

УДК 681.3+519.6

О.А. ПАСТУХ

Тернопільський державний технічний університет ім. І.Пулюя

## КВАНТОВІ НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ДРУГОГО РОДУ

Розглянуто уточнення означення поняття квантової нечіткої множини вперше введеного автором у його роботі [1], що розглядалося також в його роботах [2, 3] і уточнювалося автором в його роботі [4].

Вперше введено поняття: квантова нечітка множина другого роду, нормована квантова нечітка множина другого роду, дискретна квантова нечітка множина другого роду, континуальна квантова нечітка множина другого роду, дискретна нормована квантова нечітка множина другого роду, континуальна нормована квантова нечітка множина другого роду, квантова нечітка множина другого роду з дискретною областю значення, квантова нечітка множина другого роду з неперервною областю значення, квантова нечітка множина другого роду з дійсною нечітко-числовою областю значення, квантова нечітка множина другого роду з комплексною нечітко-числовою областю значення, квантова нечітка множина другого роду з дійсною нечіткою двійково-числовою областю значення.

Ключові слова: квантові нечіткі множини другого роду.

**Вступ.** Останнім часом все більшого поширення в прикладних застосуваннях набувають нечіткі інформаційні системи ( $f$ -системи), математичний формалізм функціонування яких ґрунтується на нечітких множинах другого (або загалом  $N$ -го) роду. До них належать, наприклад, інформаційно-пошукові системи, що опрацьовують лінгвістичні дані, експертні системи та ін. Основною і принциповою їх відмінністю від  $f$ -систем, математичний формалізм функціонування яких ґрунтується на нечітких множинах (нечітких множинах першого роду) є те, що нечіткі множини другого роду, які вони використовують можуть мати індикаторні функції, областю значень яких може бути множина значень тієї чи іншої лінгвістичної змінної, випадкові елементи (як узагальнення випадкової величини) та ін., тобто нечіткі множини першого роду. Перевага їх полягає в тому, що вони більш адаптовані до мислення людини, яка розмірковує словами при оцінюванні значень індикаторної функції, що спричиняє труднощі при представленні оцінки числом.

Основою математичного формалізму, який дає можливість економити обчислювальні ресурси при заміні функціонування  $f$ -систем функціонуванням квантових інформаційних систем ( $q$ -систем) є такий математичний об'єкт, як квантова нечітка множина, означення якої було вперше введено автором у його роботі [1], розглядалося ним також у його роботах [2, 3] і уточнювалося ним у роботі [4]. Однак, воно не може у повній мірі бути основою математичного формалізму при описі реалізації функціонування  $f$ -систем, що використовують нечіткі множини другого роду на базі  $q$ -систем. Очевидно, що в такому випадку є потреба вводити нові математичні об'єкти, а точніше розширювати поняття математичного об'єкта – квантова нечітка множина. І на цій основі збагачувати математичне забезпечення  $q$ -систем.

**Огляд існуючих відомостей.** Загалом математичному забезпеченню окремо роботи  $f$ -систем та  $q$ -систем присвячена велика кількість літературних джерел, наприклад [5-9], однак, зв'язку між математичними забезпеченнями  $f$ -систем та  $q$ -систем присвячено не так вже і багато робіт. В даному випадку слушно навести роботи автора [1-4], які ґрунтуються на вперше введеному автором понятті – квантовій нечіткій множині.

**Мета.** Розглянути основу математичного забезпечення, яке дає можливість замінити функціонування  $f$ -систем, що використовують у своїй роботі нечіткі множини другого роду, функціонуванням  $q$ -систем на базі розширення поняття квантової нечіткої множини.

**Постановка завдання.** Уточнити означення поняття квантової нечіткої множини і на цій основі розглянути її узагальнення у вигляді квантової нечіткої множини другого роду та часткових понять квантової нечіткої множини другого роду.

**Основна частина.** Основа математичного забезпечення  $f$ -систем ґрунтується на нечітких множинах. Основа математичного забезпечення  $f$ -систем, що використовують у своєму функціонуванні математичні моделі, які базуються на нечітких множинах з нечітко значними індикаторними функціями ґрунтується на розширенні поняття нечіткої множини, а саме на нечітких множинах другого роду.

Очевидною є логічна паралель. Якщо основа математичного забезпечення  $q$ -систем, які дають можливість реалізувати роботу  $f$ -систем на базі квантового процесора, ґрунтується на квантових нечітких множинах, то основа математичного забезпечення  $q$ -систем, які давали б можливість реалізувати роботу

$f$ -систем, що опрацьовують нечіткі дані другого роду, на базі квантового процесора, повинна ґрунтуватися на розширенні поняття квантової нечіткої множини, а саме на квантових нечітких множинах другого роду.

Спершу розглянемо уточнення поняття квантової нечіткої множини, яке належить автору даної статті.

**ОЗНАЧЕННЯ 1.** Квантовою нечіткою множиною (*quantum fuzzy set*)  $q_I fA = qfA$  універсуму  $U$  називається сукупність пар

$$\left\{ (u, I_{qfA}(u)): I_{qfA}(u) = |\psi_{qfA}(u)\rangle, u \in U, qfA \subset U \right\}, I_{qfA}(u) = |\psi_{qfA}(u)\rangle: U \rightarrow \mathbf{C} = \langle \tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}} \rangle,$$

де  $\mathbf{C} = \langle \tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}} \rangle$  – комплексна мультиплікативна абелева (комутативна) група з нулем,  $\tilde{C} = \{z: |z| \leq 1, z \in C\}$  – носій,  $C$  – множина комплексних чисел,  $\Omega_{\tilde{C}} = \{\bullet, *\}$  – сигнатура, що містить бінарну операцію множення та унарну операцію комплексного спряження.

**ОЗНАЧЕННЯ 2.** Нормованою квантовою нечіткою множиною  $q_{II} fA = qfA$  універсуму  $U$  називається сукупність пар

$$\left\{ (u, I_{qfA}(u)): I_{qfA}(u) = |\psi_{qfA}(u)\rangle, u \in U, qfA \subset U \right\}, I_{qfA}(u) = |\psi_{qfA}(u)\rangle: U \rightarrow \mathbf{C} = \langle \tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}} \rangle,$$

де  $\mathbf{C} = \langle \tilde{C}, \Omega_{\tilde{C}} \rangle$  – комплексна мультиплікативна абелева (комутативна) група з нулем,  $\tilde{C} = \{z: |z| \leq 1, z \in C\}$  – носій,  $C$  – множина комплексних чисел,  $\Omega_{\tilde{C}} = \{\bullet, *\}$  – сигнатура, що містить

бінарну операцію множення та унарну операцію комплексного спряження;  $\| |I_{qfA}(u)| \|_{L_2(U)} = 1$ .

Надалі під квантовою нечіткою множиною розуміється нормована квантова нечітка множина.

**ОЗНАЧЕННЯ 3.** Квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається сукупність пар

$$\left\{ (u, I_{q_{II} fA}(u)): u \in U, I_{q_{II} fA}(u): U \rightarrow \{I_{qfA}(v)\} = \{|\psi_{qfA}(v)\rangle\}, qfA \subset V, v \in V \right\},$$

де  $\{I_{qfA}(v)\} = \{|\psi_{qfA}(v)\rangle\}$  – множина індикаторних функцій квантових нечітких множин  $qfA$  універсуму  $V$ .

Залежно від універсуму  $U$  можна ввести різновиди квантових нечітких множин другого роду.

**ОЗНАЧЕННЯ 4.** Квантова нечітка множина другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається дискретною квантовою нечіткою множиною другого роду, коли універсум  $U$  є скінченною, або зліченою множиною.

**ОЗНАЧЕННЯ 5.** Квантова нечітка множина другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається континуальною квантовою нечіткою множиною другого роду, коли універсум  $U$  є континуальною множиною.

Оскільки, практично у квантовому реєстрі  $q$ -процесора можуть реалізуватися лише нормовані квантові нечіткі множини, то враховуючи означення 3, можна прийти до введення нормованих квантових нечітких множин другого роду.

**ОЗНАЧЕННЯ 6.** Нормованою квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається сукупність пар

$$\left\{ (u, I_{q_{II} fA}(u)): u \in U, I_{q_{II} fA}(u): U \rightarrow \{I_{qfA}(v)\} = \{|\psi_{qfA}(v)\rangle\}, qfA \subset V, v \in V \right\},$$

де  $\{I_{qfA}(v)\} = \{|\psi_{qfA}(v)\rangle\}$  – множина індикаторних функцій нормованих квантових нечітких множин  $qfA$  універсуму  $V$ , тобто  $\forall qfA$  з універсуму  $V$ ;

$$\| |I_{qfA}(v)| \|_{L_2(V)} = 1.$$

Аналогічно до означень 4 та 5 можна ввести наступні математичні об'єкти.

**ОЗНАЧЕННЯ 7.** Нормована квантова нечітка множина другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається дискретною нормованою квантовою нечіткою множиною другого роду, коли універсум  $U$  є скінченною, або зліченою множиною.

**ОЗНАЧЕННЯ 8.** Нормована квантова нечітка множина другого роду  $q_{II} fA$  універсуму  $U$  називається континуальною нормованою квантовою нечіткою множиною другого роду, коли універсум  $U$  є континуальною множиною.

Загалом, далі йтиме мова про нормовані квантові нечіткі множини другого роду.

Очевидним є інтерес розгляду випадку, коли у квантових нечітких множинах другого роду носій  $V$  області значення індикаторної функції є дискретним (чи зліченим), або неперервним. В такому разі можна прийти до розгляду частинного виду квантових нечітких множин другого роду, визначення яких наведено у означенні 3. А саме:

**ОЗНАЧЕННЯ 9.** Квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II}fA$  універсуму  $U$  з дискретною областю значення називається сукупність пар

$$\left\{ \left( u, I_{q_{II}fA}(u) \right): u \in U, I_{q_{II}fA}(u): U \xrightarrow{\text{def}} \{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}, qfA \subset V, v \in V \right\},$$

де  $\{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}$  – множина індикаторних функцій дискретних квантових нечітких множин  $qfA$  дискретного або зліченого універсуму  $V$ .

**ОЗНАЧЕННЯ 10.** Квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II}fA$  універсуму  $U$  з неперервною областю значення називається сукупність пар

$$\left\{ \left( u, I_{q_{II}fA}(u) \right): u \in U, I_{q_{II}fA}(u): U \xrightarrow{\text{def}} \{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}, qfA \subset V, v \in V \right\},$$

де  $\{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}$  – множина індикаторних функцій неперервних квантових нечітких множин  $qfA$  неперервного універсуму  $V$ .

Серед великої кількості можливих частинних видів квантових нечітких множин другого роду у даній роботі вводяться і розглядаються квантові нечіткі множини другого роду з дійсною нечітко-числовою областю значення.

**ОЗНАЧЕННЯ 11.** Квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II}fA$  універсуму  $U$  з дійсною нечітко-числовою областю значення називається сукупність пар

$$\left\{ \left( u, I_{q_{II}fA}(u) \right): u \in U, I_{q_{II}fA}(u): U \xrightarrow{\text{def}} \{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}, qfA \subset V \subseteq \mathbf{R}, v \in V \subseteq \mathbf{R} \right\},$$

де  $\{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}$  – множина індикаторних функцій дійсних квантових нечітких чисел  $qfA$  універсуму  $V \subseteq \mathbf{R}$ .

Очевидно при розгляді дискретних та неперервних дійсних квантових нечітких чисел в означенні 11, як логічний наслідок з нього випливають частинні означення – це квантові нечіткі множини другого роду з дійсною дискретною нечітко-числовою областю значення та квантові нечіткі множини другого роду з дійсною неперервною нечітко-числовою областю значення, очевидність яких є простою для розуміння і тому не наводиться у роботі.

Як узагальнення до деякої міри квантових нечітких множин другого роду з дійсною нечітко-числовою областю значення є розгляд квантових нечітких множин другого роду з комплексною нечітко-числовою областю значення.

**ОЗНАЧЕННЯ 12.** Квантовою нечіткою множиною другого роду  $q_{II}fA$  універсуму  $U$  з комплексною нечітко-числовою областю значення називається сукупність пар

$$\left\{ \left( u, I_{q_{II}fA}(u) \right): u \in U, I_{q_{II}fA}(u): U \xrightarrow{\text{def}} \{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}, qfA \subset V \subseteq \mathbf{C}, v \in V \subseteq \mathbf{C} \right\},$$

де  $\{ I_{qfA}(v) \} = \{ |\psi_{qfA}(v)| \}$  – множина індикаторних функцій комплексних квантових нечітких чисел  $qfA$  універсуму  $V \subseteq \mathbf{C}$ .

Аналогічно, як випливають логічні означення з означення 11, при розгляді дискретних та неперервних комплексних квантових нечітких чисел в означенні 12, як логічний наслідок з нього випливають частинні означення – це квантові нечіткі множини другого роду з комплексною дискретною нечітко-числовою областю значення та квантові нечіткі множини другого роду з комплексною неперервною нечітко-числовою областю значення, очевидність яких є простою для розуміння і тому не наводиться у роботі.

Серед всієї сукупності різновидів наведених означень квантових нечітких множин другого роду прямій технічній реалізації підлягають квантові нечіткі множини другого роду з дійсною двійковою числовою областю значення.

**ОЗНАЧЕННЯ 13.** Квантовою нечіткою множиною другого роду з дійсною нечіткою двійково-числовою областю значення називається значення якої є нечіткі двійкові числа.

**Висновки.** 1) Уточнено означення поняття квантової нечіткої множини. 2) Введено поняття: квантова нечітка множина другого роду, нормована квантова нечітка множина другого роду, дискретна квантова нечітка множина другого роду, континуальна квантова нечітка множина другого роду, дискретна нормована квантова нечітка множина другого роду, континуальна нормована квантова нечітка множина другого роду, квантова нечітка множина другого роду з дискретною областю значення, квантова нечітка

множина другого роду з неперервною областю значення, квантова нечітка множина другого роду з дійсною нечітко-числовою областю значення, квантова нечітка множина другого роду з комплексною нечітко-числовою областю значення, квантова нечітка множина другого роду з дійсною нечіткою двійково-числовою областю значення.

Введені поняття формують основу математичного забезпечення, яка дає можливість замінити функціонування  $f$ -систем, що використовують у своїй роботі нечіткі множини другого роду, функціонуванням  $q$ -систем.

### Література

1. Пастух О.А. Квантові нечіткі множини з комплексно значною характеристичною функцією і їх використання для квантового комп'ютера / О.А. Пастух // Вісник Хмельницького національного у-ту. – 2006. – Т.1. – № 2. – С. 158-161.
2. Пастух О.А. Квантова нечітка випадкова подія та її маргінальна амплітуда ймовірності / О.А. Пастух // Вісник Хмельницького національного у-ту. – 2006. – № 5. – С. 58-60.
3. Пастух О.А. Повний біунарний уноїд квантових нечітких булевих підмножин на просторі  $[0; \infty)$  / О.А. Пастух // Вісник Хмельницького національного у-ту. – 2007. – № 1. – С. 196-198.
4. Пастух О.А. Основи зв'язку між математичними формалізмами інформаційних систем, нечітких інформаційних систем та квантових інформаційних систем / О.А. Пастух // Вісник Хмельницького національного у-ту. – 2008. – № 3. – С. 87-98.
5. Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и ее приложений / Рыжов А.П. – М.: Изд-во МГУ, 2003. – 81 с.
6. Мацневский С.В. Нечеткие множества: Учебное пособие / Мацневский С.В. – Калининград: Изд-во КГУ, 2004. – 176 с.
7. Ожигов Ю.И. Квантовые вычисления / Ожигов Ю.И.: Учебно-методическое пособие. – М.: МГУ, 2003. – 104 с.
8. Китаев А. Классические и квантовые вычисления / Китаев А., Шень А., Вялый М. – М.: МПНМО, ЧеРо, 1999. – 192 с.
9. Нейман И. Математические основы квантовой механики / И.Нейман // Квантовые компьютеры и квантовые вычисления. – 2001. – Т.2. – № 1. – С. 38-42.

Надійшла 20.9.2009 р.

УДК 621.3

О.О. СЕМЕНОВА, А.О. СЕМЕНОВ, О.О. ВОЙЦЕХОВСЬКА  
Вінницький національний технічний університет

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ФАЗИ-ЛОГІЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

*У статті розроблені математичні моделі частотно-імпульсних, широтно-імпульсних і фазо-імпульсних елементів, які реалізують фазі-логічні операції доповнення, мінімуму, максимуму. Описано функціонування елементів фазі-логіки. Наведено часові діаграми роботи широтно-імпульсних елементів фазі-логіки.*

*In the article mathematical models of pulse-frequency, pulse-width, and pulse-phase elements, which implement fuzzy-logical operations of complement, minimum, and maximum. Operating of the fuzzy-logic elements is described. Time diagrams of pulse-width elements operation are illustrated.*

Ключові слова: фазі-логічні елементи, математичні моделі.

### Вступ

Застосування у системах автоматичного керування спеціалізованих пристроїв на основі фазі-логіки – фазі-контролерів – дозволяє підвищити точність, гнучкість та надійність керування. Складовою частиною таких пристроїв є елементи, які реалізують функції фазі-логіки. Важливим етапом синтезу елементів фазі-логіки є розроблення їх математичних моделей. Тому, для ефективного синтезу високоточних елементів фазі-логіки необхідно розробити математичні моделі елементів, які реалізують основні операції фазі-логіки.

Синтезу елементів фазі-логіки присвячені праці [1-4]. Математичні моделі елементів фазі-логіки розроблено у [3-5], але тут не враховується вид інформаційного сигналу.

У зв'язку з цим, метою даної роботи є підвищення ефективності проектування елементів фазі-логіки. Для досягнення мети необхідно розв'язати таку задачу – розробити математичні моделі елементів фазі-логіки з частотно-імпульсними, широтно-імпульсними та фазі-імпульсними інформаційними сигналами.

### Імпульсне кодування фазі-величин

На попередньому етапі розробки елементів, які функціонують за правилами фазі-логіки, необхідно