УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

БАЗОВІ ВІСІМ СПІВВІДНОШЕНЬ ДЛЯ ШЕСТИ ВИДІВ РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ НЕПЕРЕРВНОЇ АНТАГОНІСТИЧНОЇ СТРОГО ВИПУКЛОЇ ГРИ

Розв'язано одну неперервну антагоністичну строго випуклу гру, що має шість видів загального розв'язку. Показано, як отримані шість видів загального розв'язку визначаються восьмома базовими співвідношеннями між коефіцієнтами ядра цієї гри.

There has been solved a continuous antagonistic strictly convex game, which has the six types of the general solution. It has been shown, how the derived six types of the general solution are determined by the eight base relationships between the kernel coefficients of this game.

Формулювання завдання дослідження

В області ігрового моделювання та моделювання конфліктно-керованих техніко-економічних систем існує актуальна проблема знаходження усіх розв'язків $\mathscr{S}$ випукло-вгнутих неперервних антагоністичних ігор [1 — 7], у яких ядро $H(x, y)$ у загальному виді задається на одиничному квадраті $D_H = X \times Y = [0; 1] \times [0; 1]$, де $x \in X = [0; 1]$ та $y \in Y = [0; 1]$ є чистими стратегіями першого та другого гравців відповідно. Значення гри позначатимемо V_{opt}, множини оптимальних стратегій першого та другого гравців позначатимемо $\mathscr{X}_{\text{opt}}$ та $\mathscr{Y}_{\text{opt}}$ відповідно. Визначимо $\mathscr{S} = \{\mathscr{X}_{\text{opt}}, \mathscr{Y}_{\text{opt}}, V_{\text{opt}}\}$ для неперервної антагоністичної строго випуклої гри з ядром

$$H(x, y) = ax^2 + bx + gxy + hy^2 + k\,, \tag{1}$$

яке задається на одиничному квадраті D_H, де $a > 0$, $k \in \mathbb{R}$, і коефіцієнти b та g набувають ненульових значень. А оскільки гра є строго випуклою, то $\forall\, x \in X$ та $\forall\, y \in Y$ має виконуватись $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} > 0$, звідки $\frac{\partial^2 H(x, y)}{\partial y^2} = 2h > 0$, тобто коефіцієнт $h > 0$.

Повні розв'язки заданої строго випуклої неперервної антагоністичної гри

1. $a > 0$, $b > 0$, $g > 0$. Максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x є очевидним:

$$\max_{x \in X} H(x, y) = \max_{x \in X}\left(ax^2 + bx + gxy + hy^2 + k\right) = \max\{H(0, y), H(1, y)\} = H(1, y) = a + b + gy + hy^2 + k\,. \tag{2}$$

Мінімум параболи (2) на сегменті Y також є очевидним,

$$\min_{y \in Y}\max_{x \in X} H(x, y) = \min_{y \in Y} H(1, y) = \min_{y \in Y}\left(a + b + gy + hy^2 + k\right) = H(1, 0) = a + b + k = V_{\text{opt}}\,, \tag{3}$$

причому він досягається у точці $y = y_{\text{opt}} = 0$, а, точніше кажучи, на множині оптимальних чистих стратегій другого гравця $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\}$, де $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}}$. Множину оптимальних чистих стратегій першого гравця X_{opt} спочатку спробуємо визначати за коренями x_1 та x_2 квадратного рівняння [1, с. 169; 8, с. 126; 9, с. 108; 10 — 19]

$$V_{\text{opt}} = H(x, y_{\text{opt}})\,. \tag{4}$$

У поточному випадку маємо таке рівняння (4):

$$V_{\text{opt}} = H(1, 0) = a + b + k = ax^2 + bx + k = a(x - 1)\left(x + \frac{a + b}{a}\right) + a + b + k = H(x, 0) = H(x, y_{\text{opt}})\,. \tag{5}$$

Коренями рівняння (5) є $x_1 = -\frac{a + b}{a}$ та $x_2 = 1$. Але $x_1 = -\frac{a + b}{a} < 0$, тому $x_1 \notin X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_2\} = \{1\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{1\}, \{0\}, a + b + k\}$.

2. $a > 0$, $b > 0$, $g < 0$. Матимемо $a + b + gy > 0$ при $y < -\frac{a + b}{g}$, тому максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x залежить від знаку виразу $a + b + g$.

2.1. $a > 0$, $b > 0$, $g < 0$; $a + b + g \leqslant 0$. Оскільки $-\frac{a + b}{g} \in (0; 1]$, то максимумом ядра (1) на X по змінній x є

$$\max_{x\in X} H(x,\,y)=\begin{cases}\max\{H(0,\,y),\,H(1,\,y)\}=H(1,\,y)=a+b+gy+hy^2+k,\ y\in\left[0;\,-\dfrac{a+b}{g}\right],\\ \max\{H(0,\,y),\,H(1,\,y)\}=H(0,\,y)=hy^2+k,\ y\in\left[-\dfrac{a+b}{g};\,1\right].\end{cases} \tag{6}$$

Для визначення мінімуму функції (6) на сегменті Y необхідно спочатку знайти точку мінімуму $y_{\min}$ параболи (2), яка, в принципі, може належати сегменту Y. Перша похідна параболи (2) по змінній y

$$\frac{d}{dy}H(1,\,y)=\frac{d}{dy}\left(a+b+gy+hy^2+k\right)=g+2hy \tag{7}$$

перетворюється у нуль у точці $y_{\min}=-\dfrac{g}{2h}$. Далі треба знати чи $y_{\min}=-\dfrac{g}{2h}\in\left[0;\,-\dfrac{a+b}{g}\right]$. Так як $-\dfrac{g}{2h}>0$ та

$$-\frac{g}{2h}-\left(-\frac{a+b}{g}\right)=-\frac{g}{2h}+\frac{a+b}{g}=\frac{2h(a+b)-g^2}{2hg}, \tag{8}$$

то $y_{\min}=-\dfrac{g}{2h}\in\left(0;\,-\dfrac{a+b}{g}\right)$ при $2h(a+b)-g^2>0$.

2.1.1. $a>0$, $b>0$, $g<0$; $a+b+g\leqslant 0$; $2h(a+b)-g^2>0$. Оскільки $y_{\min}\in\left(0;\,-\dfrac{a+b}{g}\right)$, то зауваживши, що

$$H(1,\,y_{\min})=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right)=a+b+gy_{\min}+h(y_{\min})^2+k=a+b-\frac{g^2}{2h}+h\frac{g^2}{4h^2}+k=a+b-\frac{g^2}{4h}+k, \tag{9}$$

$$H(1,\,y_{\min})=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right)<H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)=H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)=h\left(-\frac{a+b}{g}\right)^2+k=h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k, \tag{10}$$

знаходимо мінімум функції (6) на сегменті Y:

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{a+b}{g}\right]} H(1,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{a+b}{g};\,1\right]} H(0,\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{H(1,\,y_{\min}),\,\min\left\{H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right),\,H(0,1)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right),\,H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)\right\}=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right)=a+b-\frac{g^2}{4h}+k=V_{\text{opt}}. \tag{11}$$

Мінімум (11) досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{-\dfrac{g}{2h}\right\}=\{y_{\text{opt}}\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Виписуємо рівняння (4):

$$V_{\text{opt}}=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right)=a+b-\frac{g^2}{4h}+k=ax^2+bx-x\frac{g^2}{2h}+h\frac{g^2}{4h^2}+k=$$

$$=ax^2+x\left(b-\frac{g^2}{2h}\right)+\frac{g^2}{4h}+k=H\left(x,\,-\frac{g}{2h}\right)=H(x,\,y_{\text{opt}}); \tag{12}$$

$$ax^2+x\left(b-\frac{g^2}{2h}\right)+\frac{g^2-2h(a+b)}{2h}=a\left(x^2+x\frac{2bh-g^2}{2ah}+\frac{g^2-2h(a+b)}{2ah}\right)=a(x-1)\left(x-\frac{g^2-2h(a+b)}{2ah}\right)=0. \tag{13}$$

Із (13) слідує, що коренями рівняння (12) є $x_1=\dfrac{g^2-2h(a+b)}{2ah}$ та $x_2=1$. Але $\dfrac{g^2-2h(a+b)}{2ah}<0$, тому $x_1\notin X$ та множина $X_{\text{opt}}=\{x_2\}=\{1\}$. Отже, у даному випадку множина $\mathscr{X}_{\text{opt}}=X_{\text{opt}}=\{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S}=\left\{\{1\},\,\left\{-\dfrac{g}{2h}\right\},\,a+b-\dfrac{g^2}{4h}+k\right\}$.

2.1.2. $a>0$, $b>0$, $g<0$; $a+b+g\leqslant 0$; $2h(a+b)-g^2\leqslant 0$. Так як $y_{\min}\geqslant-\dfrac{a+b}{g}$, то зауваживши, що

$$H(1,\,0)>H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)=H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)\geqslant H(1,\,y_{\min})=H\left(1,\,-\frac{g}{2h}\right), \tag{14}$$

знаходимо мінімум функції (6) на сегменті Y, тобто мінімум

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\,y)=\min\left\{\min_{y\in\left[0;\,-\frac{a+b}{g}\right]} H(1,\,y),\ \min_{y\in\left[-\frac{a+b}{g};\,1\right]} H(0,\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\min\left\{H(1,\,0),\,H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)\right\},\,\min\left\{H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right),\,H(0,\,1)\right\}\right\}=$$

$$=\min\left\{H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right),\,H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)\right\}=H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)=H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)=h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k=V_{\text{opt}}\,, \tag{15}$$

котрий досягається на множині $Y_{\text{opt}}=\left\{-\frac{a+b}{g}\right\}=\left\{y_{\text{opt}}\right\}=\mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Виписуємо рівняння (4):

$$V_{\text{opt}}=H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)=h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k=ax^2+bx+gx\left(-\frac{a+b}{g}\right)+h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k=$$

$$=ax^2+bx+ax-bx+h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k=ax(x-1)+h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k=H\left(x,\,-\frac{a+b}{g}\right)=H\left(x,\,y_{\text{opt}}\right). \tag{16}$$

Коренями рівняння (16) є $x_1=0$ та $x_2=1$. Нехай $P(x_1)$ та $P(x_2)$ є імовірностями обирання чистих стратегій $x_1=x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}$ та $x_2=x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}$, тобто $\mathscr{X}_{\text{opt}}=\left\{X_{\text{opt}},\left\{P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right),\,P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right)\right\}\right\}$, причому $P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right)+P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right)=1$. Тоді вони задовольняють подвійній нерівності [1, с. 172; 17, с. 85]

$$H\left(x^{\langle 1\rangle},\,y_{\text{opt}}\right)P\left(x^{\langle 1\rangle}\right)+H\left(x^{\langle 2\rangle},\,y_{\text{opt}}\right)P\left(x^{\langle 2\rangle}\right)\leqslant V_{\text{opt}}\leqslant H\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle},\,y\right)P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right)+H\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle},\,y\right)P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}\right), \tag{17}$$

де $y\neq y_{\text{opt}}$, та $x^{\langle 1\rangle}\neq x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}$, або $x^{\langle 2\rangle}\neq x_{\text{opt}}^{\langle 2\rangle}$, або $P\left(x^{\langle 1\rangle}\right)\neq P\left(x_{\text{opt}}^{\langle 1\rangle}\right)$. Тоді імовірності $P(x_1)$ та $P(x_2)$ можна визначити з правої нерівності (17). Маємо нерівність:

$$V_{\text{opt}}=H\left(0,\,-\frac{a+b}{g}\right)=H\left(1,\,-\frac{a+b}{g}\right)=h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k\leqslant H(0,\,y)P(0)+H(1,\,y)P(1)=$$

$$=\left(hy^2+k\right)P(0)+\left(a+b+gy+hy^2+k\right)P(1)=hy^2+(a+b+gy)P(1)+k\,; \tag{18}$$

$$h\frac{(a+b)^2}{g^2}-hy^2=h\frac{(a+b)^2-g^2y^2}{g^2}=h\frac{(a+b+gy)(a+b-gy)}{g^2}\leqslant(a+b+gy)P(1). \tag{19}$$

Якщо $a+b+gy>0$, то $y<-\frac{a+b}{g}$, $a+b-gy<2(a+b)$, $h\frac{(a+b-gy)}{g^2}<\frac{2h(a+b)}{g^2}$, тому із (19) отримуємо

$$h\frac{(a+b-gy)}{g^2}\leqslant P(1)\in\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{2h(a+b)}{g^2}-\varepsilon;\,1\right]. \tag{20}$$

Якщо ж $a+b+gy<0$, то $y>-\frac{a+b}{g}$, $a+b-gy>2(a+b)$, $h\frac{(a+b-gy)}{g^2}>\frac{2h(a+b)}{g^2}$, тому із (19) отримуємо

$$h\frac{(a+b-gy)}{g^2}\geqslant P(1)\in\lim_{\varepsilon\to 0}\left[0;\,\frac{2h(a+b)}{g^2}+\varepsilon\right]. \tag{21}$$

Отож, імовірність $P(1)$ визначається як перетин сегментів у правих частинах (20) і (21):

$$P(1)\in\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\left[0;\,\frac{2h(a+b)}{g^2}+\varepsilon\right]\bigcap\left[\frac{2h(a+b)}{g^2}-\varepsilon;\,1\right]\right\}=\left\{\frac{2h(a+b)}{g^2}\right\}, \tag{22}$$

тобто $P(1)=\frac{2h(a+b)}{g^2}$, а $P(0)=1-P(1)=1-\frac{2h(a+b)}{g^2}=\frac{g^2-2h(a+b)}{g^2}$. Таким чином, у розглянутому випадку

$$\mathscr{X}_{\text{opt}}=\left\{\{0,\,1\},\,\left\{\frac{g^2-2h(a+b)}{g^2},\,\frac{2h(a+b)}{g^2}\right\}\right\}, \tag{23}$$

$$\mathscr{S}=\left\{\left\{\{0,\,1\},\,\left\{\frac{g^2-2h(a+b)}{g^2},\,\frac{2h(a+b)}{g^2}\right\}\right\},\,\left\{-\frac{a+b}{g}\right\},\,h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k\right\}. \tag{24}$$

2.2. $a>0$, $b>0$, $g<0$; $a+b+g>0$. Із (6) слідує, що максимумом ядра (1) на X по x є (2).

2.2.1. $a>0$, $b>0$, $g<0$; $a+b+g>0$; $2h+g\geqslant 0$. Тут стратегія $y_{\min}=-\frac{g}{2h}\in(0;\,1]$, тому мінімум параболи (2) на сегменті Y

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) = \min_{y\in[0;\,1]} H(1,\, y) = H(1,\, y_{\min}) = H\left(1,\, -\frac{g}{2h}\right) = a+b-\frac{g^2}{4h}+k = V_{\text{opt}} \tag{25}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g}{2h}\right\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (12) є числа $x_1 = \frac{g^2-2h(a+b)}{2ah}$ та $x_2 = 1$. Але $-\frac{a+b}{g} > 1 \geqslant -\frac{g}{2h}$, звідки випливає нерівність $2h(a+b)-g^2>0$, тобто $\frac{g^2-2h(a+b)}{2ah}<0$, $x_1 \notin X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_2\} = \{1\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \left\{-\frac{g}{2h}\right\},\, a+b-\frac{g^2}{4h}+k\right\}$.

2.2.2. $a>0$, $b>0$, $g<0$; $a+b+g>0$; $2h+g<0$. Тут стратегія $y_{\min} = -\frac{g}{2h} > 1$, тому

$$H(1,\,0) > H(1,\,1) > H(1,\, y_{\min}) = H\left(1,\, -\frac{g}{2h}\right), \tag{26}$$

$$\min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) = \min_{y\in[0;\,1]} H(1,\, y) = \min\left\{H(1,\,0),\, H(1,\,1)\right\} = H(1,\,1) = a+b+g+h+k = V_{\text{opt}}, \tag{27}$$

де $Y_{\text{opt}} = \{1\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (4)

$$\begin{aligned} V_{\text{opt}} &= H(1,\,1) = a+b+g+h+k = ax^2+bx+gx+h+k = \\ &= a(x-1)\left(x+\frac{a+b+g}{a}\right)+a+b+g+h+k = H(x,\,1) = H\left(x,\, y_{\text{opt}}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

є $x_1 = -\frac{a+b+g}{a}$ та $x_2 = 1$. Але $x_1 = -\frac{a+b+g}{a} < 0$, тому $x_1 \notin X$ та $X_{\text{opt}} = \{x_2\} = \{1\}$. Отже, у даному випадку $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \{1\},\, a+b+g+h+k\right\}$.

3. $a>0$, $b<0$, $g>0$. Матимемо $a+b+gy>0$ при $y > -\frac{a+b}{g}$, але може бути як $a+b\leqslant 0$, так і $a+b>0$, тому максимум ядра (1) на сегменті X по змінній x залежить від знаків виразів $a+b$ та $a+b+g$.

3.1.1. $a>0$, $b<0$, $g>0$; $a+b<0$; $a+b+g\geqslant 0$. Оскільки $-\frac{a+b}{g}\in(0;\,1]$, то максимумом ядра (1) на X по x є функція

$$\max_{x\in X} H(x,\, y) = \begin{cases} \max\left\{H(0,\, y),\, H(1,\, y)\right\} = H(0,\, y) = hy^2+k,\ y\in\left[0;\, -\frac{a+b}{g}\right], \\ \max\left\{H(0,\, y),\, H(1,\, y)\right\} = H(1,\, y) = a+b+gy+hy^2+k,\ y\in\left[-\frac{a+b}{g};\, 1\right]. \end{cases} \tag{29}$$

Тут стратегія $y_{\min} = -\frac{g}{2h} < 0$, тому має місце подвійна нерівність

$$H(1,\, y_{\min}) = H\left(1,\, -\frac{g}{2h}\right) < H\left(1,\, -\frac{a+b}{g}\right) = H\left(0,\, -\frac{a+b}{g}\right) < H(1,\,1), \tag{30}$$

за допомогою якої визначаємо мінімум функції (29) на сегменті Y:

$$\begin{aligned} \min_{y\in Y}\max_{x\in X} H(x,\, y) &= \min\left\{\min_{y\in\left[0;\, -\frac{a+b}{g}\right]} H(0,\, y),\ \min_{y\in\left[-\frac{a+b}{g};\, 1\right]} H(1,\, y)\right\} = \\ &= \min\left\{\min\left\{H(0,\,0),\, H\left(0,\, -\frac{a+b}{g}\right)\right\},\, \min\left\{H\left(1,\, -\frac{a+b}{g}\right),\, H(1,\,1)\right\}\right\} = \\ &= \min\left\{\min\left\{k,\, h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k\right\},\, H\left(1,\, -\frac{a+b}{g}\right)\right\} = H(0,\,0) = k = V_{\text{opt}}. \end{aligned} \tag{31}$$

Цей мінімум досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \left\{y_{\text{opt}}\right\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями відповідного рівняння (4)

$$V_{\text{opt}} = H(0,\,0) = k = ax^2 + bx + k = ax\left(x + \frac{b}{a}\right) + k = H(x,\,0) = H(x,\,y_{\text{opt}}) \tag{32}$$

є $x_1 = 0$ та $x_2 = -\frac{b}{a}$. Але $x_2 = -\frac{b}{a} > 1$, тому $x_2 \notin X$, множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{x_1\} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{0\},\,\{0\},\,k\}$.

3.1.2. $a > 0$, $b < 0$, $g > 0$; $a + b < 0$; $a + b + g < 0$. Оскільки $-\frac{a+b}{g} > 1$, то максимумом ядра (1) на X по x є функція

$$\max_{x \in X} H(x,\,y) = \max_{x \in X}\left(ax^2 + bx + gxy + hy^2 + k\right) = \max\{H(0,\,y),\,H(1,\,y)\} = H(0,\,y) = hy^2 + k\,. \tag{33}$$

Мінімум цієї функції на сегменті Y

$$\min_{y \in Y}\max_{x \in X} H(x,\,y) = \min_{y \in Y} H(0,\,y) = \min_{y \in Y}\left(hy^2 + k\right) = H(0,\,0) = k = V_{\text{opt}} \tag{34}$$

досягається на множині $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Ясно, що множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{0\},\,\{0\},\,k\}$.

3.2. $a > 0$, $b < 0$, $g > 0$; $a + b > 0$. Так як $-\frac{a+b}{g} < 0$, то мають місце (2) та (3), звідки $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$, $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \{\{1\},\,\{0\},\,a + b + k\}$.

3.3. $a > 0$, $b < 0$, $g > 0$; $a + b = 0$. Тут мають місце (2) та (3), проте коренями рівняння (5) або, що те саме, рівняння (32) є $x_1 = -\frac{a+b}{a} = 0$ та $x_2 = 1$. Визначаємо імовірності $P(x_1)$ та $P(x_2)$ з правої нерівності (17):

$$\begin{gathered} V_{\text{opt}} = H(0,\,0) = H(1,\,0) = k \leqslant H(0,\,y)P(0) + H(1,\,y)P(1) = \\ = \left(hy^2 + k\right)P(0) + \left(a + b + gy + hy^2 + k\right)P(1) = hy^2 + (a + b + gy)P(1) + k = hy^2 + gyP(1) + k\,, \end{gathered} \tag{35}$$

звідки для $y \ne y_{\text{opt}} = 0$ отримуємо $P(1) \geqslant -\frac{hy^2}{gy} = -\frac{hy}{g}$. Але оскільки $-\frac{hy}{g} < 0$, то $P(1) \in [0;\,1] = X$. Таким чином, у розглянутому випадку

$$\mathscr{X}_{\text{opt}} = \{\{0,\,1\},\,\{1 - P(1),\,P(1)\}\}, \tag{36}$$

де імовірність обирання чистої стратегії $P(1) \in X$, а розв'язком гри є

$$\mathscr{S} = \{\{\{0,\,1\},\,\{1 - P(1),\,P(1)\}\},\,\{0\},\,k\}\,. \tag{37}$$

4.1.1. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g \leqslant 0$. Оскільки $-\frac{a+b}{g} \in (0;\,1]$, то максимумом ядра (1) на X по x є функція (6). Точка $y_{\min} = -\frac{g}{2h} > 0$, а із (8) випливає, що $y_{\min} = -\frac{g}{2h} \in \left(0;\,-\frac{a+b}{g}\right)$ при $2h(a + b) - g^2 > 0$.

4.1.1.1. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g \leqslant 0$; $2h(a + b) - g^2 > 0$. Мають місце формули (9) — (13), з яких зрозуміло, що розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\,\left\{-\frac{g}{2h}\right\},\,a + b - \frac{g^2}{4h} + k\right\}$.

4.1.1.2. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g \leqslant 0$; $2h(a + b) - g^2 \leqslant 0$. Мають місце формули (14) — (16), (18) — (23), а розв'язком гри є множина (24).

4.1.2. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g > 0$. Ясно, що маємо максимум (2), мінімум якого на сегменті Y залежить від того, чи $y_{\min} = -\frac{g}{2h} \in [0;\,1]$, тобто від знаку суми $2h + g$.

4.1.2.1. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g > 0$; $2h + g \geqslant 0$. Маємо значення гри (25), множину $Y_{\text{opt}} = \left\{-\frac{g}{2h}\right\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$, рівняння (12) і (13), звідки множина $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\,\left\{-\frac{g}{2h}\right\},\,a + b - \frac{g^2}{4h} + k\right\}$.

4.1.2.2. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g > 0$; $2h + g < 0$. Маємо (26) — (28), $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}} = \{1\}$,

$\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{1\}$, і розв'язком гри є $\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \{1\},\, a+b+g+h+k\right\}$.

4.2. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b < 0$. Очевидно, що мають місце (33) і (34), звідки $\mathscr{Y}_{\text{opt}} = Y_{\text{opt}} = \{0\}$, $\mathscr{X}_{\text{opt}} = X_{\text{opt}} = \{0\}$ та розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\{0\},\, \{0\},\, k\right\}$.

4.3. $a > 0$, $b < 0$, $g < 0$; $a + b = 0$. Маємо фактично (6) і (15), де $Y_{\text{opt}} = \{0\} = \{y_{\text{opt}}\} = \mathscr{Y}_{\text{opt}}$. Коренями рівняння (5) або (32) є $x_1 = 0$ та $x_2 = 1$. Так як для $y \neq y_{\text{opt}} = 0$ буде $gy < 0$, то з нерівності (35) отримуємо $P(1) \leqslant -\frac{hy^2}{gy} = -\frac{hy}{g}$, а при $-\frac{hy}{g} > 0$ та $y \in (0;1]$ це означає, що $P(1) = 0$. Тому тут $P(0) = 1 - P(1) = 1$, а розв'язком гри знову є $\mathscr{S} = \left\{\{0\},\, \{0\},\, k\right\}$.

Висновок

Розглянуті 15 випадків співвідношень коефіцієнтів ядра (1) можна згрупувати за отриманими розв'язками у вісім базисних співвідношень та представити у вигляді наступної таблиці:

Співвідношення між коефіцієнтами ядра гри при $a > 0$	Розв'язок гри $\mathscr{S} = \left\{\mathscr{X}_{\text{opt}},\, \mathscr{Y}_{\text{opt}},\, V_{\text{opt}}\right\}$
1. $g > 0$; $a + b > 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \{0\},\, a+b+k\right\}$
2. $g < 0$; $a + b > 0$; $a+b+g \leqslant 0$; $2h(a+b) - g^2 > 0$ 3. $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g > 0$; $2h + g \geqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \left\{-\frac{g}{2h}\right\},\, a+b-\frac{g^2}{4h}+k\right\}$
4. $g < 0$; $a + b > 0$; $a+b+g \leqslant 0$; $2h(a+b) - g^2 \leqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{\left\{[0,1],\, \left\{\frac{g^2-2h(a+b)}{g^2},\, \frac{2h(a+b)}{g^2}\right\}\right\},\, \left\{-\frac{a+b}{g}\right\},\, h\frac{(a+b)^2}{g^2}+k\right\}$
5. $g < 0$; $a + b > 0$; $a + b + g > 0$; $2h + g < 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{1\},\, \{1\},\, a+b+g+h+k\right\}$
6. $b < 0$, $g > 0$; $a + b < 0$ 7. $b < 0$, $g < 0$; $a + b \leqslant 0$	$\mathscr{S} = \left\{\{0\},\, \{0\},\, k\right\}$
8. $b < 0$, $g > 0$; $a + b = 0$	$\mathscr{S} = \left\{\left\{\{0,1\},\, \{1-P(1),\, P(1)\}\right\},\, \{0\},\, k\right\}$, де $P(1) \in [0;1] = X$

Отже, розглянута неперервна антагоністична гра з ядром (1) при $a > 0$ та $h > 0$ має шість видів загального розв'язку, які визначаються восьмома базовими співвідношеннями. У кожному з шести розв'язків множина оптимальних чистих стратегій другого гравця є одноелементною. Слід додати, що існує розв'язок, де будь-яка чиста стратегія першого гравця є оптимальною. Щодо наступних досліджень, то така гра має бути розв'язана для $a < 0$, після чого обидві групи розв'язків вдасться об'єднати та ще раз, уже остаточно, згрупувати.

Література

1. Романюк В. В. Чотири опорних співвідношення для чотирьох видів розв'язку однієї строго випуклої неперервної антагоністичної гри // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2008. — № 1. — С. 169 — 174.

2. Romanuke V. V. Convex game on the unit square with the payoff function that is the second power of the weighted strategies difference // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. — 2008. — № 1 (11). — С. 14 — 18.

3. Романюк В. В. Випукла гра на одиничному квадраті з ядром типу квадратичної форми // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету "Наука й економіка". — Випуск 1 (9), 2008. — С. 319 — 325.

4. Романюк В. В. Розв'язування однієї випуклої гри на одиничному квадраті з ядром, де є додатний зважений квадрат стратегії першого гравця // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2007. — № 5. — Т. 2. — С. 154 — 157.

5. Романюк В. В. До питання розв'язування випуклої гри на одиничному квадраті для ядер із сумою квадрата стратегії першої сторони та стратегії другої // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2007. — № 6. — Т. 2. — С. 272 — 276.

6. Романюк В. В. Строго випуклі ігри з функціями виграшу, які містять квадрат стратегії другої сторони та зважену стратегію першої або зважений добуток стратегій обох сторін // Всеукраїнський науково-виробничий журнал “Інноваційна економіка”. — № 4 (6), 2007. — С. 111 — 115.

7. Романюк В. В. Щодо питання розв’язування деяких випуклих ігор у загальному виді // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2008. — № 1. — Т. 1. — С. 177 — 185.

8. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

9. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 216 с.

10. Romanuke V. V. The convex game on the unit square with the kernel, that is the sum of the weighted strategies and their weighted product // Математическое моделирование, обратные задачи, информационно-вычислительные технологии: сборник статей VII Международной научно-технической конференции. Ч. II. — Пенза: РИО ПГСХА, 2007. — С. 73 — 77.

11. Романюк В. В. Розв’язки нестрого випуклої гри з від’ємним квадратом стратегії першого гравця // Всеукраїнський науково-виробничий журнал “Інноваційна економіка”. — № 1 (7), 2008. — С. 187 — 197.

12. Романюк В. В. Розв’язки однієї строго випуклої гри на одиничному квадраті з добутком чистих стратегій // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — 2007. — № 2. — С. 174 — 179.

13. Романюк В. В. До питання загального розв’язку однієї нескінченної антагоністичної гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2008. — № 2. — С. 34 — 38.

14. Романюк В. В. Строго випукла гра зі зваженим добутком стратегій та квадратом стратегії першого гравця // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2008. — № 3. — С. 249 — 255.

15. Романюк В. В. Представлення одинадцяти випадків загального розв’язку однієї нестрого випуклої гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2008. — № 4. — С. 184 — 191.

16. Romanuke V. V. A strictly convex game on the unit square and its solution five versions // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету “Наука й економіка”. — Випуск 4 (12), 2008. — С. 381 — 388.

17. Романюк В. В. Загальні розв’язки однієї неперервної антагоністичної гри // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету “Наука й економіка”. — Випуск 4 (8), 2007. — С. 73 — 100.

18. Романюк В. В. Знаходження семи варіантів розв’язку однієї неперервної антагоністичної гри з від’ємним коефіцієнтом перед квадратом стратегії першої сторони та додатним коефіцієнтом перед стратегією першої сторони // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2008. — № 4. — Т. 2. — С. 181 — 193.

19. Романюк В. В. Визначення усіх варіантів розв’язку однієї неперервної антагоністичної гри з чотирма ненульовими параметрами ядра // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. — 2008. — № 5. — Т. 1. — С. 252 — 260.

Надійшла 3.12.2008 р.