УДК [510.644.4: 519.85]:519.816

ГРИГОРУК П. М.
Хмельницький національний університет

НЕЧІТКА ОПТИМІЗАЦІЯ В ПРОЦЕСАХ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Стаття присвячена використанню методів нечіткої оптимізації в процедурах прийняття рішень. Представлено підхід до вибору альтернативи в якості управлінського рішення в рамках нечіткого математичного програмування, коли нечіткість враховується і в описі цільової функції, і в описі системи обмежень. Описано різні варіанти функції належності, які задають систему обмежень. Розглянуто випадок, коли нечіткі цілі і обмеження належать різним універсальним множинам.

Ключові слова: нечітка оптимізація, нечітка цільова функція, нечіткі обмеження, прийняття рішень.

HRYHORUK P. M.
Khmelnytskyi National University

FUZZY OPTIMIZATION IN DECISION-MAKING

The task of decision-making in general can be described by the set of acceptable alternatives and preference relationship given in this set, which reflects the degree of perception of an alternative by person who makes a decision. The preference relationship on the set of alternatives can be described by using the utility function that puts in line to each alternative the quantitative assessment of the effect to be gained when you select this alternative. This task can be solved by using tools of mathematical programming. If at least one part of the given task includes uncertainty, we get fuzzy optimization problem. The aim of the article is to describe an approach to the selection of alternatives as management decisions within the fuzzy mathematical programming when uncertainty is considered both in the description of the objective function and in the description of system of limitations. The various options for membership functions that define system of limitation was described. The case where fuzzy objectives and limitations are in the different universal sets is presented.

Keywords: fuzzy optimization, fuzzy objective function, fuzzy limitation, decision-making.

Вступ. Завдання ухвалення рішень в загальному вигляді можна описати множиною допустимих альтернатив і заданим на цій множині відношенням переваги, яка відображає ступінь сприйняття альтернативи особою, що ухвалює рішення.

Відношення переваги на множині альтернатив можна описати двома способами: або за допомогою бінарного відношення переваги, отриманого шляхом зіставлення альтернатив, або за допомогою функції корисності, яка ставить у відповідність кожній альтернативі кількісну оцінку ефекту, який буде отриманий за умови вибору цієї альтернативи. Кращій альтернативі відповідає і більш оптимальне, зазвичай більше, значення функції корисності. Допустимість альтернатив відображається шляхом встановлення обмежень на них.

Постановка проблеми у загальному вигляді. Позначимо через $A^{(0)}=\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ множину допустимих альтернатив, через $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ – сукупність контрольованих параметрів, значення яких складають конкретну альтернативу розв'язання завдання. Надалі будемо використовувати X як позначення однієї з альтернатив множини $A^{(0)}$. Позначимо через

$$f(X): A^{(0)} \to Y, \tag{1}$$

відображення, значення якого задають сукупність оцінок вибору альтернативи $X \in A^{(0)}$. По суті, це відображення є функцією корисності на заданій множині альтернатив.

Формалізоване подання завдання вибору оптимальної альтернативи вирішується в рамках апарату математичного програмування, як в загальному випадку записується наступним чином:

$$\begin{array}{l} f(X) \to extr, \\ \begin{cases} g_1(X) \otimes b_1; \\ g_2(X) \otimes b_2; \\ \ldots \\ g_n(X) \otimes b_n; \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_t \geq 0. \end{cases} \end{array}, \tag{2}$$

де $f(X)$ – функція корисності, $g_i(X)$ – система обмежень, $i=1..n$, символ $\otimes$ означає одну з операцій відношення: $\leq, \geq, =$.

Функція корисності являє собою відображення множини альтернатив на числову вісь. Однак не кожне відношення переваги допускає такий опис. В деяких випадках це відношення вдається описати лише за допомогою скінченого набору функцій корисності, і тоді відповідні завдання ухвалення рішень є багатокритеріальними.

Якщо хоча б одна складова задачі (2) є випадковою, причому невизначеність знань про неї не може бути описана інструментарієм теорії ймовірностей або математичної статистики, ми отримуємо клас завдань нечіткої оптимізації. Нечіткість в постановці завдання математичного програмування може міститися як при описі множини альтернатив, так і при вказівці вигляду функції корисності. Певною мірою це полегшує формалізацію завдання, дозволяючи не формулювати явно точні обмеження.

Аналіз останніх досліджень чи публікацій. Застосування теорії нечітких множин до розв'язання завдань оптимізації було започатковано Р. Белманом та Л. Заде [1] і розвинуто Г. Циммерманом [2], С. Орловським [3], В. Подіновським [4] та іншими. Розбудова теоретичних аспектів нечіткого математичного програмування висвітлена в роботах С. Мащенка, Р. Ариї, С. Гупти, П. Сінгха, С. Сінгха, Д. Чакраборти, Б. Станоєвич, М. Станоєвича та багатьої інших [5–11]. Застосування нечіткої оптимізації до вирішення практичних завдань економіки і управління, зокрема, до формування інвестиційного портфеля, представлено в роботах І. Твердохліба [12], В. Занга [13], до прийняття рішень в управлінні персоналом – в працях М. Мамедової [14, 15], М. Дурсуна [16], до вибору проектів – у дослідженнях Ю. Стєпіна [17], О. Волгіної [18]. Незважаючи на істотний доробок наведених науковців в галузі розвитку методів нечіткої оптимізації та їх практичного використання, окремі аспекти залишаються недостатньо висвітленими.

Метою статті є опис підходу до вибору альтернативи в якості управлінського рішення в рамках нечіткого математичного програмування, коли нечіткість враховується і в описі цільової функції, і в описі системи обмежень.

Виклад основного матеріалу дослідження. Нехай $A^{(0)}$ – універсальна множина альтернатив. Нечіткою ціллю в $A^{(0)}$ є нечітка підмножина G множини $A^{(0)}$ з функцією належності $\mu_G(A^{(0)}) \to [0,1]$. Чим вищим є значення функції належності $\mu_G(X)$, тим більш ефективним є вибір альтернативи X в якості рішення в сенсі досягнення поставленої цілі.

Нехай A – нечітка множина допустимих альтернатив, яка визначається обмеженнями задачі з функцією належності $\mu_A(X)$. Вона відображає систему обмежень, яким повинні задовольняти альтернативи. Нечітка підмножина множини Y, яка описується функцією належності μ_Y будемо називати нечіткою ціллю завдання. Вона показує ступінь досягнення бажаного значення цільової функції на множині альтернатив. Тоді нечітким розв'язком задачі досягнення нечіткої цілі на множині альтернатив є перетин Z нечітких множин обмежень та цілі:

$$Z = A \bigcap \quad , \tag{3}$$

з функція належності, яка визначається за правилом:

$$\mu_Z = \min\{\mu_A, \mu_Y\}\,. \tag{4}$$

Ми погоджуємось з думкою С. О. Орловського [3, с.72] з приводу того, що множина Z повинна бути максимальною за вкладеністю нечіткою множиною з наступними властивостями:

$$\begin{cases} Z \subseteq A, \\ f(Z) \subseteq Y \end{cases}, \tag{5}$$

де $f(Z)$ – образ Z при відображенні f. Відповідно до [1] , він являє собою нечітку підмножину B множини Y з функцією належності:

$$\mu_B(y) = \max_{X \in f^{-1}(y)} \mu_A(X)\ , \tag{6}$$

де $y \in Y$.

При цьому множина $f^{-1}(y)$ має вигляд:

$$f^{-1}(y) = \{X \mid X \in A, f(X) = y\}\,, \tag{7}$$

тобто, вона є сукупністю всіх $X \in A$, для яких образом при відображенні f є $y \in Y$.

Нечіткість отриманого розв'язку є наслідком нечіткості вихідної задачі. Для визначення кінцевого розв'язку можна скористатись наступним правилом: найкращою є альтернатива X^*, для якої досягається максимум функції належності:

$$\max_{X \in A} \mu_Z(X)\,. \tag{8}$$

Нехай f_0 – деякий заданий рівень функції корисності, якого необхідно досягнути. Запишемо завдання математичного програмування, яке в даному випадку (в звичайній, чіткій постановці) має наступний вигляд:

$$\begin{cases} f(X) \geq f_0, \\ g_1(X) \leq b_1; \\ g_2(X) \leq b_2; \\ \ldots \\ g_n(X) \leq b_n; \\ x_1 \geq 0, \ldots, x_t \geq 0. \end{cases}, \tag{9}$$

причому деякі з обмежень мають форму рівності. Прикладом таких обмежень в маркетингових досліджень може бути встановлений рівень певної якості продукту; детермінована ціна на товар; кількість осіб персоналу, задіяного в обслуговуванні тощо.

Позначимо через δ заданий рівень відхилення, який допускається при визначенні значення цільової функції. Тоді функція належності нечіткої множини цілей задається у вигляді [1]:

$$\mu_G(X)=\begin{cases}0, \quad \text{при } f\le f_0-\delta;\\ \mu(X,\delta), \quad \text{при } f_0-\delta<f\le f_0;\\ 1, \quad \text{при } f>f_0.\end{cases} \tag{10}$$

Для обмежень, які мають вигляд нерівностей типу функція належності матиме вигляд:

$$\mu_A^{(i)}(X)=\begin{cases}0, \quad \text{при } g_i(X)>b_i+\delta_i;\\ \nu_i(X,\delta_i), \quad \text{при } b_i<g_i(X)\le b_i+\delta_i;\\ 1, \quad \text{при } g_i(X)\le b_i.\end{cases} \tag{11}$$

На наш погляд, наведений підхід до побудови функцій належності системи обмежень можна удосконалити, окремо виділивши випадок обмеження у вигляді рівності та коли права частина обмежень задається у вигляді діапазону значень [19].

В першому випадку припустимо, що допускається відхилення в рівностях обмежень, тобто, для кожного з них задані значення $\delta_i^{(1)}$ та $\delta_i^{(2)}$, для яких нерівності $g_i(X)<b_i-\delta_i^{(1)}$, $g_i(X)>b_i+\delta_i^{(2)}$ означають сильне порушення відповідних обмежень. Тоді нечіткі функції належності будуть мати такий вигляд:

$$\mu_A^i(X)=\begin{cases}0 \quad , \quad g_i(X)<b_i-\delta_1^i \vee g_i(X)>b_i+\delta_2^i;\\ \nu_i^{(1)}(X,\delta_i^{(1)}), \quad b_i-\delta_i^{(1)}\le g_i(X)<b_i;\\ \nu_i^{(2)}(X,\delta_i^{(2)}), \quad b<g_i(X)\le b_i+\delta_i^{(2)};\\ 1 \quad , \quad g_i(X)=b_i\end{cases} , \tag{12}$$

Сутність побудованих функцій полягає в тому, що вони відображають бажаність відхилень лівих частин обмежень від значень їх правих частин. Множину, яка є об’єднанням побудованих нечітких множин позначимо через $\tilde{A}$.

Нами пропонується наступне твердження щодо єдності розв’язку задачі нечіткого математичного програмування у випадку запропонованої вище функції належності: якщо функції $\mu_A^i(X)$ та $\mu_Y(X)$ є унімодальними на множині $\tilde{A}$, то задача (6) буде мати єдиний розв’язок. .

Доведення. Розглянемо випадок, коли X є одномірною величиною. Враховуючи вигляд функції належності, унімодальність означає наявність одного екстремуму у вигляді максимуму. При цьому, якщо X^* є точкою максимуму, то при $X<X^*$ функція належності є зростаючою, а при $X>X^*$ – спадаючою.

Розглянемо дві унімодальні функції належності $\mu_A^1(X)$ та $\mu_A^2(X)$, що відповідають двом нечітким множинам $A_1\subseteq A$, $A_2\subseteq A$. Відомо, що перетином $B=A_1 \cap A_2$ є нечітка підмножина з функцією належності $\mu_B(X)=\min\limits_{X\in B}\left\{\mu_A^1(X),\mu_A^2(X)\right\}$. Доведемо, що функція належності, яка відповідає перетину відповідних нечітких підмножин, також буде унімодальною з екстремумом у вигляді максимуму.

Візьмемо три довільні точки $X_1< X_2< X_3$, для яких порушується умова унімодальності: $\mu_B(X_2)<\mu_B(X_3)<\mu_B(X_1)$. Припустимо, що $\mu_B(X_2)=\mu_A^1(X_2),\mu_B(X_3)=\mu_A^1(X_3).$ Тоді функція $\mu_A^1(X)$ є зростаючою для всіх $X_2\le X\le X_3$. Оскільки ця функція унімодальна, то вона є зростаючою і при $X_1\le X\le X_2$, а тому $\mu_A^1(X_1)<\mu_A^1(X_2)$. Якщо $\mu_B(X_1)=\mu_A^2(X_1)$, то це означає, що $\mu_A^2(X_1)<\mu_A^1(X_1)$. З іншого боку, за припущенням, $\mu_A^2(X_1)>\mu_A^1(X_2)$, що призводить до нерівності $\mu_A^1(X_1)>\mu_A^1(X_2)$ – ми отримали протиріччя.

Аналогічними міркуваннями можна отримати протиріччя за умови $\mu_B(X_2)=\mu_A^2(X_2),\mu_B(X_3)=\mu_A^2(X_3).$

Нехай $\mu_B(X_2)=\mu_A^1(X_2),\mu_B(X_3)=\mu_A^2(X_3).$ Припустимо, що $\mu_B(X_1)=\mu_A^1(X_1)$. Тоді функція $\mu_A^1(X)$ є спадаючою при $X_1\le X\le X_2$, а внаслідок її унімодальності, вона є спадаючою і при $X_2\le X\le X_3$, тому $\mu_A^1(X_3)<\mu_A^1(X_2)$. Оскільки $\mu_B(X_3)=\mu_A^2(X_3)$, то $\mu_A^1(X_3)>\mu_A^2(X_3)>\mu_A^1(X_2)$. Ми знову отримали протиріччя. Якщо $\mu_B(X_1)=\mu_A^2(X_1)$, то з умови $\mu_A^2(X_1)>\mu_A^2(X_3)$ випливає, що функція $\mu_A^2(X)$ є спадаючою при $X_1\le X\le X_3$. $\mu_A^2(X_1)<\mu_A^1(X_1)$ – отже, $\mu_A^1(X)$ також є спадаючою при $X_1\le X\le X_3$ внаслідок її унімодальності. Отже, отримуємо наступні нерівності: $\mu_B(X_3)=\mu_A^2(X_3)<\mu^1(X_3)<\mu_A^1(X_2)=\mu_B(X_2)$.

В результаті ми знову прийшли до суперечності. Аналогічний результат можна отримати за умови $\mu_B(X_2)=\mu_A^2(X_2),\mu_B(X_3)=\mu_A^1(X_3).$

Далі, додаючи до перетину двох нечітких підмножин третю підмножину, можна довести, що функція належності їх перетину також буде унімодальною. Продовжуючи такі індуктивні міркування, доводиться наведене твердження.

В тому випадку, коли права частина обмежень задається не одним значенням, а деяким діапазоном, причому межі відхилень від крайніх значень діапазону визначаються деякими величинами $\delta_i^{(1)}$ та $\delta_i^{(2)}$, то функція належності матиме вигляд:

$$\mu_A^i(X)=\begin{cases}0 &, \quad g_i(X)<b_i^{(1)}-\delta_1^i \vee g_i(X)>b_i^{(2)}+\delta_2^i;\\ \nu_i^{(1)}(X,\delta_i^{(1)}), & \quad b_i^{(1)}-\delta_i^{(1)} \le g_i(X)<b_i^{(1)};\\ \nu_i^{(2)}(X,\delta_i^{(2)}), & \quad b_i^{(2)}<g_i(X)\le b_i^{(2)}+\delta_i^{(2)};\\ 1 &, \quad b_i^{(1)} \le g_i(X) \le b_i^{(2)}\end{cases}. \tag{13}$$

В ролі функцій $\nu_i, \nu_i^{(1)}, \nu_i^{(2)}$ можуть бути обрані будь-які монотонні функції, які забезпечують неперервність функцій належності обмежень. Зокрема, досить поширеним випадком є використання лінійної функції.

У випадку постановки завдання нечіткого математичного програмування, за якого здійснюється оптимізація звичайної функції цілі на множині нечітких обмежень, перехід до нечіткої функції корисності можна здійснити за правилом:

$$\mu_Y(X)=\frac{f(X)-\min\limits_{X\in \tilde{A}} f(X)}{\max\limits_{x\in \tilde{A}} f(X)-\min\limits_{X\in \tilde{A}} f(X)}. \tag{14}$$

Значення $\min\limits_{X\in \tilde{A}} f(X)$ та $\max\limits_{x\in \tilde{A}} f(X)$ можуть бути отримані як розв'язок звичайної (в чіткій постановці) задачі лінійного програмування при відповідних обмеженнях на мінімум та максимум правих частин.

Розв'язок цієї задачі може бути отриманий за описаним вище максимінним підходом.

Для застосування наведеної моделі на практиці пропонується такий алгоритм:

1) Здійснення формалізації завдання шляхом визначення системи обмежень і вигляду їх правих частин. В залежності від цього обирається вигляд функції належності для системи обмежень у формі (11), (12) або (13).

2) Здійснення побудови функції належності цілі у вигляді (10) або (14). В останньому випадку додатково проводиться формалізація та розв'язання завдання математичного програмування в звичайному, чіткому вигляді.

3) Визначення функції належності розв'язку за формулою (4).

4) Визначення оптимального значення функції належності за формулою (6) і відповідної йому альтернативи.

Проілюструємо представлений підхід на прикладі. Значення функцій належності нечітких обмежень та нечіткої цілі для дванадцяти альтернатив представлені в табл. 1. В ній представлено значення функції належності нечіткого розв'язку μ_Z, обчислені за формулою (4).

Таблиця 1

Значення функцій належності нечітких обмежень та нечіткої цілі

Нечіткі умови та ціль	Альтернативи											
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}
G_1	0,00	0,00	0,12	0,14	0,34	0,63	0,75	1,00	0,92	0,47	0,15	0,00
G_2	0,00	0,07	0,15	0,22	0,45	0,62	0,87	0,94	1,00	0,54	0,34	0,21
G_3	0,09	0,16	0,22	0,44	0,73	0,86	1,00	0,75	0,63	0,35	0,00	0,00
Z	0,00	0,00	0,35	0,46	0,57	0,76	0,79	0,84	0,91	1,00	1,00	1,00
μ_Z	0,00	0,00	0,12	0,14	0,34	0,62	0,75	0,75	0,63	0,35	0,00	0,00

Аналіз отриманих результатів дозволяє зробити висновок, що найкращими за таких умов є альтернативи A_7 та A_8, для яких має місце максимум відповідної функції належності.

Розглянемо випадок, коли при виборі рішення менеджер керується бажанням максимізувати функцію як самої функції *f,* так і нечіткої множини допустимих альтернатив з функцією належності $\mu_A(X)$.

Представлений підхід до розв'язанні завдання нечіткого програмування передбачав, що нечіткі цілі та обмеження є підмножинами однієї і тієї ж універсальної множини альтернатив.

Розглянемо більш загальний випадок такої задачі, коли нечіткі цілі і обмеження належать різним універсальним множинам. Нехай $A^{(0)}$ – універсальна множина альтернатив, а відображення $f: A^{(0)} \to Y$ задає ефективність вибору $X\in A^{(0)}$ в якості рішення. Нечітка ціль в такій постановці задається у вигляді нечіткої підмножини універсальної множини оцінок ефективності Y:

$$\mu_G: Y \to [0,1]. \tag{15}$$

Позначимо через $A^*\in A^{(0)}$ ефективну альтернативу при функціях $f(X)$ та $\mu_A(X)$ за умови, що для будь-якої іншої альтернативи $A' \in A^{(0)}$ нерівності $f(A')\ge f(A^*)$ та $\mu(A')\ge\mu(A^*)$ еквівалентні рівностям: $f(A')=f(A^*)$ та $\mu(A')=\mu(A^*)$. Тобто, для ефективної альтернативи A^* з множини $A^{(0)}$ відносно функцій $f(X)$ та $\mu_A(X)$ вибір будь-якої іншої альтернативи з цієї множини не призводить до збільшення однієї з цих функцій, не погіршивши результат іншої.

В задачах прийняття рішень за умови наявності декількох критеріїв множина таким чином визначених ефективних альтернатив являє собою множину можливих виборів рішення. Позначимо множину ефективних альтернатив через E. Тоді розв'язок нечіткої задачі математичного програмування є нечітка множина з функцією належності, яка має вигляд:

$$\mu(X) = \begin{cases} \mu_A(X), X \in E, \\ 0, \quad \text{інакше.} \end{cases} \tag{16}$$

Припускається, що розв'язок задачі потрібно шукати серед тих альтернатив, для яких неможливо одночасно покращити значення функцій $f(X)$ та $\mu_A(X)$.

Нечіткому рішенню задачі відповідає нечітке максимальне значення функції $f(X)$, яке задається функцією належності:

$$\mu_f(\tau) = \max_{X \in f^{-1}(\tau)} \mu(X). \tag{17}$$

Воно є образом нечіткої множини $\mu(X)$ при відображенні f.

Отримана множина ефективних за Парето альтернатив E взагалі кажучи є нескінченою, і підлягає важкому опису. При цьому виникає завдання вказівки скінченої кількості альтернатив, які рівномірно обрані з E. Для цього можна скористатись таким правилом [3]: якщо для деяких чисел α та β альтернатива A^* максимізує функцію:

$$F(A^*) = \alpha f(E^*) + \beta \mu_A(E^*), \tag{18}$$

То вона є ефективною для функцій f та μ_A. Це твердження доводиться тим, що за іншого випадку існує альтернатива $A' \in A^{(0)}$, для якої виконуються нерівності:

$$\begin{cases} f(E') > f(E^*), \\ \mu_A(E') \geq \mu_A(E^*), \end{cases} \tag{19}$$

або

$$\begin{cases} f(E') \geq f(E^*), \\ \mu_A(E') > \mu_A(E^*), \end{cases} \tag{20}$$

що суперечить твердженню максимізації виразу (18) альтернативою E^*.

Таким чином, обираючи значення змінних α та β і максимізуючи функцію (18), можна отримати довільну кількість ефективних альтернатив. Для вибору рішення з цього набору альтернатив ОПР може скористатись додатковою інформацією, зокрема, побудувати нечітке відношення переваги.

Нехай P – нечітке відношення переваги, задане на множині Y з функцією належності:

$$\mu_P : Y \times Y \to [0,1]. \tag{21}$$

Вибір альтернатив оцінюється значеннями нечіткої функції корисності, яка відображає ціль:

$$f : A^{(0)} \times Y \to [0,1]. \tag{22}$$

Для будь-якої альтернативи $X \in A^{(0)}$ функція f ставить у відповідність нечітку оцінку ефективності цієї альтернативи, задану у вигляді нечіткої підмножини $f(X,Y)$. Розглянемо нечітке відношення переваги $\tilde{}$, індуковане на всіх нечітких підмножинах множини Y. З його допомогою можна порівнювати не лише оцінки альтернатив, але і самі альтернативи. Перевагу альтернативи A_1 над альтернативою A_2 будемо ототожнювати з перевагою нечіткої оцінки $f(A_1, Y)$ над $f(A_2, Y)$; $A_1, A_2 \in A^{(0)}$:

$$\eta(A_1, A_2) = \tilde{} \qquad (A_2)). \tag{23}$$

Функцію η можна визначити таким чином:

$$\eta(A_1, A_2) = \max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(A_1, y_1), f(A_2, y_2), \mu_P(y_1, y_2)\}. \tag{24}$$

Виділимо в множині ($A^{(0)}$, η) нечітку підмножину недомінованих альтернатив:

$$\tilde{} \qquad 1 - \max_{Z \in A^{(0)}} \{\eta(Z, X) - \eta(X, Z)\}. \tag{25}$$

Тоді, враховуючи залежність (24), отримаємо:

$$\begin{aligned} \tilde{} \qquad & 1 - \max_{Z \in A^{(0)}} [\max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(Z, y_1), f(X, y_2), \mu_P(y_2, y_1)\} - \\ & - \max_{y_1, y_2 \in Y} \min\{f(Z, y_1), f(X, y_2), \mu_P(y_1, y_2)\}] \end{aligned}, \tag{26}$$

де $X \in A^{(0)}$. Тоді для нечіткої підмножини строго недомінованих альтернатив має місце умова:

$$\tilde{} \qquad 1. \tag{27}$$

Оскільки на практиці умова (27) може виконуватись не завжди, то в ролі рішення доцільно обрати альтернативу, недоміновану з деяким рівнем $0<r<1$.

Якщо множина оцінок ефективності альтернатив є числовою віссю, то вираз (24) набуде вигляду:

$$\eta(A_1, A_2) = \max_{y_1, y_2 \in Y, y_2 \geq y_1} \min\{f(A_1, y_2), f(A_2, y_1)\}, \tag{28}$$

а розв'язком відповідної задачі нечіткого математичного програмування є нечітка підмножина недомінованих альтернатив з функцією належності:

$$\eta^{ND}(X) = \min[1 - \max_{Z \in A^{(0)}} \{\max_{y_2 \ge y_1} \min(f(Z, y_2), f(X, y_1) - \\ -\max_{y_2 \ge y_1} \min(f(X, y_2), f(Z, y_1)\}, \eta(X, X)]. \quad (29)$$

Якщо $\eta^{ND}(X) \ge r$, то в множині $A^{(0)}$ немає жодної з альтернатив, яка би домінувала *X з*і ступенем, більшим за 1–*r*, 0<*r*<1.

Для знаходження альтернативи X, недомінованою зі ступенем, не меншим за *r,* необхідно розв'язати задачу лінійного програмування:

$$\begin{cases} y \to \max, \\ f(X, y) \ge r, \\ X \in A^{(0)}, y \in Y. \end{cases} \quad (30)$$

Наведені міркування дозволяють знайти розв'язок нечіткої задачі математичного програмування за умови нечіткого опису функції корисності на нечітких обмежень. Отримана множина недомінованих альтернатив дозволяє лише надати ОПР варіанти рішень. Конкретне рішення за рівних значень функції належності $\eta^{ND}(X)$ обирається на основі аналізу додаткової інформації.

Висновки. Таким чином, в статті розглянуто теоретичні засади формалізації завдань нечіткої оптимізації в процесі прийняття управлінських рішень та побудови моделей функцій належності нечітких множин системи обмежень, які дозволяють урахувати різні типи невизначеності правих частин цієї системи.

Література

1. Bellman, R.E., Zadeh, L.A. Decision-making in a fuzzy environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // Mgmt Sci. – 1970. – № 17. – P. 141–166.

2. Zimmermann H. J. Fuzzy programming and linear programming with several objective functions / H. J. Zimmermann // Fuzzy Sets and Systems. – 1978. – V. 1, № 1. – P. 45–55.

3. Орловский С. А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации / С. А. Орловский. – М. : Наука, 1981. – 206 с.

4. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 254 с.

5. Мащенко С.О. Обзор развития многокритериальных моделей принятия решений / С.О. Мащенко, М. Саад // Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: фізико-математичні науки. – 2013. – № 2. – С. 190–197.

6. Мащенко С.О. Задача оптимизации с нечетким множеством нечетких ограничений / С.О. Мащенко, Мохаммед Саад Ибрахим Аль-Саммарраи // Международный научно-технический журнал «Проблемы управления и информатики». – 2014. – № 4 . – С. 47–57.

7. Arya R. Fuzzy parametric iterative method for multi-objective linear fractional optimization problems / R. Arya , P. Singh // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. – 2017. – Vol. 32. – No. 1. – P. 421–433.

8. Stanojević B. Parametric computation of a fuzzy set solution to a class of fuzzy linear fractional optimization problems / B. Stanojević, M. Stanojević // Fuzzy Optimization and Decision Making. – 2016. – Vol. 15, – Iss. 4. – P. 435–455.

9. Singh S. K. Intuitionistic fuzzy non linear programming problem: Modeling and optimization in manufacturing systems / S. K. Singh , S. P. Yadav // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. – 2015. – Vol. 28. – No. 3. – P. 1421–1433.

10. Chakraborty D. Multi-objective optimization problem under fuzzy rule constraints using particle swarm optimization / D. Chakraborty, D. Guha, B. Dutta // Soft Computing. – 2016. – Vol. 20. – Iss. – 6. – P. 2245–2259.

11. Ghosh D. A new method to obtain fuzzy Pareto set of fuzzy multi-criteria optimization problems / D. Ghosh, D. Chakraborty // Journal of Intelligent & Fuzzy Systems. – 2014. – Vol. 26. – No. 3. – P. 1223–1234.

12. Твердохліб І. П. Нечітка оптимізація інвестиційного портфеля / І. П. Твердохліб, М. І. Вовк, Я. А. Прикарпатський // Актуальні проблеми економіки. – 2011. – № 11. – С. 329–337.

13. Zhang W.G. A new fuzzy programming approach for multi-period portfolio optimization with return demand and risk control / W.G. Zhang, Y.J. Liu, W. J. Xu // Fuzzy Sets and Systems. – 2014. – Vol. 246. – P. 107–126.

14. Мамедова М. Г. Нечеткая многокритериальная модель поддержки принятия решений в задачах управления персоналом / М. Г. Мамедова, З. Г. Джабраилова // Проблемы информационных технологий. – 2012. – № 2. – С. 37–46.

15. Mammadova M. H. Application of Fuzzy Optimization Method in Decision-making for Personnel Selection / M. H. Mammadova, Z. Q. Jabrayilova, F. R. Mammadzada // Intelligent Control and Automation. – 2014. – Vol. 5. – Iss. 4. – P. 190–204.

16. Dursun M. A fuzzy MCDM approach for personnel selection / M. Dursun, E. Karsak // Expert Systems with Applica-tions. – 2010. – Vol. 37. – Iss. 6. – P. 4324–4330.

17. Степин Ю.П. Модель нечеткой многокритериальной оптимизации и оценки рисков выбора вариантов проектов / Ю.П. Степин // Труды Российского государственного университета нефти и газа им. И.М. Губкина. – 2012. – № 3. – С. 197–204.

18. Волгина О.А. Нечетко-множественная оптимизация портфеля проектов с учетом запросов стейкхолдеров в рамках программы импортозамещения «Объединенной приборостроительной корпорации» ГК «РОСТЕХ / О.А. Волгина, Е.Н. Лихоперст, В.О. Морозов, Н.А. Волкова // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. Серия: Экономика и управление. – 2016. – № 4 (27). – С. 19–25.

19. Григорук П. М. Прийняття рішень в умовах невизначеності як задача нечіткого лінійного програмування / П. М. Григорук // Матеріали V міжнародної науково-практ. конф. «Методи, моделі та інформаційні технології в управлінні соціально-економічними, екологічними та технічними системами», 17–19 жовтня 2012 р. / голови ред. колегії: О. Л. Голубенко, Ю. Г. Лисенко. – Луганськ – Євпаторія, 2012. – С. 29–32.

Надійшла 19.03.2017; стаття прорецензована редакційною колегією