УДК 519.85

МАРКО М. Я., ЦЕГЕЛИК Г. Г.
Львівський національний університет імені Івана Франка
ГРИПИНСЬКА Н. В.
Хмельницький національний університет

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ ПОСЛІДОВНОГО ВВЕДЕННЯ ОБМЕЖЕНЬ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОДНІЄЇ ДВОКРИТЕРАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ПЛАНУВАННЯ ВИРОБНИЦТВА

На практиці часто зустрічаються задачі, в яких треба одночасно оптимізувати декілька критеріїв. Це так звані задачі багатокритеріальної оптимізації. Для розв'язування таких задач широко використовуються математичні методи. Потреба в застосуванні математичних методів дослідження для обґрунтування рішень зумовлена насамперед тим, що дедалі частіше наслідки прийняття рішень стосуються багатьох осіб і пов'язані з величезними матеріальними витратами. Необґрунтовані рішення можуть бути дуже вартісними та мати незворотні наслідки. Крім того, математичний підхід можна використати для розв'язання задач у будь-якій конкретній діяльності, оскільки математика абстрагується від специфічних особливостей, характерних конкретним рішенням.

Ключові слова: метод послідовного введення обмежень, двокритеріальна задача планування виробництва, матриця переваг, множина альтернатив, вагові коефіцієнти.

MARKO M. J., TSEGELYK G. G.
Ivan Franko National University of Lviv
GRYPYNSKA N. V.
Khmelnytsky National University

USING THE METHOD OF SUCCESSIVE RESTRICTIONS TO SOLVE A DUAL-OBJECTIVE PROBLEM FOR PRODUCTION SCHEDULING

In practice, there are often problems, which must simultaneously optimize several criteria. This so-called multi-objective optimization problem. For solving such problems is widely used mathematical methods. The need for application of mathematical methods of research to justify decisions primarily due to the fact that more and more the consequences of decisions relating to many people and are associated with enormous costs. Unreasonable decisions can cost very much and have irreversible consequences. In addition, mathematical approach can be used to solve problems in any particular activity as mathematics abstracted from specific features characteristic of a particular solution.

Keywords: method of successive restrictions, dual-objective problem for production scheduling, matrix benefits, set of alternatives, weighting coefficients.

Актуальність. Планування виробництва передбачає використання ефективних конфігурацій технологічного процесу та раціональних стратегій ресурсозбереження. Це комплексна проблема, яка потребує всебічного розгляду. Зазвичай задачі планування виробництва є багатоетапними [1, 2]. Відтак багатокритеріальність та багатокроковість у розв'язуванні таких задач є звичайною практикою [3, 4].

Постановка задачі. Розглянемо використання методу послідовного введення обмежень для розв'язання однієї задачі планування виробництва, в якій за критерії оптимальності приймаються прибуток і попит на виготовлення продукції фірми. За основу можна взяти двокритеріальну задачу, розв'язану методом ідеальної точки [5]. Використаймо наступні позначення. Нехай

n – кількість найменувань продукції, що може виготовляти підприємство;

m – кількість різних ресурсів, що використовуються у виробництві продукції;

a_{ij} – кількість одиниць i-го ресурсу, що використовується для виробництва одиниці продукції j-го найменування;

b_i – кількість одиниць i-го ресурсу, що використовується в виробництві;

p_j – прибуток від виробництва одиниці продукції j-го найменування;

r_j – попит на продукцію j-го найменування;

x_j – план виробництва продукції j-го найменування (шукані величини).

Тоді математична модель задачі матиме вигляд

$$P = f_1(x) = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \to \max\,, \tag{1}$$

$$R = f_2(x) = \sum_{j=1}^{n} r_j x_j \to \max \tag{2}$$

за умов

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \,, \; i = 1,2,...,m \,, \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \,, \; j = 1,2,...,n \,, \qquad (4)$$

Для розв’язання задачі (1)–(4) використаємо метод послідовного введення обмежень. Алгоритм методу складається з низки кроків.

Алгоритм метод послідовного введення обмежень

Перший крок. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію на множині альтернатив G_1, де G_1 -множина, задана нерівностями (3), (4). Нехай

$$\max f_1(x) = y_1,$$
$$\max f_2(x) = y_2,$$
$$x \in G_1.$$

Тоді вектор „ідеальної” оцінки на множині G_1 матиме вигляд

$$\tilde{\;} \qquad {}_2\Big).$$

Далі визначаємо вагові коефіцієнти α_1, α_2 таким чином. Будуємо матрицю попарних порівнянь [6, 7]

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} b_{11}^{(1)} & b_{12}^{(1)} \\ b_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Пара елементів $\left(b_{12}^{(1)}, b_{21}^{(1)}\right)$ характеризує важливість першого критерію порівняно з другим. Якщо перший критерій переважає другий суттєво, то $b_{12}^{(1)} = 8,\ b_{21}^{(1)} = 1;$ значно, то $b_{12}^{(1)} = 4,\ b_{21}^{(1)} = 1;$ „звичайно”, то $b_{12}^{(1)} = 2,\ b_{21}^{(1)} = 1;$ якщо критерії рівноцінні, то $b_{12}^{(1)} = b_{21}^{(1)} = 1.$ Тепер обчислюємо вагові коефіцієнти критеріїв за такою формулою:

$$\alpha_1^{(1)} = \frac{b_{11}^{(1)} + b_{12}^{(1)}}{b_{11}^{(1)} + b_{12}^{(1)} + b_{21}^{(1)} + b_{22}^{(1)}},$$
$$\alpha_2^{(1)} = \frac{b_{21}^{(1)} + b_{22}^{(1)}}{b_{11}^{(1)} + b_{12}^{(1)} + b_{21}^{(1)} + b_{22}^{(1)}}$$

і розв’язуємо задачу

$$\alpha_1^{(1)} f_1(x) + \alpha_2^{(1)} f_2(x) \to \max$$

при обмеженнях (3), (4).

Нехай максимум у цій задачі досягається для альтернативи x^1, оцінка якої $y^1 = \left(f_1\left(x^1\right), f_2\left(x^1\right)\right)$. Особа, що приймає рішення (ОПР), аналізує отриману альтернативу x^1 і оцінку y^1 шляхом її зіставлення з „ідеальною” оцінкою $\tilde{\;}$. Якщо оцінка y^1 задовольняє ОПР, то процедура закінчується, а альтернативу x^1 приймають за розв’язок вихідної задачі. Інакше зазначають номер $s \in \{1,2\}$ критерію, значення якого найменше, на думку ОПР, його задовольняє; визначаємо, до якого рівня ξ_s треба покращити значення цього критерію, формулюємо нову „уточнену” множину альтернатив

$$G_2 = \left\{ x \in G_1 \,\middle|\, f_s(x) \ge \xi_s \right\}$$

і відбувається перехід на наступний крок.

На *другому кроці* знову виконуються ті самі дії, що й на першому кроці, тільки вже використовується множина альтернатив G_2 і т.д.

Приклад. Методом послідовного введення обмежень розв’язати таку двокритеріальну задачу:

$$
\begin{gathered}
f_1 = 3x_1 + x_2 \to \max, \\
f_2 = x_1 + 2x_2 \to \max, \\
x_1 + x_2 \le 5, \\
0 \le x_1 \le 4, \\
0 \le x_2 \le 4.
\end{gathered}
$$

Розв’язування.

Перший крок. Зобразимо множину альтернатив (рис. 1). Як видно з рис. 1, для першого критерію найкращою альтернативою є $x' = (4,1)$, а для другого – $x'' = (1,4)$. Тому

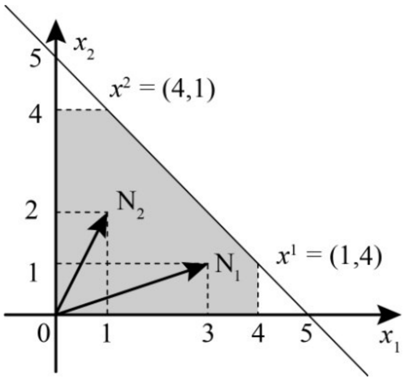

Рис. 1. Множина альтернатив для двокритеріальної задачі

$$
\max_{x \in X} f_1(x) = 13, \quad \max_{x \in X} f_2(x) = 9,
$$

то вектором „ідеальної” оцінки є ~). Нехай перший критерій значно переважає другий. Тоді матриця переваг критеріїв набуде вигляду

$$
B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Обчисливши вагові коефіцієнти критеріїв

$$
\begin{gathered}
\alpha_1^{(1)} = \frac{1+4}{1+4+1+1} = \frac{5}{7}, \\
\alpha_2^{(1)} = \frac{1+1}{1+4+1+1} = \frac{2}{7}
\end{gathered}
$$

розв’язуємо задачу

$$
\begin{gathered}
\frac{5}{7}(3x_1 + x_2) + \frac{2}{7}(x_1 + 2x_2) \to \max, \\
x_1 + x_2 \le 5, \\
0 \le x_1 \le 4, \\
0 \le x_2 \le 4.
\end{gathered}
$$

Розв’язком цієї задачі є альтернатива $x^1 = (4,1)$, а її оцінка $y^1 = (13,6)$ (рис. 2).

Нехай ОПР вирішила, що мінімальний рівень другого критерію становить 7. Тоді отримуємо “уточнену” множину альтернатив

$$G_2 = \left\{ x \in G_1 \,\middle|\, x_1 + 2x_2 \geq 7 \right\}. \tag{5}$$

Ця множина зображена на рис. 3.

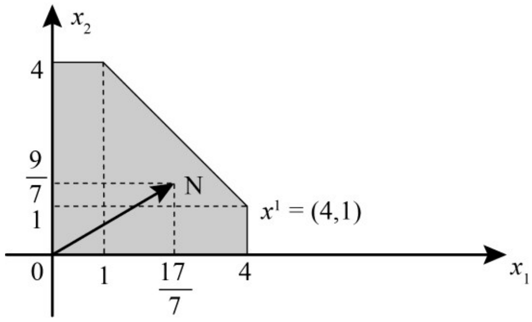

Рис. 2. Оптимальна альтернатива та її оцінка

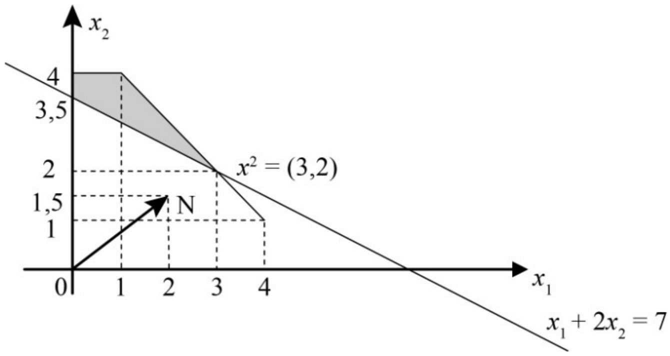

Рис. 3. "Уточнена" множина альтернатив

Другий крок. Обчислюємо оптимальні значення кожного критерію окремо на „уточненій" множині альтернатив. Одержимо

$$\max_{x \in G_2} f_1(x) = 11, \quad \max_{x \in G_2} f_2(x) = 9 .$$

Тоді вектором „ідеальної" оцінки буде $\tilde{\ }\qquad\qquad)$.

Нехай тепер критерії рівноцінні для ОПР. Матриця переваг у цьому випадку набуде вигляду

$$B^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обчисливши вагові коефіцієнти

$$\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \frac{1}{2},$$

розв'язуємо задачу

$$\frac{1}{2}(3x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2) \to \max ,$$
$$x_1 + x_2 \leq 5,$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 7,$$
$$0 \leq x_1 \leq 4,$$
$$0 \leq x_2 \leq 4.$$

Розв'язком цієї задачі (рис. 3) є ефективна альтернатива $x^2 = (3,2)$ і її оцінка $y^2 = (11,7)$.

Якщо отримана ефективна альтернатива та її оцінка задовольняють ОПР, то процедура закінчується. У протилежному випадку відбувається перехід до наступного кроку.

Висновок

Отже, представлений метод послідовних поступок дозволяє розв'язувати конкретні двокритеріальні задачі планування виробництва. Продемонстровані два кроки алгоритму, на яких знайдено альтернативу й оцінку, легко індукувати для більшої кількості етапів. Кількість критеріїв також може бути збільшена індуктивно.

Література

1. Bruno S. Risk neutral and risk averse approaches to multistage renewable investment planning under uncertainty / S. Bruno, S. Ahmed, A. Shapiro, A. Street // European Journal of Operational Research. – 2016. – Volume 250, Issue 3. – P. 979–989.

2. Wang Y. Y. A risk-based interactive multi-stage stochastic programming approach for water resources planning under dual uncertainties / Y. Y. Wang, G. H. Huang, S. Wang, W. Li, P. B. Guan // Advances in Water Resources. – 2016. – Volume 94. – P. 217–230.

3. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : навч. посіб. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 336 с.

4. Цегелик Г. Г. Моделі та методи підтримки прийняття рішень в умовах визначеності : текст лекцій / Г. Г. Цегелик. – Львів, 2016.

5. Marko M. Using the method of ideal point to solve dual-objective problem for production scheduling / M. Marko // ScienceRise. – 2016. – № 7 (1). – P. 46–49.

6. Zgurovsky M. Z. Group incomplete paired comparisons with account of expert competence / M. Z. Zgurovsky, V. G. Totsenko, V. V. Tsyganok // Mathematical and Computer Modelling. – 2004. – Volume 39, Issues 4–5. – P. 349–361.

7. Romanuke V. V. A criterion of aggregating expert estimations into consensus pairwise comparison matrix by a given comparison scale within the corresponding space of positive inverse-symmetric matrices / V. V. Romanuke // Herald of Khmelnytskyi national university. Technical sciences. – 2016. – № 1. – P. 78–84.

Надійшла 13.01.2017; рецензент: д. т. н. Романюк В. В.