$$k = \frac{\pi\, d^2{}_1}{4} \cdot k_1 + \frac{\pi\, d^2{}_2}{4} \cdot k_2 + \ldots + \frac{\pi\, d^2{}_n}{4} \cdot k_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\pi\, d^2{}_i}{4} \cdot k_i = \frac{\pi}{4} \sum_{i=1}^{n} k_i d_i \,, \tag{8}$$

де $d_i$ – діаметр $i$-го отвору;

$k_i$ – коефіцієнт повітропроникності $i$-го отвору.

Якщо всі отвори мають однакові діаметри ($d_i = d$), а відповідно і мають однаковий коефіцієнт повітропроникності ($k_i = k$), то з формули (2.7) отримаємо:

$$k = \frac{\pi}{4} \cdot k_0 \cdot d^2 \cdot n \,, \tag{9}$$

де $n$ – кількість пор; $d$ – діаметр отвору (пори), мм; $k_0$ – коефіцієнт повітропроникності одного отвору (пори), дм$^3$/ (м$^2$· с).

Зазначена формула для коефіцієнта повітропроникності пояснює характер одержаних експериментальних залежностей $k(n)$ і $k(d)$. Дійсно, як слідує з формули (9), коефіцієнт повітропроникності є пропорційним кількості отворів і квадрату діаметра.

Беручи до уваги, що діаметр пор, які розглядаються є значним (1-3 мм), то і проникнення води через них необхідно розглядати не як процес дифундування, а як фільтрацію. В такому випадку розглянуту математичну модель можна використовувати для описання процесу проникності через пористу перегородку не тільки повітря, а й води.

**Література**

1. Березненко М.П., Савчук Н.Г., Палій І.П. Системний підхід до забезпечення якості швейних виробів // Вісник ДАЛПУ- 1999. – № 2. – С.11-13.

2. Березненко С.Н. Эффективные свойства многослойных пакетов одёжных материалов // Проблемы лёгкой и текстильной промышленности Украины. – 2000. – № 3. – С. 34-39.

3. Привала В.О., Мичко А.А. Класифікація методів надання водозахисту одягу // Тези доповідей наукової конференції молодих вчених та студентів. – К., КНУТД, 2003. – Т.1. – С. 19.

4. Привала В.О., Мичко А.А., Олешко Н.О. Класифікація методів забезпечення захисту швейних виробів від вітру // Вісник ХНУ. – 2006. – № 5. – С. 190-192.

5. Склянников В.П., Афанасьева Р.Ф., Машкова Е.Н. Гигиеническая оценка материалов для одежды (Теоретические основы разработки). – М: Легпромбытиздат, 1985. – 144 с.

Надійшла 8.2.2009 р.

УДК 004.075

В.Е. ШАДХИН, Д.М. ИЩЕНКО, А.Н. ВЕСЕЛОВ
Черкасский государственный технологический университет

# ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ДВУХКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ

*У статті вирішена задача моделювання розподілу обчислювальних процесів в розподілених серверних системах, з використанням теорії масового обслуговування отримані формули, що дають граничний закон розподілу числа зайнятих каналів залежно від характеристик потоку заявок і продуктивності системи обслуговування, для випадку з нескінченним числом неоднакових приладів і чергою.*

**Введение.** Решение задачи моделирования двухканальной системы передачи данных является важной научно-технической задачей, так как позволяет разделить поток заявок на обслуживание между двумя параллельными каналами, что в свою очередь повышает быстродействие всей системы передачи данных и уменьшает вероятность возникновения коллизий. В рамках решения поставленной задачи предложена функция управления информационными потоками данных в сети массового обслуживания с ожиданием – сеть территориально распределенных серверов. В качестве критериев оценки производительности использован ряд характеристик работы системы:

- коэффициент загрузки системы – $\rho$ ;
- среднее количество заявок в системе – $\bar{k}$ ;

- среднее время пребывания заявки в системе – $\overline{T}_{пр}$ ;
- абсолютную пропускную способность – $A$ ;
- вероятность возникновения очереди – $p_{оч}$ .

Выделяем два ключевых момента, являющихся основой при создании системы распределения нагрузки; во-первых, равномерная загрузка серверов и, во-вторых, достижение максимума производительности системы. Критерием оценки производительности системы служит среднее количество заявок находящихся на обслуживании.

Исследуемую нами систему можно определить как систему массового обслуживания с параллельными каналами. При этом она характеризуется рядом параметров:

- количеством серверов;
- производительностью серверов;
- количеством пользователей системы, формирующих заявки.

Представим серверную систему с учетом описанных особенностей:

Сеть состоит из сети территориально распределенных серверов, каждый из которых обладает собственной производительностью ($\mu_n$); в состав сети входит множество клиентов, они формируют запросы и посылают на серверы заявки ($\lambda$); взаимосвязь между серверами и клиентами сети осуществляется средствами Интернет соединения; количество заявок в сети не ограничено и обусловлено тем, что клиент может несколько раз обращаться к серверной системе для получения каких-либо данных.

Допущения о пуассоновском характере потока заявок и об экспоненциальном времени распределения обслуживания ценны тем, что позволяют применить в теории массового обслуживания аппарат так называемых Марковских случайных процессов [1,2].

**Постановка задачи.** Применим данное утверждение к нашему случаю. Для большей наглядности представим сеть, состоящую из двух элементов (серверов) – *а* и *б,* обладающих разной интенсивностью обслуживания. Эти элементы в случайные моменты времени и не зависимо друг от друга заканчивают обработку поступившей на обслуживание заявки. Для анализа работы системы при постоянных условиях возьмем участок времени, на котором поток заявок в системе является простейшим или стационарным пуассоновским, т.к. удовлетворяет трем условиям:

1) удовлетворяет условию стационарности (постоянная плотность);
2) условие отсутствия последствий – заявки поступают, не зависимо друг от друга;
3) условие ординарности – заявки приходят по одиночке, а не парами или тройками.

Параметры потока заявок, для элементов *а* и *б*, различны и равны соответственно $\lambda_a$ и $\lambda_б$ . При поступлении заявки на вход системы один из каналов немедленно приступает к ее обслуживанию. Время, потраченное на обслуживание заявок, распределено по экспоненциальному закону [3] с параметром $\mu_a$ (если заявку использует элемент *а*) и $\mu_б$ (если заявку использует элемент *б*).

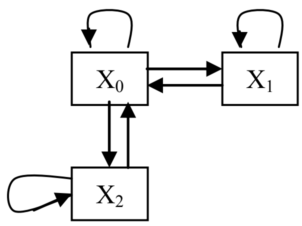

**Рис. 1. Схема возможных переходов**

Конечные множества состояний:

$x_0$ – все элементы свободны, в системе нет заявок,
$x_1$ – занят элемент *а*, обслуживается заявка,
$x_2$ – занят элемент *б*, обслуживается заявка.

Действительно, процесс обладает Марковским свойством. Пусть, например, в момент времени $t_0$ система находилась в состоянии $x_0$ (отсутствие заявок). Так как поток заявок представляется простейшим, то момент поступления заявки не зависит от того, сколько времени в системе не было заявок. Поэтому вероятность того, в будущем система останется в состоянии $x_0$ или уйдет из него, не зависит от «предыстории» процесса. Предположим теперь, что система в момент времени $t_0$ находится в состоянии $x_1$ (занят элемент *а*)**.** Таким образом, процесс, протекающий в исследуемой системе, является Марковским.

Для построения аналитических зависимостей, воспользуемся техникой решения задачи, рассмотренной в [4], для случая нескольких не одинаковых приборов.

Рассмотрим случай, когда в системе количество каналов обслуживание равно двум (n=2). Каждый канал обслуживания в системе имеет собственную интенсивность обслуживания. $\mu_1, \mu_2$. Интенсивности обслуживания каналов, по условиям задачи, имеют различное значение. Данное условие имеет ключевое значение, вследствие того, что нас интересует именно случай нескольких неодинаковых приборов.

Полная интенсивность обслуживания составит:

$$\mu = \sum_{i-1}^{2} \mu_i \tag{1}$$

Полученное уравнение определяет среднее число требований, обслуживаемых в единицу времени, когда все приборы заняты.

Выбираем прибор $i$ с вероятностью $\varphi_i$ , на которое поступает требование в момент отсутствия в системе других требований.

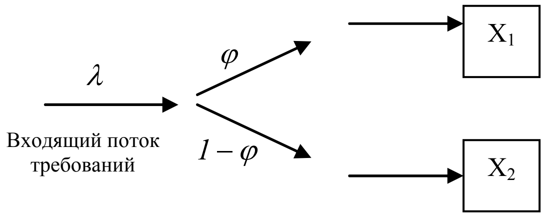


**Рис. 2. Двухканальная система с параллельными каналами**

Пусть,

$$\varphi_1 = \varphi \text{ и } \varphi_2 = 1 - \varphi,\ 0 \le \varphi \le 1 \qquad (2)$$

По условиям задачи, случай нескольких не одинаковых приборов, производительность одного из каналов будет меньше производительности другого, пусть $\mu_1 > \mu_2$. Таким образом, получим:

- при $\varphi = 0$ требование всегда выбирает медленно действующий канал ($X_2$, рис. 2);
- при $\varphi = 0{,}5$ требования случайно выбирает один из двух каналов;
- при $\varphi = 1$ требование всегда выбирает быстро действующий канал ($X_1$, рис. 2).

Возможны промежуточные значения $\varphi$.

Массовое обслуживание зависит от четырех параметров:
$\lambda$ – объем входящего потока данных;
$\mu_1, \mu_2$ – интенсивность обслуживания каналов;
$\varphi$ – вероятность выбора более «быстрого» или более «медленного» канала обслуживания.

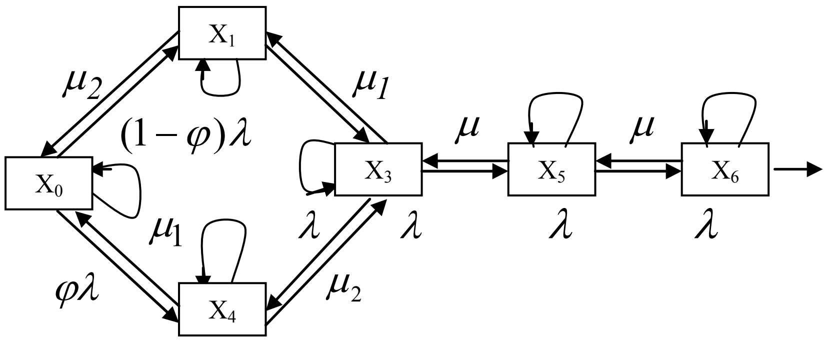


**Рис. 3. Граф состояний системы с параллельными и последовательными каналами**

Необходимо различать случай, когда занят прибор 1, от случая, когда занят прибор 2. Рассмотрим возможные состояния систем и их вероятности, как $p_1, p_2$.

$$p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\ p_3(t), \ldots,\ p_n(t) \qquad (3)$$

Для любого момента времени

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1 \qquad (4)$$

С помощью математического метода описания систем массового обслуживания [5] составим дифференциальные уравнения, для всех вероятностей начиная с $p_0(t)$. Определим момент времени $t$ и найдем вероятность $p_0(t + \Delta t)$ того, что в момент $t + \Delta t$ система будет находится в состоянии $X_0$ (все каналы свободны). Это может произойти по трем причинам:

*A* – в момент времени *t* система находится в состоянии $X_0$, а за время $\Delta t$ не перешла в состояние $X_1$.

*B* – в момент времени *t* система находилась в состоянии $X_1$, а за время $\Delta t$ канал освободился, и система перешла в состояние $X_0$.

*C* – в момент времени *t* система находилась в состоянии $X_2$, а за время $\Delta t$ канал освободился, и система перешла в состояние $X_0$.

По теореме сложения вероятностей получим

$$p_0(t + \Delta t) \approx P(A) + P(B) + P(C) \qquad (5)$$

Вероятность того, что в момент времени *t* система была в состоянии $X_0$, равна $p_0(t)$. Вероятность того, что за время $\Delta t$ не придет не одной заявки, равна $e^{-\lambda \Delta t}$.

$$e^{-\lambda \Delta t} \approx 1 - \lambda \Delta t \qquad (6)$$

Отсюда

$$P(A) \approx p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) \qquad (7)$$

Найдем Р (В). Вероятность того, что в момент времени t система была в состоянии $X_1$, равна $p_1(t)$. Вероятность того, что за время $\Delta t$ канал освободился, равна $1 - e^{-\mu_1 \Delta t}$.

$$1 - e^{-\mu_1 \Delta t} \approx \mu_1 \Delta t \qquad (8)$$

Получим

$$P(B) \approx p_1(t)\mu_1\Delta t \tag{9}$$

Аналогичным образом найдем *P (C)*:

$$1 - e^{-\mu_2\Delta t} \approx \mu_2\Delta t \tag{10}$$

Получим

$$P(C) \approx p_2(t)\mu_2\Delta t \tag{11}$$

В результате получим

$$p_0(t + \Delta t) \approx p_0(t)(1 - \lambda\Delta t) + \mu_2 p_1(t)\Delta t + \mu_1 p_2(t)\Delta t \tag{12}$$

При $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение для $p_0(t)$;

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu_2 p_1(t) + \mu_1 p_2(t) \tag{13}$$

По аналогии составим дифференциальные уравнения и для других вероятностей состояний системы:

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = [1 - (\lambda + \mu_2)]p_1(t) + \mu_1 p_3(t) + (1 - \varphi)\lambda p_0(t) \tag{14}$$

$$\frac{dp_2(t)}{dt} = [1 - (\lambda + \mu_1)]p_2(t) + \mu_2 p_3(t) + \varphi\lambda p_0(t) \tag{15}$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = [1 - (\lambda + \mu)]p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t) \tag{16}$$

при

$$n \geq 3,$$

где

$$p(t) = p_1(t) + p_2(t) \tag{17}$$

Таким образом, мы получим для вероятностей состояний систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = (1-\lambda)p_0(t) + \mu_1 p_2(t) + \mu_2 p_1(t) \\ \dfrac{dp_1(t)}{dt} = [1-(\lambda+\mu_2)]p_1(t) + \mu_1 p_3(t) + (1-\varphi)\lambda p_0(t) \\ \dfrac{dp_2(t)}{dt} = [1-(\lambda+\mu_1)]p_2(t) + \mu_2 p_3(t) + \varphi\lambda p_0(t) \\ \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = [1-(\lambda+\mu)]p_n(t) + \mu p_{n+1}(t) + \lambda p_{n-1}(t) \end{cases} \tag{18}$$

Следуя [4] получим формулы для вероятностей состояния системы при установившемся режиме обслуживания (при $t \to \infty$**).** Из уравнений (18), полагая, что все $p_k(k = 0,\ldots n)$ постоянными, а все производные равными нулю, исключая петли в графах, получим систему алгебраических уравнений:

При $n \geq 3$ получим:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu_2 p_1 + \mu_1 p_2 \\ (\lambda + \mu_2)p_1 = +\mu_1 p_3 + (1-\varphi)\lambda p_0 \\ (\lambda + \mu_1)p_2 = +\mu_2 p_3 + \varphi\lambda p_0 \\ \\ (\lambda + \mu)p_n = +\mu p_{n+1} + \lambda p_{n-1} \end{cases} \tag{19}$$

Введем обозначение отношение интенсивностей обслуживания $\alpha$

$$\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} = \frac{\lambda}{\mu} = \alpha \tag{20}$$

Новая величина – это приведенная плотность потока заявок, есть не что иное, как среднее число заявок, приходящееся на среднее время обслуживания одной заявки.

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda m_{t_{об}} \tag{21}$$

При условии, что

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \tag{22}$$

Решим систему (19) относительно неизвестных $p_0, p_1,\ldots p_n$.

Из первого уравнения получим:

$$p_1 = \frac{\alpha}{1+2\alpha}\frac{1+\gamma}{\gamma}(\alpha+1-\varphi)p_0 \qquad (23)$$

Из второго,

$$p_2 = \frac{\alpha}{1+2\alpha}(1+\gamma)(\alpha+\varphi)p_0 \qquad (24)$$

из любого уравнения,

$$p_n = \frac{\alpha^n}{1+2\alpha}\frac{1+\gamma}{\gamma}[1+(1+\gamma)\alpha-(1-\gamma)\varphi]p_0 \qquad (25)$$

где $\gamma = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Определим среднее число требований $\bar{k}$ находящихся в системе. Заметим, что плотность выходящего потока заявок, равна интенсивности входящего потока $\lambda$, усредненной по ***n*.**

$$\lambda = 0p_0 + \mu_2 p_1 + \mu_1 p_2 + \sum_{n=3}^{\infty}\mu p_n \qquad (26)$$

Отсюда среднее число требований находящихся в системе будет равно:

$$\bar{k} = \frac{\alpha(1+\gamma)[1+(1+\gamma)\alpha-(1-\gamma)\varphi]}{\gamma(1+2\alpha)+\alpha[1+(1+\gamma^2)\alpha-(1-\gamma^2)\varphi]} \qquad (27)$$

Величину $\bar{k}$ можно определить как критерий производительности системы, т.е. чем меньше значение $\bar{k}$ при одинаковом потоке заявок, тем быстрее работает система. Исследуем влияние на нее величин $\gamma$ (отношение интенсивностей обслуживания) и $\varphi$ (вероятность выбора канала). Для этого, например, примем приведенную плотность потока заявок $\alpha$ равной 0,6.

При анализе зависимости $\bar{k}$ от $\gamma$ при различных $\varphi$ и $\alpha$ = 0,6. $\bar{k}$ принимает наименьшее значение при $\varphi$ = 1 и $\gamma$ = 0,6.

Таким образом, можно с известным приближением сказать, что при убывании $\gamma$ от 1 до 0, $\bar{k}$ возрастает, достигая значения 1, соответствующего случаю системы с одним прибором (все это при $\alpha$ = 0,6, т.е. при одном и том же значений суммарной интенсивности обслуживания).

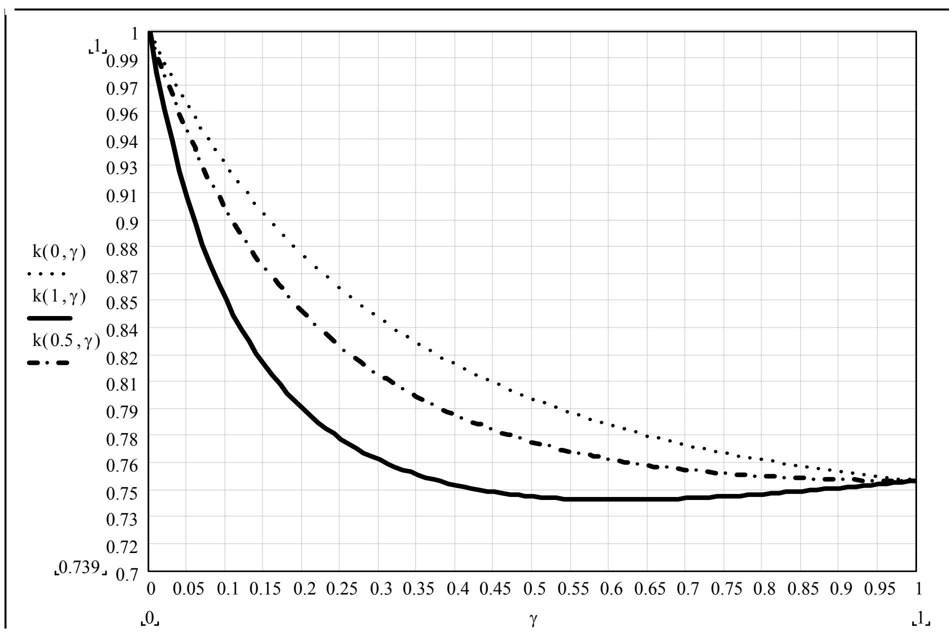


**Рис. 4. График зависимости $\bar{k}$ от $\gamma$**

Если $\gamma$ близко к 1, а $\varphi$ достаточно далеко от 0, то значение $\bar{k}$ близко к величине, соответствующей $\gamma$ =1. Например, при $\gamma$ = 0,6, имеем $\bar{k}$ = 0,762, для $\varphi$ = 0,5 и $\bar{k}$ = 0,739 для $\varphi$ = 1, таким образом, получим изменение величины $\bar{k}$ на ±1,6 % по сравнению со значением $\bar{k}$ = 0,75 при $\gamma$ = 1.

**Выводы.** Нами рассмотрен случай двух не одинаковых приборов с различной интенсивностью обслуживания. Для увеличения производительности системы введен параметр φ, изменяя значение которого, можно влиять на производительность системы. Оценкой производительности системы признано количество заявок находящихся в системе. В результате анализа работы системы прирост ее производительности составил 1,6 %. Данная работа дает возможность в будущем построить математическую модель системы с n параллельными каналами.

**Литература**


1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М.: государственное издательство физико-математической литературы, 1962. – 564 С.
2. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. – М.: Высшая школа. – 2000. – 366 С.
3. 0лзоева С.И. Моделирование и расчет распределенных информационных систем. – Улан-Удэ: издательство ВСГТУ, 2004. – 67 С.
4. Кофман А., Крюон Р. Массовое обслуживание. Теория и приложения. – М.: Мир, 1965. – 302 С.
5. Жожикашвили В.А., Вишневский В.М. Сети массового обслуживания. Теория и применение к сетям ЭВ. – М.: Радио и связь, 1988. – 192 с.: ил.
6. Колесников К.В., Шадхин В.Е., Прокопчук В.П. Разработка математической модели для расчета задержек в локальных вычислительных сетях // Материалы IV международной научно-практической конференции «Перспективные вопросы мировой науки-2008». – Болгария. София, 2008. – Том 21. – С. 9-16.


Надійшла 13.2.2009 р.

УДК 519.832.3

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

# МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ У МАТРИЧНІЙ ГРІ З ПУСТОЮ МНОЖИНОЮ СІДЛОВИХ ТОЧОК У ЧИСТИХ СТРАТЕГІЯХ З НЕВІДОМОЮ КІЛЬКІСТЮ ПАРТІЙ ГРИ

*Представлено метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній грі з невідомою кількістю партій гри, котрий полягає у розігруванні гравцем рівномірно розподіленої на одиничному напівсегменті випадкової величини та перевірці елементарних співвідношень, що дозволяє коректно обирати чисту стратегію у кожній партії гри. Розроблений метод є програмно дієвим, а швидкодія відповідного програмного модуля у порівнянні із двома альтернативними запрограмованими методами є найвищою.*

*There has been represented the method of the optimal mixed strategies realization in any matrix game with the unknown number of the game plays, that lies in raffling off the unit half-segment uniformly distributed random variate and verifying the elementary statements, what allows to select a pure strategy correctly in every game play. The elaborated method is programmatically effectual, and the operation speed of the corresponding program module in comparison with the two alternative programmed methods is the highest.*

**Передмова та формулювання завдання дослідження**

Теорія антагоністичних ігор є основою для найпростішого ігрового математичного моделювання, застосування якого є одним з найбільш простих способів дослідження та прогнозування конфліктно-керованих процесів. Для швидкого вирішення практичних задач, пов’язаних з прийняттям оптимальних рішень в умовах конфліктних ситуацій, перш за все використовують їх моделі у вигляді матричних ігор. Відомі методи розв’язування матричної гри з пустою множиною сідлових точок у чистих стратегіях дозволяють знайти її розв’язки у змішаних стратегіях, де довільна пара оптимальних стратегій гравців складає ситуацію рівноваги і задовольняє принципу оптимальності. Проте практична реалізація цього принципу оптимальності, тобто практична реалізація кожним гравцем його змішаних стратегій у реальних процесах, розроблена та досліджена досить поверхнево [1, 2]. Тим не менше, у роботі [1] показано як реалізувати оптимальні змішані стратегії у довільній матричній $2 \times 2$ -грі з кінцевим числом партій гри, де за основу взято розігрування гравцями у кожній партії гри двох незалежних рівномірно розподілених на напівсегменті $[0; 1)$ випадкових величин та визначення за певними співвідношеннями тих чистих стратегій гравців, які у даній партії гри необхідно обирати. На цій основі у роботі [2] розроблено метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній грі з невідомою кількістю партій гри, де кожен гравець розігрує рівномірно розподілені на одиничному напівсегменті випадкові величини, причому імовірності їх розігрування прив’язані до імовірностей обирання чистих стратегій зі спектру оптимальної змішаної стратегії цього гравця. Нагадаємо цей метод більш детально. Для довільної матричної $M \times N$ -гри,