S(x_{\max},\, y) = \frac{d}{dy}S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right) = \frac{d}{dy}\left(y^2\frac{4ah-g^2}{4a} + y\frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k\right) = \frac{4ah-g^2}{2a}y + \frac{2ac-bg}{2a} \tag{9}$$

перетворюється у нуль у стаціонарній точці $y = y_{\mathrm{cr}} = \dfrac{bg-2ac}{4ah-g^2}$, а оскільки

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dy^2}S(x_{\max},\, y) &= \frac{d^2}{dy^2}S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right) = \frac{d^2}{dy^2}\left(y^2\frac{4ah-g^2}{4a} + y\frac{2ac-bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k\right) = \\ &= \frac{d}{dy}\left(\frac{4ah-g^2}{2a}y + \frac{2ac-bg}{2a}\right) = \frac{4ah-g^2}{2a} > 0, \end{aligned} \tag{10}$$

то ця точка є точкою глобального мінімуму $y = y_{\min} = y_{\mathrm{cr}} = \dfrac{bg-2ac}{4ah-g^2}$ параболи (7). Проте тут точка

$y_{\min} = \dfrac{bg - 2ac}{4ah - g^2} < 0$, тому для параболи $S(x_{\max}, y)$ у даному випадку має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(x_{\max}, y_{\min}) = S\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) < S(x_{\max}, 0) = S\left(-\frac{b+gy}{2a}, 0\right) = S\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) < S\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right). \quad (11)$$

Тепер визначимо точку глобального мінімуму $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ параболи $S(1, y)$ та з'ясуємо, чи вона належить сегменту $\left[-\dfrac{2a+b}{g}; 1\right]$. Перша похідна параболи $S(1, y)$ по змінній y

$$\frac{d}{dy} S(1, y) = \frac{d}{dy}\left(a + b + gy + cy + hy^2 + k\right) = g + c + 2hy \quad (12)$$

перетворюється у нуль у стаціонарній точці $y_{\mathrm{cr}}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{g+c}{2h}$. Оскільки друга похідна параболи $S(1, y)$

$$\frac{d^2}{dy^2} S(1, y) = \frac{d^2}{dy^2}\left(a + b + gy + cy + hy^2 + k\right) = \frac{d}{dy}\left(g + c + 2hy\right) = 2h > 0, \quad (13)$$

то ця точка є точкою глобального мінімуму $y = y_{\min}^{\langle 1\rangle} = y_{\mathrm{cr}}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{g+c}{2h}$ параболи $S(1, y)$, причому

$$S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = S\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a + b + g\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + c\left(-\frac{g+c}{2h}\right) + h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2 + k = a + b - \frac{(g+c)^2}{4h} + k. \quad (14)$$

Проте для точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\dfrac{g+c}{2h} < 0$ параболи $S(1, y)$ на сегменті $\left[-\dfrac{2a+b}{g}; 1\right]$ має місце параболічна потрійна нерівність

$$S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = S\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) < S(1, 0) < S\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) < S(1, 1). \quad (15)$$

Звідси мінімум функції (6), яка, фактично, є параболою, на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} S(x, y) = \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{2a+b}{g}\right]} S(x_{\max}, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\, 1\right]} S(1, y)\right\} =$$

$$= \min\left\{\min\left\{S\left(-\frac{b+gy}{2a}, 0\right), S\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\}, \min\left\{S\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), S(1, 1)\right\}\right\} =$$

$$= \min\left\{S\left(-\frac{b+gy}{2a}, 0\right), S\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\} = S\left(-\frac{b+gy}{2a}, 0\right) = S\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) = k - \frac{b^2}{4a} = V_{\mathrm{opt}} \quad (16)$$

досягається у точці $y = y_{\mathrm{opt}} = 0$, тобто на множині оптимальних чистих стратегій другого гравця $Y_{\mathrm{opt}} = \{0\} = \{y_{\mathrm{opt}}\}$. Тоді множина $\mathscr{Y}_{\mathrm{opt}} = Y_{\mathrm{opt}}$. Множину оптимальних чистих стратегій першого гравця X_{opt} спочатку намагаються визначити за коренями x_1 та x_2 квадратного рівняння [1 — 3]

$$V_{\mathrm{opt}} = S(x, y_{\mathrm{opt}}). \quad (17)$$

Для даного випадку коренями відповідного рівняння (17)

$$V_{\mathrm{opt}} = S\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) = k - \frac{b^2}{4a} = ax^2 + bx + k = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} + k - \frac{b^2}{4a} =$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + k - \frac{b^2}{4a} = S(x,\, 0) = S(x,\, y_{\text{opt}}) \tag{18}$$

є $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$, де $-\frac{b}{2a} \in (0;\, 1] \subset X$. Тому $x_1 = x_2 \in X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$. Отже, у розглянутому випадку (рис. 1) множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{\left\{-\frac{b}{2a}\right\},\, \{0\},\, k - \frac{b^2}{4a}\right\}. \tag{19}$$

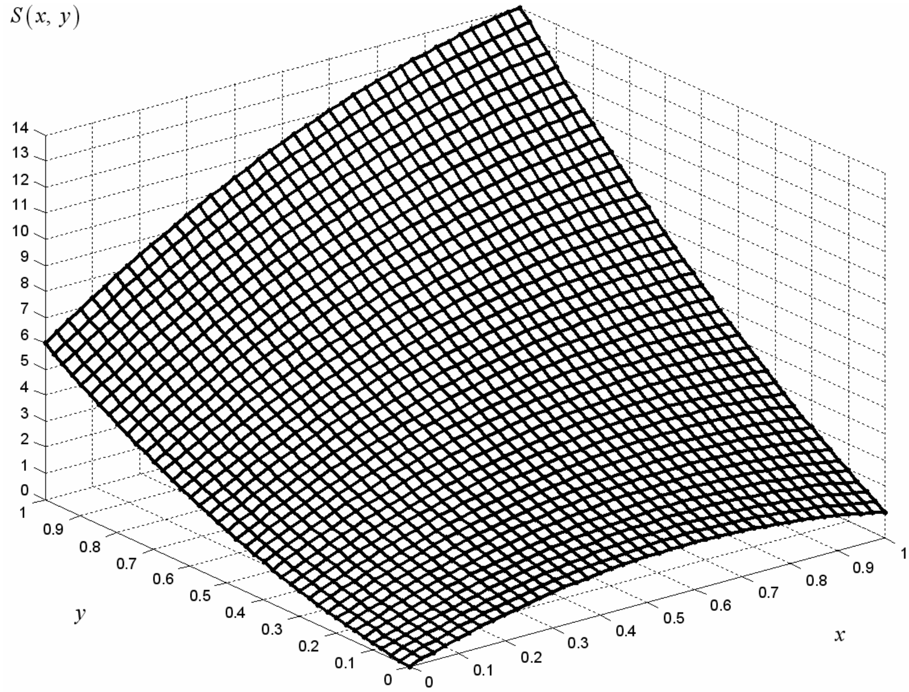

Рис. 1. Випадок $b > 0$, $g > 0$, $c > 0$, $2a + b \leqslant 0$, $2a + b + g > 0$ **у ядрі** $S(x,\, y) = -5x^2 + 6x + 7xy + 2y + 4y^2$ **строго опукло-вгнутої антагоністичної гри та її відповідний розв'язок** $\mathscr{S} = \left\{\left\{\frac{3}{5}\right\},\, \{0\},\, \frac{9}{5}\right\}$

Випадок 1. $b > 0$, $g > 0$, $c > 0$; **1.** $2a + b \leqslant 0$; **2.** $2a + b + g \leqslant 0$. Оскільки $-\frac{2a+b}{g} \geqslant 1$, то з формули (6) слідує, що максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є парабола (7)

$$\max_{x \in X} S(x,\, y) = S(x_{\max},\, y) = S\left(-\frac{b + gy}{2a},\, y\right) = y^2\frac{4ah - g^2}{4a} + y\frac{2ac - bg}{2a} - \frac{b^2}{4a} + k\,. \tag{20}$$

Але її точка мінімуму $y_{\min} = \frac{bg - 2ac}{4ah - g^2} < 0$, тому для параболи $S(x_{\max},\, y)$ у даному випадку на сегменті Y має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(x_{\max},\, y_{\min}) = S\left(-\frac{b + gy}{2a},\, \frac{bg - 2ac}{4ah - g^2}\right) < S(x_{\max},\, 0) =$$
$$= S\left(-\frac{b + gy}{2a},\, 0\right) = S\left(-\frac{b}{2a},\, 0\right) < S(x_{\max},\, 1) = S\left(-\frac{b + g}{2a},\, 1\right). \tag{21}$$

Відповідно цьому мінімум параболи (20) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} S(x,\, y) = \min_{y\in[0;\,1]} S(x_{\max},\, y) = \min\left\{S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, 0\right),\, S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, 1\right)\right\} =$$
$$= \min\left\{S\left(-\frac{b}{2a},\, 0\right),\, S\left(-\frac{b+g}{2a},\, 1\right)\right\} = S\left(-\frac{b}{2a},\, 0\right) = k - \frac{b^2}{4a} = V_{\text{opt}} \quad (22)$$

знову досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. А далі із відповідного рівняння (18) відразу слідує розв'язок (19) цієї гри.

Випадок 1. $b > 0$, $g > 0$, $c > 0$; **2.** $2a + b > 0$. Тут уже точка $-\frac{2a+b}{g} < 0$, звідки випливає $y > -\frac{2a+b}{g}$, $-\frac{b+gy}{2a} > 1$ та $x_{\max} > 1$. Тоді має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(0,\, y) < S(1,\, y) < S(x_{\max},\, y) = S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y\right), \quad (23)$$

а з неї вже слідує те, що максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є парабола $S(1,\, y)$:

$$\max_{x\in X} S(x,\, y) = \max\{S(0,\, y),\, S(1,\, y)\} = S(1,\, y) = a + b + gy + cy + hy^2 + k\,. \quad (24)$$

Оскільки для точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle} = -\frac{g+c}{2h} < 0$ параболи $S(1,\, y)$ на сегменті Y має місце параболічна подвійна нерівність

$$S\left(1,\, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right) = S\left(1,\, -\frac{g+c}{2h}\right) < S(1,\, 0) < S(1,\, 1)\,, \quad (25)$$

то мінімум параболи (24) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} S(x,\, y) = \min_{y\in Y} S(1,\, y) = \min\{S(1,\, 0),\, S(1,\, 1)\} = S(1,\, 0) = a + b + k = V_{\text{opt}} \quad (26)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (17)

$$V_{\text{opt}} = S(1,\, 0) = a + b + k = ax^2 + bx + k = a(x-1)\left(x + \frac{a+b}{a}\right) + a + b + k = S(x,\, 0) = S(x,\, y_{\text{opt}}) \quad (27)$$

є $x_1 = 1$ та $x_2 = -\frac{a+b}{a}$. Проте $2a + b > 0$ означає те, що $-\frac{a+b}{a} > 1$, і тоді $x_1 \in X$, $x_2 \notin X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{1\}$. Отже, множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$, а розв'язком гри для даного випадку (рис. 2) є множина

$$\mathscr{S} = \{\{1\},\, \{0\},\, a + b + k\}\,. \quad (28)$$

Випадок 2. $b > 0$, $g > 0$, $c < 0$. Тут максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x також залежить від сум $2a + b$ та $2a + b + g$.

Випадок 2. $b > 0$, $g > 0$, $c < 0$; **1.** $2a + b \leqslant 0$; **1.** $2a + b + g \geqslant 0$. Оскільки $-\frac{2a+b}{g} \in [0;\, 1]$, то $x_{\max} \leqslant 1$ при $y \leqslant -\frac{2a+b}{g}$. Тоді, враховуючи, що $S(0,\, y) < S(1,\, y)$ при $y > -\frac{a+b}{g}$, максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є функція (6). Точка $y_{\min} = \frac{bg - 2ac}{4ah - g^2} \geqslant 0$ при $bg - 2ac \leqslant 0$. Для того, щоб визначити, чи належить точка $y_{\min}$ сегменту $\left[0;\, -\frac{2a+b}{g}\right]$, знайдемо різницю між точкою $y_{\min}$ та правим кінцем цього сегмента:

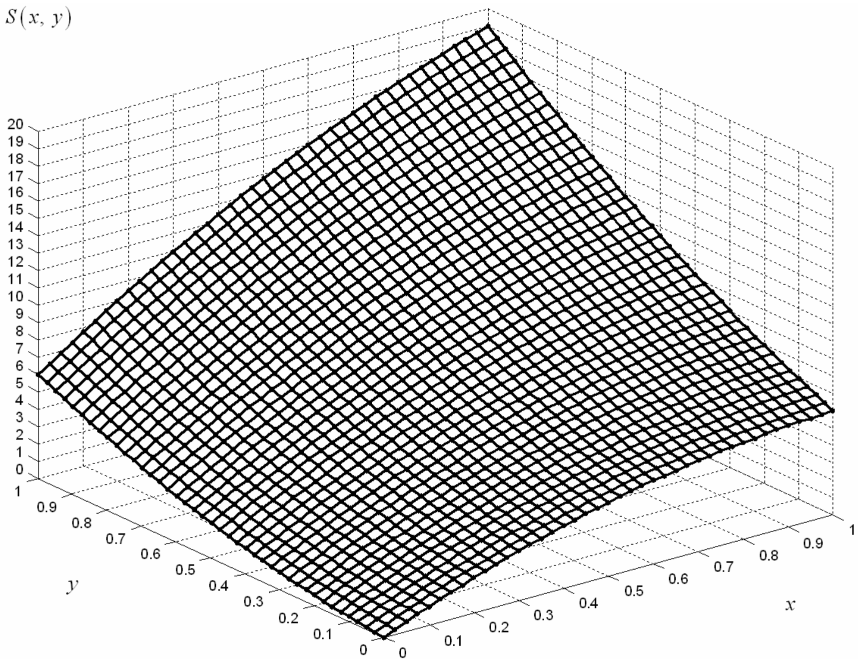

Рис. 2. Випадок $b>0$, $g>0$, $c>0$, $2a+b>0$ **у ядрі** $S(x,\ y)=-5x^2+11x+7xy+2y+4y^2$

строго опукло-вгнутої антагоністичної гри та її відповідний розв'язок $\mathscr{S}=\{\{1\},\ \{0\},\ 6\}$

$$y_{\min}-\left(-\frac{2a+b}{g}\right)=\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}+\frac{2a+b}{g}=\frac{bg^2-2acg+\left(4ah-g^2\right)\left(2a+b\right)}{g\left(4ah-g^2\right)}=$$

$$=\frac{2a\left(2bh-cg\right)+2a\left(4ah-g^2\right)}{g\left(4ah-g^2\right)}=\frac{2a}{g\left(4ah-g^2\right)}\left[2h\left(2a+b\right)-g\left(g+c\right)\right]. \tag{29}$$

Так як $\dfrac{2a}{g\left(4ah-g^2\right)}>0$, то з виразу (29) видно, що $y_{\min}\leqslant-\dfrac{2a+b}{g}$ при $2h\left(2a+b\right)-g\left(g+c\right)\leqslant 0$. Для того, щоб визначити, чи належить точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}=-\dfrac{g+c}{2h}$ сегменту $\left[-\dfrac{2a+b}{g};\,1\right]$, знайдемо різницю між точкою $y_{\min}^{\langle 1\rangle}$ та лівим кінцем цього сегмента:

$$y_{\min}^{\langle 1\rangle}-\left(-\frac{2a+b}{g}\right)=-\frac{g+c}{2h}-\left(-\frac{2a+b}{g}\right)=\frac{2h\left(2a+b\right)-g\left(g+c\right)}{2hg}. \tag{30}$$

Таким чином, при $2h\left(2a+b\right)-g\left(g+c\right)\leqslant 0$ точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\leqslant-\dfrac{2a+b}{g}$.

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **1.** $2a+b+g\geqslant 0$; **1.** $bg-2ac\leqslant 0$; **1.** $2h\left(2a+b\right)-g\left(g+c\right)\leqslant 0$. Оскільки для точки $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\leqslant-\dfrac{2a+b}{g}$ параболи $S\left(1,\ y\right)$ на сегменті $\left[-\dfrac{2a+b}{g};\,1\right]$ має місце параболічна подвійна нерівність

$$S\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=S\left(1,\ -\frac{g+c}{2h}\right)\leqslant S\left(1,\ -\frac{2a+b}{g}\right)<S\left(1,\ 1\right), \tag{31}$$

а точка $y_{\min}\in\left[0;\ -\dfrac{2a+b}{g}\right]$, причому

$$S\left(x_{\max},\ y_{\min}\right)=S\left(-\frac{b+gy}{2a},\ \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)=\left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2\frac{4ah-g^2}{4a}+\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\,\frac{2ac-bg}{2a}-\frac{b^2}{4a}+k=$$

$$= \frac{(bg-2ac)^2}{4a(4ah-g^2)} - \frac{(bg-2ac)^2}{2a(4ah-g^2)} - \frac{b^2}{4a} + k = -\frac{(bg-2ac)^2}{4a(4ah-g^2)} - \frac{b^2}{4a} + k =$$

$$= \frac{b^2g^2 - 4acbg + 4a^2c^2 - b^2g^2 + 4ab^2h}{4a(g^2-4ah)} + k = \frac{-cbg + ac^2 + b^2h}{g^2-4ah} + k = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k\,, \tag{32}$$

то мінімум функції (6) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} S(x,\, y) = \min\left\{ \min_{y\in\left[0;\, -\frac{2a+b}{g}\right]} S(x_{\max},\, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\, 1\right]} S(1,\, y) \right\} =$$

$$= \min\left\{ S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right),\, \min\left\{ S\left(1,\, -\frac{2a+b}{g}\right),\, S(1,\, 1)\right\}\right\} = \min\left\{ S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right),\, S\left(1,\, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{ S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right),\, S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, -\frac{2a+b}{g}\right)\right\} = S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, y_{\min}\right) =$$

$$= S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k = V_{\text{opt}} \tag{33}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Відповідне рівняння (17) має вид:

$$V_{\text{opt}} = S\left(-\frac{b+gy}{2a},\, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k =$$

$$= ax^2 + bx + gx\frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + c\frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + h\left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2 + k = S\left(x,\, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right) = S(x,\, y_{\text{opt}})\,; \tag{34}$$

$$ax^2 + bx + gx\frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + c\frac{bg-2ac}{4ah-g^2} + h\left(\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)^2 - \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} =$$

$$= ax^2 + x\frac{4abh - bg^2 + bg^2 - 2acg}{4ah-g^2} + \frac{(bcg-2ac^2)(4ah-g^2) + h(bg-2ac)^2}{(4ah-g^2)^2} + \frac{c(ac-bg)+b^2h}{4ah-g^2} =$$

$$= ax^2 + x\frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{4ahbcg - 8a^2c^2h - bcg^3 + 2ac^2g^2 + hb^2g^2 - 4ahbcg + 4a^2c^2h}{(4ah-g^2)^2} +$$

$$+ \frac{\left[c(ac-bg)+b^2h\right](4ah-g^2)}{(4ah-g^2)^2} = ax^2 + x\frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{-bcg^3 + 2ac^2g^2 + hb^2g^2 - 4a^2c^2h}{(4ah-g^2)^2} +$$

$$+ \frac{4a^2c^2h - 4abcgh + 4ab^2h^2 - ac^2g^2 + bcg^3 - b^2hg^2}{(4ah-g^2)^2} =$$

$$= ax^2 + x\frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + \frac{ac^2g^2 - 4abcgh + 4ab^2h^2}{(4ah-g^2)^2} = ax^2 + x\frac{2a(2bh-cg)}{4ah-g^2} + a\frac{(cg-2bh)^2}{(4ah-g^2)^2} =$$

$$= a\left[x^2 + 2x\frac{2bh-cg}{4ah-g^2} + \left(\frac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right)^2\right] = a\left(x + \frac{2bh-cg}{4ah-g^2}\right)^2 = 0\,. \tag{35}$$

З виразу (35) слідує, що коренями рівняння (34) є $x_1 = x_2 = \frac{cg-2bh}{4ah-g^2}$. З умови $2h(2a+b) - g(g+c) \leqslant 0$ випливає умова $4ah - g^2 \leqslant cg - 2bh$, з якої маємо $x_1 = x_2 \in X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{x_2\} = \left\{\frac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right\}$. Отже, у розглянутому випадку (рис. 3) множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{\frac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S} = \left\{ \left\{ \frac{cg-2bh}{4ah-g^2} \right\}, \left\{ \frac{bg-2ac}{4ah-g^2} \right\}, \frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah} + k \right\}. \quad (36)$$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b \leqslant 0$; **1.** $2a+b+g \geqslant 0$; **1.** $bg-2ac \leqslant 0$; **2.** $2h(2a+b)-g(g+c)>0$. Маємо точку $y_{\min} > -\frac{2a+b}{g}$, для якої має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(x_{\max}, 0) = S\left(-\frac{b}{2a}, 0\right) > S\left(x_{\max}, -\frac{2a+b}{g}\right) = S\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right) > S(x_{\max}, y_{\min}) = S\left(-\frac{b+gy}{2a}, \frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right). \quad (37)$$

Із різниці (30) випливає, що $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} > -\frac{2a+b}{g}$, причому $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} \in \left(-\frac{2a+b}{g}; 1\right]$ при $g+c+2h \geqslant 0$.

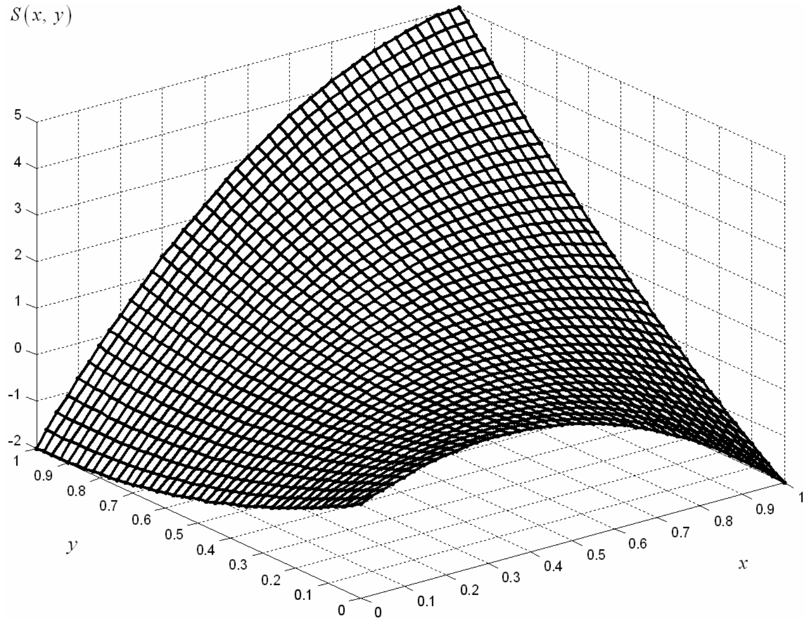

Рис. 3. Випадок $b>0$, $g>0$, $c<0$, $2a+b \leqslant 0$, $2a+b+g \geqslant 0$, $bg-2ac \leqslant 0$, $2h(2a+b)-g(g+c) \leqslant 0$ **у ядрі** $S(x, y) = -6x^2+4x+9xy-4y+2y^2$ **строго опукло-вгнутої антагоністичної гри та її відповідний розв'язок** $\mathscr{S} = \left\{ \left\{ \frac{52}{129} \right\}, \left\{ \frac{4}{43} \right\}, \frac{80}{129} \right\}$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b \leqslant 0$; **1.** $2a+b+g \geqslant 0$; **1.** $bg-2ac \leqslant 0$; **2.** $2h(2a+b)-g(g+c)>0$; **1.** $g+c+2h \geqslant 0$. Оскільки точка $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} \in \left(-\frac{2a+b}{g}; 1\right]$, то мінімум функції (6) на сегменті Y

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} S(x, y) = \min \left\{ \min_{y \in \left[0; -\frac{2a+b}{g}\right]} S(x_{\max}, y), \min_{y \in \left[-\frac{2a+b}{g}; 1\right]} S(1, y) \right\} =$$

$$= \min \left\{ \min \left\{ S\left(-\frac{b+gy}{2a}, 0\right), S\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right) \right\}, S\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) \right\} = \min \left\{ S\left(-\frac{b+gy}{2a}, -\frac{2a+b}{g}\right), S\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) \right\} =$$

$$= \min \left\{ S\left(1, -\frac{2a+b}{g}\right), S\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) \right\} = S\left(1, y_{\min}^{\langle 1 \rangle}\right) = S\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right) = a+b-\frac{(g+c)^2}{4h}+k = V_{\text{opt}} \quad (38)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{ -\frac{g+c}{2h} \right\} = \{ y_{\text{opt}} \} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Відповідне рівняння (17) має вид:

$$V_{\text{opt}}=S\left(1,-\frac{g+c}{2h}\right)=a+b-\frac{(g+c)^2}{4h}+k=ax^2+bx+gx\left(-\frac{g+c}{2h}\right)+c\left(-\frac{g+c}{2h}\right)+h\left(-\frac{g+c}{2h}\right)^2+k=$$

$$=ax^2+x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right]-c\frac{g+c}{2h}+\frac{(g+c)^2}{4h}+k=S\left(x,-\frac{g+c}{2h}\right)=S\left(x,\ y_{\text{opt}}\right); \tag{39}$$

$$ax^2+x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right]-c\frac{g+c}{2h}+\frac{(g+c)^2}{4h}-a-b+\frac{(g+c)^2}{4h}=ax^2+x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2h}\right]+\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2h}=$$

$$=a\left(x^2+x\left[\frac{2bh-g(g+c)}{2ah}\right]+\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}\right)=a(x-1)\left(x-\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}\right)=0\,. \tag{40}$$

З виразу (40) видно, що коренями рівняння (39) є $x_1=1$ та $x_2=\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}$. Але умова $2h(2a+b)-g(g+c)>0$ означає, що $0>2ah>g(g+c)-2h(a+b)$, звідки $\frac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}>1$. Тоді $x_1\in X$, $x_2\notin X$ та $X_{\text{opt}}=\{x_1\}=\{1\}$. Отже, у розглянутому випадку (рис. 4) множина $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{1\}$ та розв'язок гри

$$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\left\{-\frac{g+c}{2h}\right\},\ a+b-\frac{(g+c)^2}{4h}+k\right\}. \tag{41}$$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **1.** $2a+b+g\geqslant 0$; **1.** $bg-2ac\leqslant 0$; **2.** $2h(2a+b)-g(g+c)>0$; **2.** $g+c+2h<0$. Оскільки точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}>1$, то поряд з нерівністю (37) має місце параболічна подвійна нерівність

$$S\left(1,-\frac{2a+b}{g}\right)>S(1,1)>S\left(1,\ y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=S\left(1,-\frac{g+c}{2h}\right). \tag{42}$$

Тепер мінімум функції (6) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}S(x,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{2a+b}{g}\right]}S(x_{\max},y),\ \min_{y\in\left[-\frac{2a+b}{g};\,1\right]}S(1,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{S\left(-\frac{b+gy}{2a},0\right),S\left(-\frac{b+gy}{2a},-\frac{2a+b}{g}\right)\right\},\ \min\left\{S\left(1,-\frac{2a+b}{g}\right),S(1,1)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{S\left(-\frac{b+gy}{2a},-\frac{2a+b}{g}\right),S(1,1)\right\}=\min\left\{S\left(1,-\frac{2a+b}{g}\right),S(1,1)\right\}=$$

$$=S(1,1)=a+b+g+c+h+k=V_{\text{opt}} \tag{43}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{1\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (17)

$$V_{\text{opt}}=S(1,1)=a+b+g+c+h+k=ax^2+bx+gx+c+h+k=$$

$$=a(x-1)\left(x+\frac{a+b+g}{a}\right)+a+b+g+c+h+k=S(x,1)=S\left(x,\ y_{\text{opt}}\right) \tag{44}$$

є $x_1=1$ та $x_2=-\frac{a+b+g}{a}$. Але якщо $2a+b+g\geqslant 0$, то $-\frac{a+b+g}{a}\geqslant 1$. Тоді тут $X_{\text{opt}}=\{x_1\}=\{1\}=\mathscr{X}_{\text{opt}}$, а розв'язком гри є множина (рис. 5)

$$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\{1\},\ a+b+g+c+h+k\right\}. \tag{45}$$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **1.** $2a+b+g\geqslant 0$; **2.** $bg-2ac>0$. Тут точка

$y_{\min} = \dfrac{bg - 2ac}{4ah - g^2} < 0$, для якої має місце параболічна подвійна нерівність (11). З виразу $bg - 2ac > 0$ послідовно випливають $bg > 2ac$, $-\dfrac{b}{2a} > -\dfrac{c}{g}$, $1 \geqslant -\dfrac{b}{2a} > -\dfrac{c}{g}$, $1 > -\dfrac{c}{g}$ та $g + c > 0$. Отже, і точка $y_{\min}^{\langle 1 \rangle} = -\dfrac{g+c}{2h} < 0$, для якої має місце параболічна потрійна нерівність (15). Тому мінімумом функції (6) на сегменті Y є мінімум (16), і досягається він на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (18) є $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$, де $-\dfrac{b}{2a} \in (0;\, 1] \subset X$, звідки множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$, а розв'язком гри є множина (19).

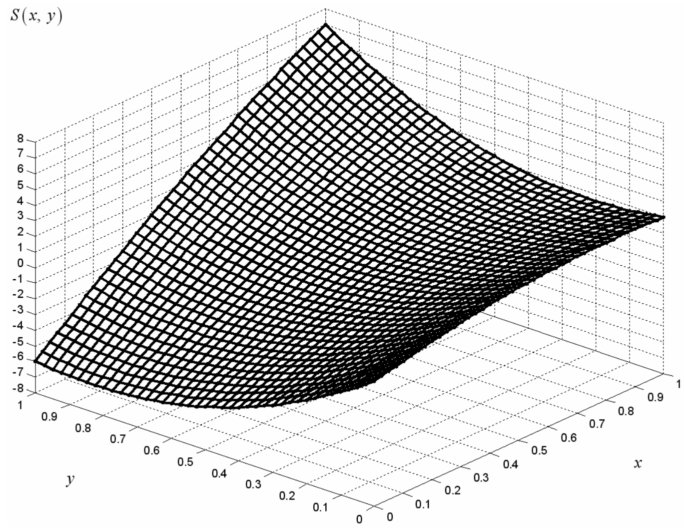

Рис. 4. Випадок $b > 0$, $g > 0$, $c < 0$, $2a + b \leqslant 0$, $2a + b + g \geqslant 0$, $bg - 2ac \leqslant 0$, $2h(2a+b) - g(g+c) > 0$, $g + c + 2h \geqslant 0$ **у ядрі** $S(x,\, y) = -3x^2 + 5x + 11xy - 15y + 9y^2$ **строго опукло-вгнутої антагоністичної гри та її відповідний розв'язок** $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \left\{\dfrac{2}{9}\right\},\, \dfrac{14}{9}\right\}$

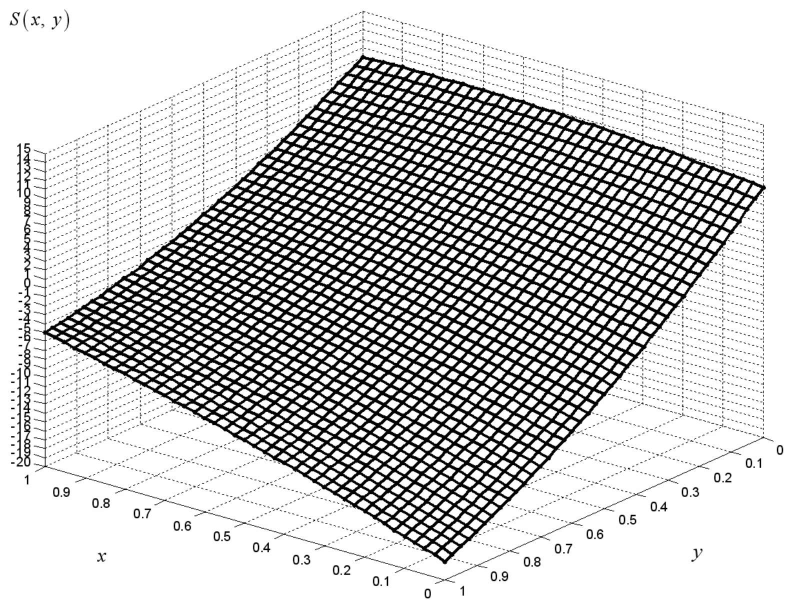

Рис. 5. Випадок $b > 0$, $g > 0$, $c < 0$, $2a + b \leqslant 0$, $2a + b + g \geqslant 0$, $bg - 2ac \leqslant 0$, $2h(2a+b) - g(g+c) > 0$, $g + c + 2h < 0$ **у ядрі** $S(x,\, y) = -3x^2 + 5x + 11xy - 35y + 9y^2 + 8$ **строго опукло-вгнутої антагоністичної гри та її відповідний розв'язок** $\mathscr{S} = \{\{1\},\, \{1\},\, -5\}$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **2.** $2a+b+g<0$. Оскільки $-\dfrac{2a+b}{g}>1$, то з формули (6) слідує, що максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є парабола (20). Точка $y_{\min}=\dfrac{bg-2ac}{4ah-g^2}\geqslant 0$ при $bg-2ac\leqslant 0$. Для того, щоб визначити, чи належить точка $y_{\min}$ сегменту $[0;1]$, знайдемо різницю між точкою $y_{\min}$ та правим кінцем цього сегмента:

$$y_{\min}-1=\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}-1=\frac{bg-2ac-4ah+g^2}{4ah-g^2}=\frac{g(b+g)-2a(c+2h)}{4ah-g^2}. \tag{46}$$

З виразу (46) видно, що $y_{\min}\leqslant 1$ при $g(b+g)-2a(c+2h)\geqslant 0$.

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **2.** $2a+b+g<0$; **1.** $bg-2ac\leqslant 0$; **1.** $g(b+g)-2a(c+2h)\geqslant 0$. Так як точка $y_{\min}\in[0;1]$, то мінімум параболи (20) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}S(x,y)=\min_{y\in[0;1]}S(x_{\max},y)=S(x_{\max},y_{\min})=S\left(-\frac{b+gy}{2a},\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right)=\frac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah}+k=V_{\text{opt}} \tag{47}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{\dfrac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Далі маємо рівняння (34) і (35), коренями яких є $x_1=x_2=\dfrac{cg-2bh}{4ah-g^2}$. З різниці (29) для точки $y_{\min}<-\dfrac{2a+b}{g}$ випливає $2h(2a+b)-g(g+c)<0$, звідки $4ah-g^2<cg-2bh$ й $x_1=x_2\in X$. Отож, у розглянутому випадку множина $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\left\{\dfrac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right\}$ та розв'язок гри представляється у вигляді множини (36).

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **2.** $2a+b+g<0$; **1.** $bg-2ac\leqslant 0$; **2.** $g(b+g)-2a(c+2h)<0$. Маємо точку $y_{\min}>1$, для якої має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(x_{\max},0)=S\left(-\frac{b}{2a},0\right)>S(x_{\max},1)=S\left(-\frac{b+g}{2a},1\right)>S(x_{\max},y_{\min})=S\left(-\frac{b+gy}{2a},\frac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right). \tag{48}$$

Тоді мінімум параболи (20) на сегменті Y

$$\begin{aligned}\min_{y\in Y}\max_{x\in X}S(x,y)&=\min_{y\in[0;1]}S(x_{\max},y)=\min\{S(x_{\max},0),S(x_{\max},1)\}=S(x_{\max},1)=\\&=S\left(-\frac{b+g}{2a},1\right)=\frac{4ah-g^2}{4a}+\frac{2ac-bg}{2a}-\frac{b^2}{4a}+k=c+h-\frac{(b+g)^2}{4a}+k=V_{\text{opt}}\end{aligned} \tag{49}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{1\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Відповідне рівняння (17) має вид:

$$V_{\text{opt}}=S\left(-\frac{b+g}{2a},1\right)=c+h-\frac{(b+g)^2}{4a}+k=ax^2+bx+gx+c+h+k=S(x,1)=S(x,y_{\text{opt}}); \tag{50}$$

$$ax^2+bx+gx+\frac{(b+g)^2}{4a}=a\left(x+\frac{b+g}{2a}\right)^2=0. \tag{51}$$

З рівняння (51) випливають корені $x_1=x_2=-\dfrac{b+g}{2a}$ рівняння (50), де $x_1=x_2\in X$, множина $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\left\{-\dfrac{b+g}{2a}\right\}$ та розв'язок гри представляється у вигляді множини (рис. 6)

$$\mathscr{S}=\left\{\left\{-\frac{b+g}{2a}\right\},\{1\},c+h-\frac{(b+g)^2}{4a}+k\right\}. \tag{52}$$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **1.** $2a+b\leqslant 0$; **2.** $2a+b+g<0$; **2.** $bg-2ac>0$. Оскільки точка $y_{\min}<0$, то для параболи $S(x_{\max}, y)$ на сегменті Y має місце параболічна подвійна нерівність (21). Тому мінімумом параболи (20) на сегменті Y є мінімум (22), що досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{0\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$, звідки далі із відповідного рівняння (18) відразу слідує розв'язок (19) такої гри.

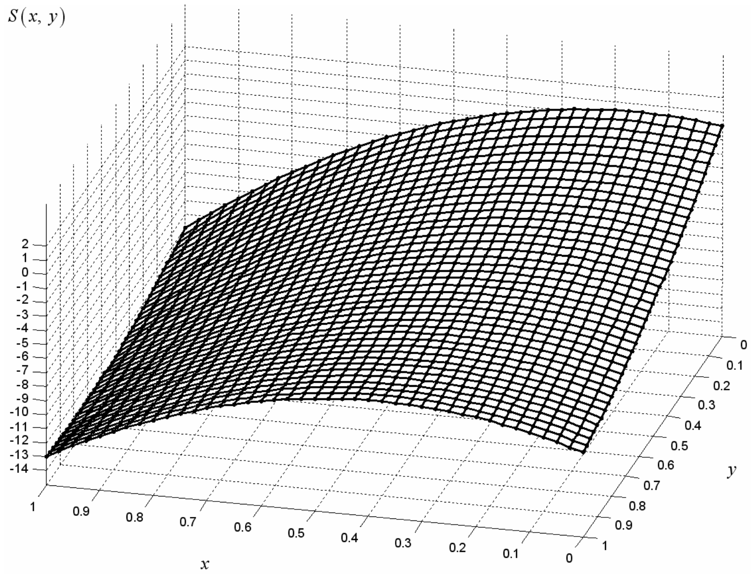

Рис. 6. Випадок $b>0$, $g>0$, $c<0$, $2a+b\leqslant 0$, $2a+b+g<0$, $bg-2ac\leqslant 0$, $g(b+g)-2a(c+2h)<0$

у ядрі $S(x, y)=-16x^2+5x+7xy-13y+4y^2$ **строго опукло-вгнутої антагоністичної гри**

та її відповідний розв'язок $\mathscr{S}=\left\{\left\{\frac{3}{8}\right\}, \{1\}, -\frac{27}{4}\right\}$

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **2.** $2a+b>0$. Оскільки точка $-\dfrac{2a+b}{g}<0$, то з нерівністю (23) очевидно, що максимумом ядра (1) на сегменті X по змінній x є парабола (24). Також очевидно, що точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\in[0;1]$ при $g+c\leqslant 0$ та $g+c+2h\geqslant 0$.

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **2.** $2a+b>0$; **1.** $g+c\leqslant 0$; **1.** $g+c+2h\geqslant 0$. Так як точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\in[0;1]$, то мінімум параболи (24) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X}S(x, y)=\min_{y\in[0;\,1]}S(1, y)=S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=S\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right)=a+b-\frac{(g+c)^2}{4h}+k=V_{\text{opt}} \qquad (53)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{-\dfrac{g+c}{2h}\right\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Далі із відповідних рівнянь (39) і (40) виписуємо їх корені $x_1=1$ та $x_2=\dfrac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}$. При співвідношенні $y_{\min}^{\langle 1\rangle}\geqslant 0>-\dfrac{2a+b}{g}$ з різниці (30) випливає, що $2h(2a+b)-g(g+c)>0$, звідки $\dfrac{g(g+c)-2h(a+b)}{2ah}>1$. Тоді $x_1\in X$, $x_2\notin X$ та $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{1\}$. Таким чином, у розглянутому випадку множина (41) є розв'язком гри.

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **2.** $2a+b>0$; **1.** $g+c\leqslant 0$; **2.** $g+c+2h<0$. Так як точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}=-\dfrac{g+c}{2h}>1$, то має місце параболічна подвійна нерівність

$$S(1, 0)>S(1, 1)>S\left(1, y_{\min}^{\langle 1\rangle}\right)=S\left(1, -\frac{g+c}{2h}\right). \qquad (54)$$

Тому мінімум параболи (24) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} S(x,\, y)=\min\left\{S(1,\, 0),\, S(1,\, 1)\right\}=S(1,\, 1)=a+b+g+c+h+k=V_{\text{opt}} \qquad (55)$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{1\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (44) є $x_1=1$ та $x_2=-\dfrac{a+b+g}{a}$. Але тут $2a+b+g>0$, то $-\dfrac{a+b+g}{a}>1$. Таким чином, множина $X_{\text{opt}}=\{x_1\}=\{1\}=\mathscr{X}_{\text{opt}}$, а розв'язком гри є множина (45).

Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; **2.** $2a+b>0$; **2.** $g+c>0$. Так як точка $y_{\min}^{\langle 1\rangle}=-\dfrac{g+c}{2h}<0$, то має місце параболічна подвійна нерівність (25), з якої виходить, що мінімумом параболи (24) на сегменті Y є мінімум (26), який досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\{0\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (27) є $x_1=1$ та $x_2=-\dfrac{a+b}{a}$, де з умови $2a+b>0$ маємо $-\dfrac{a+b}{a}>1$, $x_1\in X$, $x_2\notin X$ та $X_{\text{opt}}=\{x_1\}=\{1\}$. Отже, множина $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{1\}$, а розв'язком гри для даного випадку є множина (28).

Висновок

Розглянуті та досліджені 13 випадків знаків групи коефіцієнтів та їх співвідношень ядра (1) заданої гри можна відсортувати, виділивши у них шість видів розв'язку (рис. 1 — рис. 6), які представлені у нижченаведеній таблиці.

<table>
<tr><th>Параметри ядра строго опукло-вгнутої антагоністичної гри при $a<0$ та $h>0$</th><th>Розв'язок гри $\mathscr{S}=\left\{\mathscr{X}_{\text{opt}},\, \mathscr{Y}_{\text{opt}},\, V_{\text{opt}}\right\}$</th></tr>
<tr><td>Випадок 1. $b>0$, $g>0$, $c>0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 1. $2a+b+g>0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\},\, \{0\},\, k-\dfrac{b^2}{4a}\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 1. $b>0$, $g>0$, $c>0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 2. $2a+b+g\leqslant 0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 1. $2a+b+g\geqslant 0$; 2. $bg-2ac>0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\},\, \{0\},\, k-\dfrac{b^2}{4a}\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 2. $2a+b+g<0$; 2. $bg-2ac>0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 1. $b>0$, $g>0$, $c>0$; 2. $2a+b>0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\, \{0\},\, a+b+k\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 2. $2a+b>0$; 2. $g+c>0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 1. $2a+b+g\geqslant 0$;
1. $bg-2ac\leqslant 0$; 1. $2h(2a+b)-g(g+c)\leqslant 0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\left\{\dfrac{cg-2bh}{4ah-g^2}\right\},\, \left\{\dfrac{bg-2ac}{4ah-g^2}\right\},\, \dfrac{c(ac-bg)+b^2h}{g^2-4ah}+k\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 2. $2a+b+g<0$;
1. $bg-2ac\leqslant 0$; 1. $g(b+g)-2a(c+2h)\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 1. $2a+b+g\geqslant 0$;
1. $bg-2ac\leqslant 0$; 2. $2h(2a+b)-g(g+c)>0$; 1. $g+c+2h\geqslant 0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\, \left\{-\dfrac{g+c}{2h}\right\},\, a+b-\dfrac{(g+c)^2}{4h}+k\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 2. $2a+b>0$; 1. $g+c\leqslant 0$; 1. $g+c+2h\geqslant 0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 1. $2a+b+g\geqslant 0$;
1. $bg-2ac\leqslant 0$; 2. $2h(2a+b)-g(g+c)>0$; 2. $g+c+2h<0$</td><td rowspan="2">$\mathscr{S}=\left\{\{1\},\, \{1\},\, a+b+g+c+h+k\right\}$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 2. $2a+b>0$; 1. $g+c\leqslant 0$; 2. $g+c+2h<0$</td></tr>
<tr><td>Випадок 2. $b>0$, $g>0$, $c<0$; 1. $2a+b\leqslant 0$; 2. $2a+b+g<0$;
1. $bg-2ac\leqslant 0$; 2. $g(b+g)-2a(c+2h)<0$</td><td>$\mathscr{S}=\left\{\left\{-\dfrac{b+g}{2a}\right\},\, \{1\},\, c+h-\dfrac{(b+g)^2}{4a}+k\right\}$</td></tr>
</table>

Таким чином, кожен з шести отриманих видів розв'язку складається із виключно чистих оптимальних стратегій гравців. Перспектива подальших досліджень у даному напрямку полягає в ускладненні загальної форми ядра антагоністичної гри і знаходженні відповідних розв'язків, що більш адекватно моделюватиме реальні конфліктно-керовані техніко-економічні системи.

Література

1. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

2. Романюк В. В. Випукла гра на одиничному квадраті з ядром типу квадратичної форми / В. В. Романюк // Наука й економіка. — Випуск 1 (9), 2008. — С. 319 — 325.

3. Романюк В. В. Загальні розв'язки однієї неперервної антагоністичної гри / В. В. Романюк // Наука й економіка. — Випуск 4 (8), 2007. — С. 73 — 100.

Надійшла 23.10.2010