

## ТЕОРЕТИЧНІ ПОЛОЖЕННЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ КРИВИХ АБРИСІВ

*Викладено теоретичні основи математичного опису конфігурації абрисів на основі кривих Безьє.*

*Представлены теоретические основы математического описания конфигурации абрисов на основе кривых Безье.*

*The fundamental theory of the mathematical description of the configuration of dwell angles are submitted (shown) on the basis of curves Bez'e.*

**Вступ та постановка задачі.** В попередніх роботах [1-3] концептуально викладені основи проектування деталей верху взуття (ДВВ), які кваліфікуються як аналітична методика. Для практичного застосування необхідно скласти аналітичний опис деякого каркасу, сформованого як сукупність абрисів поздовжніх та поперечних перетинів прототипу – тіла, в котрому враховані не тільки індивідуальні особливості стопи, але і додаткові об'єми, які забезпечують комфортні умови використання взуття. Там же була обґрунтована доцільність профілювання абрисів за допомогою кривих Безьє (КБ), які мають цілу низку позитивних властивостей, насамперед стосовно можливості профілювання довільних абрисів при відносно нескладному математичному апараті. Проте з огляду на задачі, для розв'язання яких власне і розроблялись КБ (в основному теорія машинної графіки [4-8]), питання в цих роботах розглядається в аспекті знаходження положення точок КБ при зміні положення керуючих точок. Подібна постановка цілком логічна, оскільки за допомогою певного інтерфейсу ці точки легко переміщуються (так званні «ручки»), що автоматично повинно призводити до зміни конфігурації кривої.

Для тих задач, які становлять мету цієї роботи, необхідно розробити теоретичні основи якраз оберненої процедури – по наявних точках кривої потрібно визначити положення керуючих точок за виключенням кінцевих, які теж входять в перелік заданих точок КБ. Призначення параметрів характерних точок профільних абрисів прототипу взуття запропоновані в [3].

**Загальні положення задачі.** Абриси, відображені за допомогою КБ довільного порядку в принципі можуть розбиватись на окремі криві меншого порядку (так звана процедура пониження порядку КБ [4]). Тому основна концепція запропонованого в даній роботі методу полягає в розгляді КБ як сукупності ділянок, котрі мають тільки три точки, що дозволяє їх ідентифікувати як КБ другого порядку. В цьому випадку положення крайніх точок ділянки (назвемо їх базовими) вважаємо в кожній конкретній процедурі незмінними, а алгоритм ідентифікації буде спрямований на знаходження середньої керуючої точки. Проте,

як це слідує з рис. 1, сама постановка подібної задачі неоднозначна. Дійсно координати будь-якої точки  $P_i$  залежать не тільки від координат базових точок  $P_{i-1}$  та  $P_{i+1}$ , але і від положення середньої керуючої точки  $B_i$  (на схемі не показана у зв'язку з її різним положенням для різних КБ, котрі тим не менше всі проходять через точку  $P_i$ ). Таким чином, у загальній постановці алгоритм пошуку положення середньої керуючої точки повинен базуватись на поступовому віддаленні керуючої точки від початкового положення до того, при якому КБ пройде точно через задану точку  $P_i$ . Найбільш просто в якості початкового положення керуючої точки вибрати положення заданої точки, оскільки положення наближені до базових точок контр продуктивні – крива повинна знаходитись всередині трикутника, сформованого базовими та керуючою точками. Таким чином тепер задача звелась до обґрунтування траєкторії віддалення керуючої точки в процесі виведення КБ на задану точку.

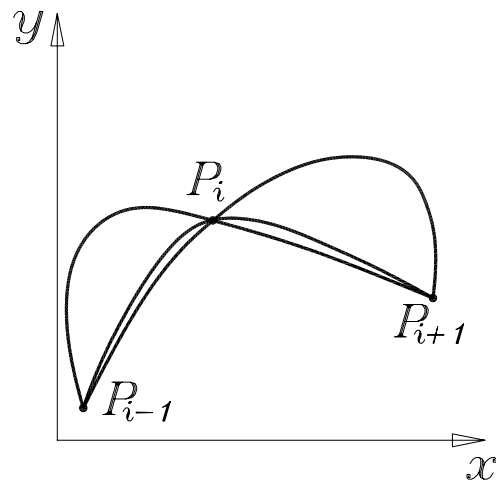


Рис. 1. Схема взаємного розташування точок кривої Безьє другого порядку

В загальному вигляді процедура ідентифікації кривих абрисів демонструється рис. 2. Майбутня крива задана декількома, наприклад чотирма, точками  $B_0, B_1, B_2, B_3$ , тому порядок кривої – третій (для розглянутої методики порядок кривої значення не має). Розбиття КБ на ділянки меншого порядку реалізується шляхом введення хорд, які з'єднують послідовно стосовно всіх точок за винятком базових попередню та наступну точки кривої (для рис. 2 це хорди  $B_0B_2$  та  $B_1B_3$  стосовно точок  $B_1$  та  $B_2$ ). Напрямок віддалення керуючої точки в процесі ідентифікації КБ може прокладатись за одним з двох принципів: керуюча точка рухається по дотичній до КБ від будь якої з трьох заданих точок – метод дотичної; керуюча точка рухається по лінії, яка в певній точці перетинає хорду та обов'язково проходить через середню точку ділянки (загальна назва для методів цієї групи – методи хорд). Останній принцип залежно від того, як вибирається точка перетину хорди розділяється на декілька методів, наприклад методи нормалі, бісектриси, медіани. Назви цих методів походять від того, яка з

особливих ліній трикутника  $B_{i-1} B_i B_{i+1}$ , котра обов'язково проходить через точку  $B_i$ , що в даний момент ідентифікується, перетинає хорду в точці  $S$  з відповідним індексом. В методі нормалі з точки, яка ідентифікується, опускається перпендикуляр на хорду. В цьому випадку точки КБ при переміщенні керуючої точки будуть віддалятися від хорди в напрямку перпендикуляра до неї. В разі використання бісектриси, як особливої лінії трикутника, КБ буде витягуватися рівномірно одночасно стосовно попередньої та наступної точок. Якщо ж застосовується медіана, то КБ витягується в напрямку від середини хорди. Крім цих передумов необхідно врахувати обставини, зумовлені самою природою КБ. Аналітичний опис КБ формується в значній мірі з використанням базису Бернштейна. Залежності цих базисів від параметру КБ фактично представляють собою вагові функції інтенсивності впливу положення керуючих точок на положення точок КБ. Для прикладу на рис. 3 показані базиси Бернштейна  $J$  для КБ другого порядку, оскільки саме на ділянці такого порядку передбачається розбивати криву абрису. Індекси позначення вагових функцій відповідають послідовності взаємного розташування точок на ділянці: попередня, досліджувана та наступні точки. З рис. 3 слідує, що положення попередньої базової точки найбільш вагомо впливає на положення досліджуваної точки, якщо вона знаходиться на початку КБ; положення середньої керуючої точки, яка власне ідентифікується – в середині ділянки КБ, наступної базової точки – в кінці ділянки. Особливість вагових функцій базисів полягає в тому, що при будь-якому значенні параметра  $t$  сума базисів дорівнює одиниці. Очевидно, що по завершенню послідовного дослідження всіх точок КБ положення перших з них дещо зміниться, тому обов'язковою є процедура повторного циклу або циклів ідентифікації, після кожного з яких положення точок повинно змінюватися щоразу в меншій мірі.

Розглянемо особливості методів ідентифікації кривих абрисів.

**Метод нормалі.** Особливістю цього методу є те, що досліджувана керуюча точка повинна знаходитись на нормалі до хорди, проведеної з вершини трикутника  $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ . В якості початкових даних задано масив точок, через які повинна пройти крива абрису  $B_0$  тотожна з  $P_0, P_1 \dots B_n$  тотожна з  $P_n$ . Послідовність обробки початкових даних зводиться до наступного.

1. Для всіх точок, крім базових, проводяться хорди, рівняння яких

$$y = y_{i-1} + K_i(x - x_{i-1}),$$

де  $y_{i-1}, x_{i-1}$  – тут і далі координати точок з відповідними індексами,  
 $K_i$  – кутовий коефіцієнт нахилу хорд,

$$K_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}.$$

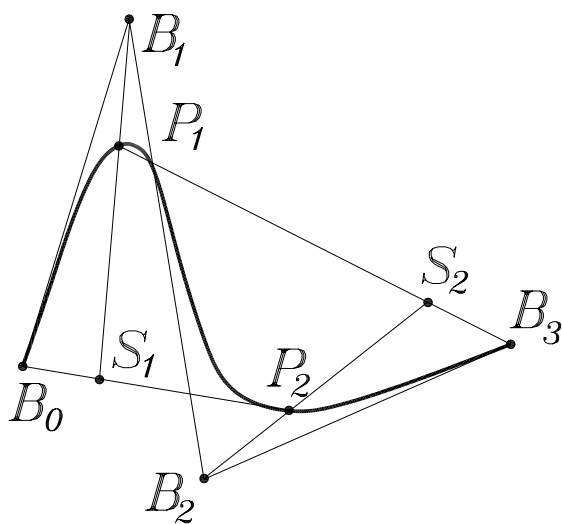


Рис. 2 Схема формування методу хорд

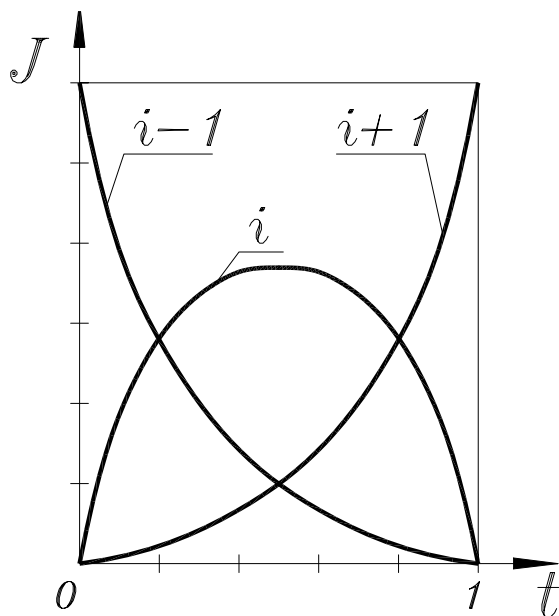


Рис. 3 Вагові функції базисів Бернштейна для кривих другого порядку

2. Через кожну досліджувану точку (крім базових) проводиться нормаль до хорди

$$y_{Ni}(x) = y_{Pi} - \frac{x - x_{Pi}}{K_i},$$

де  $y_{Pi}, x_{Pi}$  – координати досліджуваної точки.

Згідно з концепцією методу нормалей керуюча точка повинна знаходитись на цій нормалі.

3. В першому наближенні в якості керуючої точки вибирається задана точка КБ, яка в даний момент досліджується. З використанням цієї та інших керуючих точок проводиться КБ, рівняння якої

$$P(t) = \sum_{i=0}^n B_i J_{n,i}(t),$$

де  $P(t)$  – відповідні координати кривої абрису,

$t$  – параметр кривої,

$B_i$  – координати керуючих точок, включаючи базові,

$J_{n,i}(t)$  – базис Бернштейна

$$J_{n,i}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}.$$

Оскільки КБ буде розбиватись на ділянки другого порядку, то базиси Бернштейна для відповідних точок визначаються

$$J_{n,i-1}(t) = (1-t)^2,$$

$$J_{n,i}(t) = 2t(1-t),$$

$$J_{n,i+1}(t) = t^2.$$

Точка перетину КБ з нормаллю розраховується, виходячи з рівняння

$$P_y(t) = \sum_{i=0}^n B_{yi} J_{n,i}(t) = y_{Pi} - \frac{\sum_{i=0}^n B_{xi} J_{n,i}(t) - x_{Pi}}{K_i},$$

де  $B_{yi}, B_{xi}$  – координати керуючих точок відповідно по осях  $y$  та  $x$ .

Тоді значення параметра КБ, при якому має місце перетин КБ з нормаллю є рішенням за стандартною процедурою root попереднього рівняння

$$t = \text{root} \left( \sum_{i=0}^n B_{yi} J_{n,i}(t) - y_{Pi} + \frac{\sum_{i=0}^n B_{xi} J_{n,i}(t) - x_{Pi}}{K_i}, t \right),$$

а координати точок перетину

$$y_{Ni} = P_y(t) = \sum_{i=0}^n B_{yi} J_{n,i}(t),$$

$$x_{Ni} = P_x(t) = \sum_{i=0}^n B_{xi} J_{n,i}(t).$$

4. Визначається відхилення точки перетину КБ з нормаллю від заданого положення досліджуваної точки по координаті  $y$

$$\Delta_{yi} = y_{Pi} - y_{Ni}.$$

Фіксується знак відхилення для спрощення логіки подальших розрахунків шляхом введення флаг-індекса

$$K_{Fi} = 1 \quad \text{при} \quad \Delta_{yi} > 0,$$

$$K_{Fi} = -1 \quad \text{при} \quad \Delta_{yi} < 0.$$

5. Задається градієнт зміни координати  $y - dy$ , величина якого визначатиме точність підгонки КБ до заданих точок масиву. При цьому слід врахувати, що при грубій точності можливе зацикловання програми.

6. Циклічно змінюється координата керуючої точки

$$B_{yi} = B_{yi} + K_{Fi} \cdot dy$$

та виконуються пункти 3 і 4. Зміна значення флаг-індекса є умовою зупинки циклу або підвищення точності за рахунок зменшення градієнта зміни, наприклад – в 10 раз. Зупинка циклу ітерації можлива також як наслідок співставлення відхилення з прийнятою еталонною точністю.

7. Операції 3-6 проводяться для кожної точки заданого масиву окрім базових. Таким чином формується масив координат керуючих точок.

8. В другому та наступних наближеннях проводиться корекція положення керуючих точок  $B_1 \dots B_{n-1}$ , для чого в кожному циклі при нових значеннях координат керуючих точок, визначених в попередньому циклі, повторно виконуються процедури 3-7. Остаточні значення цих координат і є основою для побудови кривих абрисів.

**Метод дотичної.** В цьому методі можливі варіанти: задані дотичні тільки в базових точках; задані дотичні в базових та деяких керуючих; задані дотичні в усіх точках. Найбільш зручний для подальшого використання метод задавання дотичної – у вигляді кута, що відраховується наприклад проти годинникової стрілки від лінії, паралельної осі  $X$ , котра виходить з точки, для якої задана дотична, в напрямку осі  $X$ .

В усіх випадках ітерація точок, для яких вказана дотична, ведеться за правилами: кут дотичної відмірюється від попередньої точки в сторону наступної; керуюча точка повинна знаходитись тільки на дотичній; початкова точка ітерації має координату, рівну координаті наступної точки; знак приросту ординати (аналог флаг-індекса) додатній, якщо кут дотичної менший  $180^\circ$ , від'ємний якщо кут більше  $180^\circ$ , якщо кути дорівнюють  $90^\circ$  або  $270^\circ$  – в якості параметра ітерації приймається ордината, коли ж кути дорівнюють  $0^\circ$  або  $180^\circ$  – абсциса. Якщо дотична задана для декількох проміжних точок, то для забезпечення гладкості кривої попередня та наступна керуючі точки стосовно досліджуваної точки повинні лежати на одній дотичній.

Обов'язкова умова, яку потрібно дотриматись задаючи дотичну – дотична повинна проходити поза трикутником  $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ , оскільки при порушенні цього правила не може виконуватись одна з фундаментальних умов існування КБ – вона повинна знаходитись всередині багатокутника, сформованого керуючими точками.

**Метод бісектриси.** Принципова відмінність методу бісектриси від методу нормалі полягає тільки в тому, що кут біля досліджуваної точки ділиться навпіл прямою, яка і є напрямною для переміщення керуючої точки в процедурі ідентифікації кривої абрису. Точка перетину напрямної з хордою легко визначається, якщо врахувати властивість бісектриси трикутника: бісектриса ділить протилежну сторону трикутника у співвідношенні сторін, які утворюють кут

$$K_{Xi} = \frac{P_{i-1} S_{Xi}}{S_{Xi} P_{i+1}} = \frac{P_{i-1} P_i}{P_{i+1} P_i}$$

Тоді координати точки перетину напрямної з хордою дорівнюють

$$\begin{aligned} x_{Xi} &= x_{i-1} + K_{Xi} (x_{i+1} - x_{i-1}), \\ y_{Xi} &= y_{i-1} + K_{Xi} (y_{i+1} - y_{i-1}). \end{aligned}$$

**Метод медіани.** Цей метод відрізняється від попереднього тим, що напрямна з'єднає досліджувану точку з серединою хорди. В цьому випадку координати точки перетину напрямної з хордою

$$\begin{aligned} x_{Xi} &= x_{i-1} + 0,5(x_{i+1} - x_{i-1}) = 0,5(x_{i+1} + x_{i-1}), \\ y_{Xi} &= y_{i-1} + 0,5(y_{i+1} - y_{i-1}) = 0,5(y_{i+1} + y_{i-1}). \end{aligned}$$

**Аналіз методів.** Важлива властивість методу нормалі полягає в тому, що в разі, якщо керуюча точка знаходиться на нормалі, то точка перетину КБ з нормаллю завжди відповідає одному і тому ж значенню параметра.

Метод нормалі не може бути застосованим у випадку, коли точка перетину з хордою знаходиться поза хордою  $P_{i-1} P_{i+1}$ . Тоді точка  $P_i$  не може знаходитись на КБ, яка згідно з основною властивістю повинна бути розташованою всередині багатокутника, для ділянок кривих другого порядку – трикутника  $P_{i-1} P_i P_{i+1}$ . Умова неможливості використання методу нормалі

$$\sphericalangle P_i P_{i-1} P_{i+1} \wedge \sphericalangle P_{i-1} P_{i+1} P_i > 90^\circ$$

В разі, якщо один з цих кутів дорівнює  $90^\circ$ , керуюча точка повинна знаходитись на лінії  $P_{i-1} P_i$  або  $P_{i+1} P_i$ , які є нормаллями до хорди. Тоді ділянка КБ  $P_{i-1} P_i$  або, відповідно  $P_{i+1} P_i$  повинна реалізуватись за рахунок безкінечно малого приросту параметра  $t$ , що становить невизначеність та порушує умову безперервності та гладкості КБ. Сам метод забезпечує зміщення КБ рівномірно від хорди, проте, як було показано вище, його використання не завжди можливе, а перевірка умови застосування ускладнює математичний апарат.

Метод бісектриси рівномірно переміщують КБ відносно сторін трикутника вздовж середньої лінії кута. Для його застосування практично немає ніяких перешкод.

Метод медіани віддаляє КБ від середньої точки хорди. Позитивна сторона цього методу полягає ще й в простоті процедури знаходження точки перетину напрямної з хордою.

Метод дотичних в аспекті задач, пов'язаних з проектуванням ДВВ, доцільно використовувати тоді, коли необхідно забезпечити гладкість стику останньої та першої точок замкнутого абрису. Для спрощення задавання початкових даних для методу дотичних можливі варіанти:

- по умовчанням крайні точки мають горизонтальну або вертикальну дотичну (вид визначається перпендикуляром до першої та останньої хорд);
- за умовчанням універсальна програма передбачає застосування для кінцевих (базових) точок алгоритму методу дотичних.

**Висновок.** Розроблені теоретичні основи ітераційних процедур пошуку математичного опису кривих, за допомогою яких передбачається формувати абриси для побудови розгорток ДВВ.

### Література

1. Надопта Т. А. Передмова до розробки аналітичного методу проектування деталей верху взуття // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – № 3, т. 2. – С. 235-239.
2. Надопта Т. А. Застосування кривих Безьє в аналітичній моделі проектування деталей верху взуття // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – № 5. – С. 130-133.
3. Надопта Т. А. Моделювання профільних абрисів прототипу взуття з використанням кривих Безьє // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – № 6. – С. 222-226.
4. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики: Монография: Пер. со 2-го англ. изд. П. А. Монахова и др.; Под ред. Ю. М. Баяковского и др. – М.: Мир, 2001. – 604 с.: ил.
5. Роджерс Д. Алгоритмические основы машинной графики: Пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
6. Чириков С. В. Алгоритмы компьютерной графики (методы растривания кривых): Учебное пособие. – СПб.: РИО Санкт-Петербургского государственного института точной механики и оптики (технический университет), 2001. – 121 с.
7. Danielson P. E. Incremental curve generation // IEEE Transaction on Computers. – 1970. – V.C. – 19. – P. 783-793.
8. Шикин Е. В., Плис А. И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. – М.: Диалог-МИФИ, 1996. – 240 с.

Надійшла 5.12.2008 р.