УДК 681.518.3+519.218.82

О.А. ПАСТУХ
Європейський університет, м. Тернопіль

КВАНТОВІ НЕЧІТКІ ВІДНОШЕННЯ КВАНТОВИХ НЕЧІТКИХ МНОЖИН. КВАНТОВІ НЕЧІТКІ ГРАФИ

Вперше введено поняття унарного квантового нечіткого відношення, бінарного квантового нечіткого відношення, тернарного квантового нечіткого відношення, N *-арного квантового нечіткого відношення і ряд їх властивостей, а також поняття квантового нечіткого графу і його часткових різновидів: орієнтованого квантового нечіткого графа, квантового нечіткого гіперграфа, квантового нечіткого графа із петлями, квантового нечіткого мультиграфа, квантового нечіткого псевдографа на основі поняття квантової нечіткої множини, що вперше введено автором у роботах [1- 4].*

For the first time there has been introduced the notion of the quantum fuzzy relation, binary quantum fuzzy relation, ternary quantum fuzzy relation, N *-ary quantum fuzzy relation, and the series of their properties, and also the notion of the quantum fuzzy graph and its partial forms: oriented quantum fuzzy graph, quantum fuzzy hypergraph, quantum fuzzy graph with loops, quantum fuzzy multigraph, quantum fuzzy pseudograph on the basis of the notion of quantum fuzzy set, that primarily the author founded in the works [1 – 4].*

Вступ

На сьогодні досягнуті великі успіхи в обробці та збереженні сучасними інформаційними системами (ІС) та нечіткими інформаційними системами (f -системами) різного типу даних (чітких і нечітких). Нові швидкодіючі алгоритми, які постійно розробляються різними вченими, дозволяють ефективно ІС та f -системам обробляти та зберігати великі об’єми даних.

Однак в багатьох предметних областях об’єми даних збільшуються не поліноміально, а експоненційно. Для прикладу можна звернути увагу на таку сферу, як Web. Експоненційний ріст об’єму Web простору створює велику проблему для різних інформаційно-пошукових систем типу Google, Rambler та ін., яка виявляється не лише в індиксації Web простору, але і в технічній складності збереження надвеликих об’ємів даних та їх обробки. В таких предметних областях, де об’єми даних зростають із плином часу експоненційно, не завжди нові методи та алгоритми дають суттєво принципові можливості щодо зменшення обчислювальних ресурсів для обробки та збереження ІС та f -системами надвеликих об’ємів даних.

Принципово кращими технічними параметрами у порівнянні з ІС та f -системами володіють квантові інформаційні системи (q -системи), оскільки вони використовують квантові ефекти: квантовий паралелізм та квантову інтерференцію і тому можуть зберігати і паралельно обробляти надвеликі об’єми даних.

Однак, якщо обробка та збереження даних ІС може бути математично формалізована загалом у вигляді багатоносійної реляційної алгебри виду

$$\left\langle U_1, U_2, U_3, ..., U_n, \Omega_1, \Omega_2 \right\rangle,$$

де U_1, U_2, U_3, …, U_n – універсальні множини (носії), Ω_1 – сукупність відношень заданих на носіях, Ω_2 – сукупність операцій заданих на відношеннях;

а обробка та збереження нечітких даних f -системами може бути математично формалізована загалом у вигляді багатоносійної нечіткої реляційної алгебри виду

$$\left\langle U_1, U_2, U_3, ..., U_n, f\Omega_1, f\Omega_2 \right\rangle,$$

де U_1, U_2, U_3, …, U_n – універсальні множини (носії), $f\Omega_1$ – сукупність нечітких відношень заданих на носіях, $f\Omega_2$ – сукупність операцій заданих на нечітких відношеннях;

то очевидно обробка та збереження даних, якими оперують q -системи, і математичні моделі яких вперше були введені автором у роботах [1-4] у вигляді квантових нечітких множин, а тому оперуватимемо термінологією – квантових нечітких даних, повинна також математично формалізуватися у вигляді багатоносійної реляційної алгебри, але вже виду

$$\left\langle U_1, U_2, U_3, ..., U_n, qf\Omega_1, qf\Omega_2 \right\rangle,$$

де U_1, U_2, U_3, …, U_n – універсальні множини (носії), $qf\Omega_1$ – сукупність квантових нечітких відношень заданих на носіях, $qf\Omega_2$ – сукупність операцій заданих на квантових нечітких відношеннях.

Побудова такої багатоносійної реляційної алгебри для q -систем не обмежується лише вперше введеними автором математичними об’єктами у його роботах [1-4], зокрема, наприклад, поняттям квантової нечіткої множини. Потрібно розглянути поняття відношення квантових нечітких множин, тобто поняття квантового нечіткого відношення і його властивостей. Також в роботі вперше вводиться поняття квантового нечіткого графа і його часткових різновидів.

Огляд існуючих відомостей

Основними математичними об'єктами для математичної формалізації обробки та збереження даних ІС у вигляді вище наведеної реляційної системи є множини та їх відношення, а загалом і графи, які можна розглянути у роботах, наприклад [5-7], або інших; основними математичними об'єктами для математичної формалізації обробки та збереження нечітких даних f -системами у вигляді вище наведеної нечіткої реляційної системи є нечіткі множини та їх нечіткі відношення, а загалом і нечіткі графи, які можна розглянути у роботах, наприклад [8-11], або інших; основними математичними об'єктами для математичної формалізації обробки та збереження квантових нечітких даних q -системами у вигляді вище наведеної реляційної системи є квантові нечіткі множини, які є головними математичними об'єктами на що автор опирається і чим послуговується в даній роботі й, як зазначалося, отримані ним раніше в роботах [1-4], а також їх квантові нечіткі відношення, які розглядатимуться у даній роботі.

Мета

Введення та обґрунтування поняття квантового нечіткого відношення і ряду його властивостей, а також квантового нечіткого графа і його часткових різновидів.

Основна частина

1. Унарне квантове нечітке відношення.

Очевидно, що найперше з відношень, яке можна розглянути є квантове нечітке унарне відношення яким є сама квантова нечітка множина, яка однозначно задається своєю індикаторною функцією і вперше введена автором у його роботах [1-4]. Квантове нечітке унарне відношення $qf\hat{A}$ задається на універсумі U і його математично повним і однозначним представленням є його індикаторна функція

$$I_{qf\hat{A}}(u) \overset{def}{=} \left|\psi_{qf\hat{A}}(u)\right\rangle : \quad U \to \mathrm{C} \overset{def}{=} \left\langle \mathrm{C}, \Omega_{\mathrm{C}} \right\rangle,$$

де u – елементарний елемент універсуму U, C – множина комплексних чисел (носій), $\Omega_{\mathrm{C}} = \{+, \bullet, *\}$ – сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження.

Таким чином можна сформулювати означення.

<u>**ОЗНАЧЕННЯ 1.**</u> ***Квантовим нечітким унарним відношенням*** $qf\hat{A}$ ***заданим на універсумі*** U ***з індикаторною функцією*** $I_{qf\hat{A}}$ ***називається квантова нечітка множина*** $qf\hat{A}$ ***цього ж універсуму*** U ***з індикаторною функцією*** $I_{qf\hat{A}} = I_{qfA}$.

Очевидним є й поняття нормованого квантового нечіткого унарного відношення.

<u>**ОЗНАЧЕННЯ 2.**</u> ***Нормованим квантовим нечітким унарним відношенням*** qfA ***заданим на універсумі*** U ***з індикаторною функцією*** I_{qfA} ***називається нормована квантова нечітка множина*** qfA ***цього ж універсуму.***

Виходячи з практичної доцільності далі у роботі розглядатимуться лише нормовані квантові нечіткі відношення, а тому термін ''нормовані'' в подальшому опускається.

Слушно відмітити, що не нормовані квантові нечіткі відношення є такими, від яких не вимагається умова нормування їх індикаторної функції у гільбертовому просторі.

2. Бінарні квантові нечіткі відношення.

По індукції, наступним по розмірності після квантового нечіткого унарного відношення є квантове нечітке бінарне відношення.

Квантове нечітке бінарне відношення qfR задається на декартовому добутку $U_1 \times U_2$ універсумів U_1 та U_2. Квантове нечітке бінарне відношення qfR є квантовою нечіткою множиною пар у якій перший елемент пари належить універсуму U_1, а другий елемент належить універсуму U_2 і символічно позначається $u_1 qfR u_2$, якщо $(u_1, u_2) \in qfR$, і записом $u_1 \overline{qfR} u_2$, якщо $(u_1, u_2) \notin qfR$. Математично повним і однозначним представленням квантового нечіткого бінарного відношення qfR є його індикаторна функція

$$I_{qfR}(u_1, u_2) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1, u_2)\right\rangle : \quad U_1 \times U_2 \to \mathrm{Z} \overset{def}{=} \left\langle Z, \Omega_Z \right\rangle$$

де (u_1, u_2) – елементарний елемент універсуму $U_1 \times U_2$, $Z = \{z : \quad z \in \mathrm{C}, \quad |z| \le 1\}$ – підмножина комплексних чисел (носій), $\Omega_Z = \{+, \bullet, *\}$ – сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження, $\left\| \left| I_{qfR}(u_1,u_2) \right\rangle \right\|_{L_2(U_1 \times U_2)} = 1$.

Отже, можна сформулювати означення квантового нечіткого бінарного відношення.

<u>ОЗНАЧЕННЯ 3.</u> ***Квантовим нечітким бінарним відношенням*** qfR ***заданим на декартовому добутку*** $U_1 \times U_2$ ***універсумів*** U_1 ***та*** U_2 ***називається сукупність пар***

$$\left\{ \left((u_1,u_2), I_{qfR}(u_1,u_2) \right): \quad I_{qfR}(u_1,u_2) \overset{def}{=} \left| \psi_{qfR}(u_1,u_2) \right\rangle, \quad (u_1,u_2) \in U_1 \times U_2 \right\},$$

де $I_{qfR}(u_1,u_2) \overset{def}{=} \left| \psi_{qfR}(u_1,u_2) \right\rangle : \quad U_1 \times U_2 \to \mathrm{Z} \overset{def}{=} \left\langle Z, \Omega_Z \right\rangle, \quad Z = \{ z : \quad z \in \mathrm{C}, \quad |z| \le 1 \}$ ***– підмножина комплексних чисел (носій),*** $\Omega_Z = \{ +, \bullet, * \}$ ***– сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження,*** $\left\| \left| I_{qfR}(u_1,u_2) \right\rangle \right\|_{L_2(U_1 \times U_2)} = 1$.

Слушно відмітити, що різниця між індикаторною функцією $I_{qfR}(u_1,u_2)$ квантового нечіткого бінарного відношення qfR, яка є математично повним і однозначним його представленням, та індикаторними функціями $I_R(u_1,u_2)$ чіткого бінарного відношення R, $I_{fR}(u_1,u_2)$ нечіткого бінарного відношення fR, які є також їх математично повними і однозначними описами, така ж, як між індикаторною функцією $I_{qfA}(u)$ квантової нечіткої множини qfA та індикаторними функціями $I_A(u)$ чіткої множини A, $I_{fA}(u)$ нечіткої множини fA. А саме, область значень індикаторної функції квантового нечіткого бінарного відношення узагальнює область значень індикаторної функції нечіткого бінарного відношення і тим більше чіткого бінарного відношення на основі ієрархії загально алгебраїчних систем. Зокрема, область значень індикаторної функції I_{fR} нечіткого бінарного відношення fR може бути довільна булева гратка з носієм $[a,b]$, де $a, b \in \mathrm{R}$ і як частковий випадок область значення індикаторної функції I_R чіткого бінарного відношення R булева гратка з носієм $\{0,1\}$; то область значень індикаторної функції I_{qfR} квантового нечіткого бінарного відношення є алгебра з носієм $Z = \{ z : \quad z \in \mathrm{C}, \quad |z| \le 1 \}$ та сигнатурою $\Omega_Z = \{ +, \bullet, * \}$. Тобто, алгебраїчна система – область значення індикаторної функції I_{qfR} квантового нечіткого бінарного відношення qfR, відрізняється від алгебраїчної системи – області значення індикаторних функцій I_R та I_{fR} чіткого бінарного відношення R та нечіткого бінарного відношення fR тим, що в неї інший узагальнений носій, оскільки $[a,b] \subset \mathrm{R} \subset \mathrm{C}$ (в даному випадку слід мати на увазі область значення індикаторної функції ненормованого квантового нечіткого бінарного відношення, однак, навіть коли розглядати область значення індикаторної функції нормованого квантового нечіткого бінарного відношення, то $\{ z : \quad z \in \mathrm{C}, \quad |z| \le 1 \} \ne [a,b]$, де $a, b \in \mathrm{R}$). Крім того існує різниця і у сигнатурах – унарна операція комплексне спряження, належить лише сигнатурі Ω_Z. Принципова відмінність також полягає і в тому, що в алгебраїчній системі, як області значення індикаторної функції I_{qfR} квантового нечіткого бінарного відношення qfR не вимагається умова часткового порядку носія, що для носіїв алгебраїчних систем, як областей значень індикаторних функцій I_R, I_{fR} чіткого бінарного відношення R та нечіткого бінарного відношення fR є обов'язковим, оскільки вони відносяться до класу булевих граток.

Кожній індикаторній функції $I_{qfR}(u_1,u_2)$ квантового нечіткого бінарного відношення qfR, яке задане на декартовому добутку $U_1 \times U_2$ скінчених універсумів $U_1 = \{ u_{1i} : \quad i = \overline{1,m} \}$ та $U_2 = \{ u_{2j} : \quad j = \overline{1,n} \}$ можна однозначно поставити у відповідність матрицю квантового нечіткого відношення $m \times n$ в якій на перетині i-ї стрічки та j-го стопця поміщається значення $I_{qfR}(u_{1i}, u_{2j})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Наприклад, $U_1 = \{ u_{1i} : \quad i = \overline{1,3} \}$, $U_2 = \{ u_{2j} : \quad j = \overline{1,4} \}$,

$$I_{qfR}(u_{1i}, u_{2j}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{i}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-1}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

причому $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\left|I_{qfR}(u_{1i}, u_{2j})\right|^2 = 1$; або $U_1 = \{u_{1i}: \quad i = \overline{1,2}\}$, $U_2 = \{u_{2j}: \quad j = \overline{1,3}\}$,

$$I_{qfR}(u_{1i}, u_{2j}) = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-i}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},$$

причому $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{3}\left|I_{qfR}(u_{1i}, u_{2j})\right|^2 = 1$.

3. Тернарні квантові нечіткі відношення.

Очевидно, що крім введення квантового нечіткого бінарного відношення, можна по індукції ввести поняття квантового нечіткого тернарного відношення та загалом квантового нечіткого n-арного відношення, де $n = \overline{4,\infty}$.

Квантове нечітке тернарне відношення qfR задається на декартовому добутку $U_1 \times U_2 \times U_3$ універсумів U_1, U_2 та U_3. Квантове нечітке тернарне відношення qfR є квантовою нечіткою множиною трійок, у якій перший елемент трійки належить універсуму U_1, другий елемент належить універсуму U_2, а третій елемент належить універсуму U_3. Математично повним і однозначним представленням квантового нечіткого тернарного відношення qfR є його індикаторна функція

$$I_{qfR}(u_1, u_2, u_3) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right\rangle: \quad U_1 \times U_2 \times U_3 \to \mathbf{Z} \overset{def}{=} \left\langle Z, \Omega_Z \right\rangle,$$

де (u_1, u_2, u_3) – елементарний елемент універсуму $U_1 \times U_2 \times U_3$, $Z = \{z: \quad z \in \mathbf{C}, \quad |z| \le 1\}$ – підмножина комплексних чисел (носій), $\Omega_Z = \{+, \bullet, *\}$ – сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження, $\left\| \left|I_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right| \right\|_{L_2(U_1 \times U_2 \times U_3)} = 1$.

Отже, можна сформулювати означення квантового нечіткого тернарного відношення.

<u>**ОЗНАЧЕННЯ 4.**</u> ***Квантовим нечітким тернарним відношенням*** qfR ***заданим на декартовому добутку*** $U_1 \times U_2 \times U_3$ ***універсумів*** U_1, U_2 ***та*** U_3 ***називається сукупність трійок***

$$\left\{ \left((u_1, u_2, u_3),\ I_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right): \quad I_{qfR}(u_1, u_2, u_3) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right\rangle, (u_1, u_2, u_3) \in U_1 \times U_2 \times U_3 \right\},$$

де $I_{qfR}(u_1, u_2, u_3) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right\rangle: \quad U_1 \times U_2 \times U_3 \to \mathbf{Z} \overset{def}{=} \left\langle Z, \Omega_Z \right\rangle$, $Z = \{z: \quad z \in \mathbf{C}, \quad |z| \le 1\}$ ***– підмножина комплексних чисел (носій),*** $\Omega_Z = \{+, \bullet, *\}$ ***– сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження,*** $\left\| \left|I_{qfR}(u_1, u_2, u_3)\right| \right\|_{L_2(U_1 \times U_2 \times U_3)} = 1$.

Область значень індикаторної функції $I_{qfR}(u_1, u_2, u_3)$ квантового нечіткого тернарного відношення qfR відрізняється від областей значень індикаторних функцій $I_R(u_1, u_2, u_3)$ чіткого тернарного відношення R та $I_{fR}(u_1, u_2, u_3)$ нечіткого тернарного відношення fR аналогічно, як відрізняються між собою області значень індикаторних функцій з одної сторони $I_{qfA}(u)$ квантової нечіткої множини qfA з іншої $I_A(u)$, $I_{fA}(u)$ чіткої A і нечіткої fA множин; та $I_{qfR}(u_1, u_2)$ квантового нечіткого бінарного відношення qfR з однієї сторони і $I_R(u_1,u_2)$, $I_{fR}(u_1,u_2)$ чіткого R та нечіткого fR бінарних відношень.

Кожній індикаторній функції $I_{qfR}(u_1,u_2,u_3)$ квантового нечіткого тернарного відношення qfR, яке задане на декартовому добутку $U_1 \times U_2 \times U_3$ скінчених універсумів $U_1 = \{u_{1_i} : i = \overline{1,m}\}$, $U_2 = \{u_{2_j} : j = \overline{1,n}\}$ та $U_3 = \{u_{3_j} : k = \overline{1,l}\}$ можна однозначно поставити у відповідність куб квантового нечіткого тернарного відношення $m \times n \times l$ в якому на перетині i-ї, j-ї та k-ї колонок поміщається значення $I_{qfR}\left(u_{1_i}, u_{2_j}, u_{3_k}\right)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,l}$ причому $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{l}\left|I_{qfR}\left(u_{1_i}, u_{2_j}, u_{3_k}\right)\right|^2 = 1$.

4. N-арні квантові нечіткі відношення.

Квантове нечітке N-арне відношення qfR задається на декартовому добутку $U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N$ універсумів U_1, U_2, U_3, …, U_N. Квантове нечітке N-арне відношення qfR є квантовою нечіткою множиною N-нок, у якій перший елемент N-ки належить універсуму U_1, другий елемент належить універсуму U_2, третій елемент належить універсуму U_3 і т.д., N-ий елемент належить універсуму U_N. Математично повним і однозначним представленням квантового нечіткого N-арного відношення qfR є його індикаторна функція

$$I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)\right\rangle : \qquad U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N \to \mathrm{Z} \overset{def}{=} \langle Z, \Omega_Z \rangle,$$

де $(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)$ – елементарний елемент універсуму $U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N$, $Z = \{z : \ z \in \mathrm{C}, \ |z| \le 1\}$ – підмножина комплексних чисел (носій), $\Omega_Z = \{+, \bullet, *\}$ – сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження $\left\| \, \left| I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N) \right| \, \right\|_{L_2(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N)} = 1$.

Отже можна сформулювати означення квантового нечіткого N-арного відношення.

<u>**ОЗНАЧЕННЯ 5.**</u> ***Квантовим нечітким N-арним відношенням qfR заданим на декартовому добутку $U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N$ універсумів U_1, U_2, U_3, …, U_N називається сукупність N-нок***

$$\left\{\left((u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N),\ I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)\right) :\ I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)\right\rangle,\right.$$
$$\left.(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N) \in U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N\right\},$$

де $I_{qfR}(u_1, u_2, \ldots, u_N) \overset{def}{=} \left|\psi_{qfR}(u_1, u_2, \ldots, u_N)\right\rangle : U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_N \to \mathrm{Z} \overset{def}{=} \langle Z, \Omega_Z \rangle$, $Z = \{z : \ z \in \mathrm{C}, \ |z| \le 1\}$ ***– підмножина комплексних чисел (носій),*** $\Omega_Z = \{+, \bullet, *\}$ ***– сигнатура, що містить бінарні операції додавання, множення та унарну операцію комплексне спряження,*** $\left\| \, \left| I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N) \right| \, \right\|_{L_2(U_1 \times U_2 \times U_3 \times \ldots \times U_N)} = 1$.

Область значення індикаторної функції $I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)$ квантового нечіткого N-арного відношення qfR відрізняється від областей значень індикаторних функцій $I_R(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)$ чіткого N-арного відношення R та $I_{fR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)$ нечіткого N-арного відношення fR аналогічно, як відрізняються між собою області значень індикаторних функцій з однієї сторони $I_{qfA}(u)$ квантової нечіткої множини qfA з іншої $I_A(u)$, $I_{fA}(u)$ чіткої A і нечіткої fA множин; $I_{qfR}(u_1,u_2)$ квантового нечіткого бінарного відношення qfR з одної сторони і $I_R(u_1,u_2)$, $I_{fR}(u_1,u_2)$ чіткого R та нечіткого fR бінарних відношень; та $I_{qfR}(u_1,u_2,u_3)$ квантового нечіткого тернарного відношення qfR з однієї сторони і $I_R(u_1,u_2,u_3)$, $I_{fR}(u_1,u_2,u_3)$ чіткого R та нечіткого fR тернарних відношень.

Кожній індикаторній функції $I_{qfR}(u_1,u_2,u_3,\ldots,u_N)$ квантового нечіткого N-арного відношення

qfR, яке задано на декартовому добутку $U_1 \times U_2 \times U_3 \times ... \times U_N$ скінчених універсумів $U_1 = \left\{ u_{1_{i_1}} \ : \ i_1 = \overline{1, m_1} \right\}$, $U_2 = \left\{ u_{2_{i_2}} \ : \ i_2 = \overline{1, m_2} \right\}$, $U_3 = \left\{ u_3 \ : \ i_{3_{i_3}} = \overline{1, m_3} \right\}$, …, $U_N = \left\{ u_{1_{i_N}} \ : \ i_N = \overline{1, m_N} \right\}$ можна однозначно поставити у відповідність гіперкуб квантового нечіткого N-арного відношення $m_1 \times m_2 \times m_3 \times ... \times m_N$ в якому на перетині i_1-ї, i_2-ї, i_3-ї, …, i_N-ї колонок поміщається значення

$$I_{qfR}\left(u_{1_{i_1}}, u_{2_{i_2}}, u_{3_{i_3}}, ..., u_{N_{i_N}}\right),\ i_1 = \overline{1, m_1},\ i_2 = \overline{1, m_2},\ i_3 = \overline{1, m_3},\ \ldots,\ i_N = \overline{1, m_N},$$

причому $\sum_{i_1=1}^{m_1} \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{i_3=1}^{m_3} \cdots \sum_{i_N=1}^{m_N} \left| I_{qfR}\left(u_{1_{i_1}}, u_{2_{i_2}}, u_{3_{i_3}}, ..., u_{N_{i_N}}\right) \right|^2 = 1$.

5. Властивості квантових нечітких відношень.

Однією з основних і важливих властивостей квантових нечітких відношень є встановлення рівності між квантовими нечіткими відношеннями.

ОЗНАЧЕННЯ 6. ***Квантові нечіткі відношення qfA та qfB називаються рівними між собою, тобто $qfA \overset{def}{=} qfB$, коли рівні між собою їх індикаторні функції, тобто $I_{qfA} = I_{qfB}$.***

Як частковий випадок з даного означення випливає встановлення рівності між квантовими нечіткими унарними відношеннями, тобто встановлення рівності між квантовими нечіткими множинами, а саме – квантові нечіткі множини рівні між собою тоді, коли рівні між собою їх індикаторні функції.

Серед квантових нечітких відношень чинне місце посідають квантові нечіткі бінарні відношення. А тому великий інтерес представляють саме їх властивості.

Поряд із встановленням рівності між квантовими нечіткими бінарними відношеннями, яка є частковим випадком загалом означеної рівності між квантовими нечіткими відношеннями, важливим моментом є встановлення симетричних квантових нечітких бінарних відношень.

ОЗНАЧЕННЯ 7. ***Квантове нечітке бінарне відношення qfR називається симетричним квантовим нечітким бінарним відношенням, коли виконується умова для його індикаторної функції***

$$I_{qfR}(u_1, u_2) = I_{qfR}(u_2, u_1),\ \forall u_1 \in U_1,\ \forall u_2 \in U_2.$$

У частковому випадку, коли область значень індикаторної функції квантових нечітких бінарних відношень є $[0,1]$ такі квантові нечіткі бінарні відношення володіють властивостями: рефлексивності, слабкої рефлексивності, сильної рефлексивності, антирефлексивності, слабкої антирефлексивності, сильної антирефлексивності, антисеметричності, асиметричності та ін., якими володіють нечіткі бінарні відношення.

6. Квантові нечіткі графи.

Однією із важливих прикладних інтерпретацій квантових нечітких відношень є квантові нечіткі графи. Важливість існування такої прикладної інтерпретації обумовлена двома факторами, по-перше, теоретичним – квантові нечіткі графи є узагальненням графів, зважених графів та загалом графів з мітками; по-друге, прикладним – суттєвим зменшенням обчислювальних ресурсів пам’яті при зберіганні графів, зважених графів та графів з мітками у вигляді квантових нечітких графів, які можуть зберігатися у квантовому регістрі.

ОЗНАЧЕННЯ 8. ***Квантовим нечітким графом $qfG(V, E, qfV, qfE)$ називається сукупність не порожньої множини V (множини вершин), множини E двоелементних підмножин V (множини ребер), qfV квантового нечіткого унарного відношення на множині V (індикаторна функція I_{qfV} якого задає комплексно значні мітки на множині вершин V), qfE квантового нечіткого бінарного відношення на множині E (індикаторна функція I_{qfE} якого задає комплексно значні мітки на множині E).***

Приклади квантових нечітких графів $qfG(V, E, qfV, qfE)$ та $qf\tilde{G}\left(\tilde{V}, \tilde{E}, qf\tilde{V}, qf\tilde{E}\right)$ наведені на рис. 1 а, б.

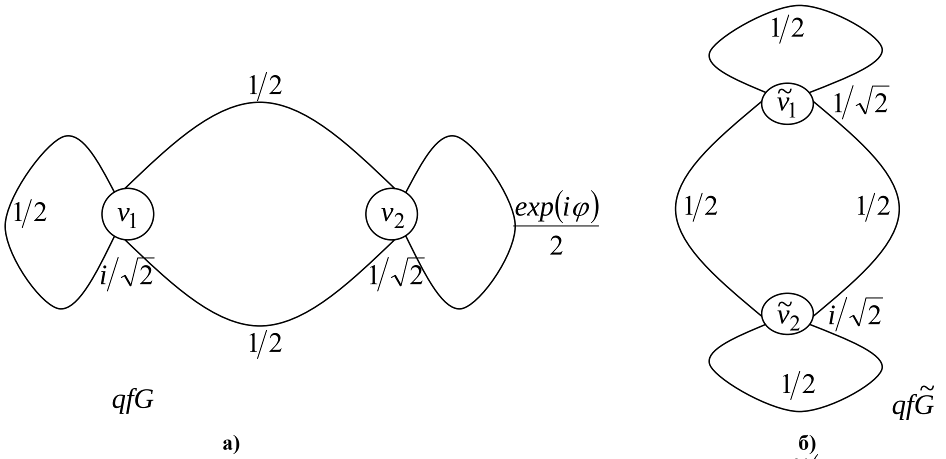

Рис. 1. Графічне зображення квантових нечітких графів $qfG(V, E, qfV, qfE)$ та $qf\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E}, qf\tilde{V}, qf\tilde{E})$.

Квантовий нечіткий граф $qfG(V, E, qfV, qfE)$ задається вершинами $V = \{v_1, v_2\}$ комплексно значні мітки, яких задаються індикаторною функцією

$$I_{qfV} = \frac{i}{\sqrt{2}} v_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} v_2$$

квантового нечіткого унарного відношення qfV та ребрами

$$E = \{(v_1, v_1),\ (v_1, v_2),\ (v_2, v_1),\ (v_2, v_2)\}$$

комплексно значні мітки яких задаються індикаторною функцією

$$I_{qfE} = \frac{1}{2}(v_1, v_1) + \frac{1}{2}(v_1, v_2) + \frac{1}{2}(v_2, v_1) + \frac{1}{2} exp(i\varphi)(v_2, v_2)$$

квантового нечіткого бінарного відношення qfE. Квантовий нечіткий граф $qf\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E}, qf\tilde{V}, qf\tilde{E})$ задається вершинами $\tilde{V} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$, комплексно значні мітки яких задаються індикаторною функцією

$$I_{qf\tilde{V}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{v}_1 + \frac{i}{\sqrt{2}} \tilde{v}_2$$

квантового нечіткого унарного відношення $qf\tilde{V}$ та ребрами

$$\tilde{E} = \{(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1),\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2),\ (\tilde{v}_2, \tilde{v}_1),\ (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\}$$

комплексно значні мітки яких задаються індикаторною функцією

$$I_{qf\tilde{E}} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2) + \frac{1}{2}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_1) + \frac{1}{2}(\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)$$

квантового нечіткого бінарного відношення $qf\tilde{E}$. Для представлення квантового нечіткого графа qfG в q-системах необхідно, щоб квантовий регістр q-систем містив що найменше три кубіти. Базисні стани $|0_1\rangle$, $|1_1\rangle$ першого кубіта в такому разі представлятимуть множину вершин $V = \{v_1, v_2\}$, тобто $|0_1\rangle \equiv v_1$, $|1_1\rangle \equiv v_2$, а хвильова функція

$$|\psi_1\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|0_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1_1\rangle$$

комплексно значні мітки цих вершин, тобто $|\psi_1\rangle \equiv I_{qfV}$. Базисні стани $|00_{23}\rangle$, $|01_{23}\rangle$, $|10_{23}\rangle$, $|11_{23}\rangle$ другого та третього кубітів представлятимуть множину ребер

$$E = \{(v_1, v_1),\ (v_1, v_2),\ (v_2, v_1),\ (v_2, v_2)\},$$

тобто $|00_{23}\rangle \equiv (v_1, v_1)$, $|01_{23}\rangle \equiv (v_1, v_2)$, $|10_{23}\rangle \equiv (v_2, v_1)$, $|11_{23}\rangle \equiv (v_2, v_2)$, а хвильова функція

$$|\psi_{23}\rangle = \frac{1}{2}|00_{23}\rangle + \frac{1}{2}|01_{23}\rangle + \frac{1}{2}|10_{23}\rangle + \frac{1}{2} exp(i\varphi)|11_{23}\rangle \ –$$

комплексно значні мітки цих ребер, тобто $|\psi_{23}\rangle \equiv I_{qfE}$. Подібний висновок має місце, коли потрібно представити квантовий нечіткий граф $qf\tilde{G}$ в q-системах. В цьому разі також необхідно, щоб квантовий регістр q-систем містив що найменше три кубіти. Базисні стани $|0_1\rangle$, $|1_1\rangle$ першого кубіта представлятимуть множину вершин $\tilde{V} = \{\tilde{v}_1, \tilde{v}_2\}$, тобто $|0_1\rangle \equiv \tilde{v}_1$, $|1_1\rangle \equiv \tilde{v}_2$, а хвильова функція

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0_1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1_1\rangle$$

комплексно значні мітки цих вершин, тобто $|\psi_1\rangle \equiv I_{qf\tilde{V}}$. Базисні стани $|00_{23}\rangle$, $|01_{23}\rangle$, $|10_{23}\rangle$, $|11_{23}\rangle$ другого та третього кубітів представлятимуть множину ребер

$$\tilde{E} = \{(\tilde{v}_1, \tilde{v}_1),\ (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2),\ (\tilde{v}_2, \tilde{v}_1),\ (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)\},$$

тобто $|00_{23}\rangle \equiv (\tilde{v}_1, \tilde{v}_1)$, $|01_{23}\rangle \equiv (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)$, $|10_{23}\rangle \equiv (\tilde{v}_2, \tilde{v}_1)$, $|11_{23}\rangle \equiv (\tilde{v}_2, \tilde{v}_2)$, а хвильова функція

$$|\psi_{23}\rangle = \frac{1}{2}|00_{23}\rangle + \frac{1}{2}|01_{23}\rangle + \frac{1}{2}|10_{23}\rangle + \frac{1}{2}|11_{23}\rangle$$

комплексно значні мітки цих ребер, тобто $|\psi_{23}\rangle \equiv I_{qf\tilde{E}}$.

Легко можна побачити, що квантовий нечіткий граф $qfG(V, E, qfV, qfE)$ є узагальненням графа $fG(V, E, fV, fE)$ з мітками, оскільки мітки вершин графа fG описуються індикаторною функцією $I_{fV}(v)$, $v \in V$ нечіткого унарного відношення fV, яке є частинним видом квантового нечіткого унарного відношення qfV, крім того мітки ребер графа fG також описуються індикаторною функцією $I_{fE}(v_1, v_2)$, $(v_1, v_2) \in E$ нечіткого бінарного відношення fE, яке є частинним видом квантового нечіткого бінарного відношення qfE.

Очевидно, що зважені графи та просто графи є також частинними видами квантових нечітких графів.

7. Квантові нечіткі орграфи, гіперграфи, мультиграфи, псевдографи.

В багатьох випадках у прикладних застосуваннях використовуються не просто графи, а орієнтовані графи (орграфи). Оскільки орграфи вказують не лише на існування зв'язку між вершинами, а і на напрямок дії зв'язку.

Для представлення орграфів у q-системах недостатньо поняття квантового нечіткого графа, оскільки він за означенням не враховує напрямку зв'язку між вершинами. В такому разі очевидною є потреба у введені поняття орієнтованого квантового нечіткого графа.

ОЗНАЧЕННЯ 9. ***Орієнтованим квантовим нечітким графом (квантовим нечітким орграфом) $qfG(V, E, qfV, qfE)$ називається сукупність – не порожньої множини V (множини вершин), множини E впорядкованих двоелементних підмножин V (множини орієнтованих ребер), qfV квантового нечіткого унарного відношення на множині V (індикаторна функція I_{qfV}, якого задає комплексно значні мітки на множині вершин V), qfE квантового нечіткого бінарного відношення на множині E (індикаторна функція I_{qfE}, якого задає комплексно значні мітки на множині E).***

Базуючись на попередньо введених поняттях квантового нечіткого графу та квантового нечіткого орієнтованого графу можна ввести, важливе для прикладних застосувань квантового процесора q-систем у розв'язанні задач, що містять нечіткість, поняття квантових нечітких гіперграфів.

ОЗНАЧЕННЯ 10. ***Квантовим нечітким гіперграфом $qfG(V, E, qfV, qfE)$ називається сукупність не порожньої множини V (множини вершин), множини E довільних підмножин V (множини гіперребер), qfV квантового нечіткого унарного відношення на множині V (індикаторна функція I_{qfV} якого задає комплексно значні мітки на множині вершин V), qfE квантового нечіткого бінарного відношення на множині E (індикаторна функція I_{qfE} якого задає комплексно значні мітки на множині E).***

Поряд з вище введеними поняттями слушним є, базуючись на них, ввести означення наступних важливих понять.

ОЗНАЧЕННЯ 11. ***Квантовим нечітким графом із петлями називається квантовий нечіткий граф, який містить ребра, що з'єднують вершину саму з собою.***

ОЗНАЧЕННЯ 12. ***Квантовим нечітким мультографом називається квантовий нечіткий граф, який містить більш ніж одне ребро між двома вершинами.***

ОЗНАЧЕННЯ 13. ***Квантовим нечітким псевдографом називається квантовий нечіткий граф, який є одночасно квантовим нечітким графом з петлями та квантовим нечітким мультографом.***

Висновки.

Вперше введено поняття: унарного квантового нечіткого відношення, бінарного квантового нечіткого відношення, тернарного квантового нечіткого відношення, N -арного квантового нечіткого відношення і ряд їх властивостей, а також поняття квантового нечіткого графа і його часткових різновидів: орієнтованого квантового нечіткого графа, квантового нечіткого гіперграфа, квантового нечіткого графа із петлями, квантового нечіткого мультиграфа, квантового нечіткого псевдографа на основі поняття квантової нечіткої множини вперше введеного автором у роботах [1-4], що може використовуватися як основа математичного формалізму збереження нечітких даних та неточних знань в квантовому регістрі q -процесора.

Література

1. Пастух О.А. Квантові нечіткі множини з комплексно значною характеристичною функцією і їх використання для квантового комп'ютера // Вісник Хмельницького національного ун-ту. – 2006. – Т.1. – № 2. – С.158-161.
2. Пастух О.А. Квантова нечітка випадкова подія та її маргінальна амплітуда ймовірності // Вісник Хмельницького національного ун-ту. – 2006. – № 5. – С.58-60.
3. Пастух О.А. Повний біунарний уноїд квантових нечітких булевих підмножин на просторі $[0;\infty)$ // Вісник Хмельницького національного ун-ту. – 2007. – № 1. – С.196-198.
4. Пастух О.А. Основи зв'язку між математичними формалізмами інформаційних систем, нечітких інформаційних систем та квантових інформаційних систем // Вісник Хмельницького національного ун-ту. – 2008. – № 3. – С.87-98.
5. Бурбаки Н. Основные структуры анализа. Теория множеств. – М.: Мир, 1965. – 457 с.
6. Архангельский А.В. Канторовская теория множеств. – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 112 с.
7. Казимиров Н.И. Введение в аксиоматическую теорию множеств: Учеб. пособие. – Петрозаводск, 2000. – 104 с.
8. Zadeh L.A. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, v.8, p.338-353.
9. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей. Приложение к представлению знаний в информатике: Пер. с фр. – М.: Радио и связь, 1990. – 288с.
10. Dempster A.P.. Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping. – Ann. Math. Statist. 1967, v.38. p.325-339.
11. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 81с.

Надійшла 19.1.2009 р.