УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

МЕТОД РЕАЛІЗАЦІЇ ОПТИМАЛЬНИХ ЗМІШАНИХ СТРАТЕГІЙ В АНТАГОНІСТИЧНІЙ ГРІ, ДЕ ГРАВЕЦЬ ВОЛОДІЄ НЕЗЛІЧЕННОЮ МНОЖИНОЮ ЧИСТИХ СТРАТЕГІЙ, ПРИ ВІДОМІЙ КІЛЬКОСТІ ПАРТІЙ ГРИ

Представлено основи методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній антагоністичній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з наперед відомою кількістю партій гри, де гравець володіє незліченною множиною чистих стратегій. Розроблений метод базується на дискретизації оптимальних змішаних стратегій та визначенні гравцем тих чистих стратегій, які він обирає, за допомогою розігрування рівномірно розподілених на одиничному напівсегменті випадкових величин, а також при обчисленні поточних імовірностей обирання чистих стратегій іншим гравцем.

There have been represented the fundamentals of the method of realizing the optimal mixed strategies in a voluntary antagonistic game with the empty set of the saddle points in the pure strategies with the known quantity of the game parties in advance, where a player possesses the innumerable set of the pure strategies. The developed method is based on sampling the optimal mixed strategies and on the determination by the player of the being selected pure strategies, with help of raffling the uniformly distributed on the unit half-segment variates, and also by computing the current probabilities of selecting the pure strategies by the other player.

Ключові слова: антагоністична гра з порожньою множиною сідлових точок, дискретизація оптимальних змішаних стратегій.

Формулювання завдання дослідження

Прийняття оптимальних рішень в умовах конфліктних ситуацій пов’язано насамперед з розв’язуванням антагоністичних ігор. Відомі методи розв’язування матричних та неперервних антагоністичних ігор з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях дозволяють знаходити їх розв’язки у змішаних стратегіях, де довільна пара оптимальних змішаних стратегій гравців складає ситуацію рівноваги і, таким чином, задовольняє відомому принципу оптимальності [1, 2]. Практична реалізація гравцем його оптимальних змішаних стратегій у реальних процесах розроблена та досліджена у роботах [3 — 7]. У роботі [8] представлено основи методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою наперед кількістю партій гри. Розроблений у тій роботі метод базується на визначенні гравцем тих чистих стратегій, які він обирає, за допомогою розігрування рівномірно розподілених на одиничному напівсегменті випадкових величин, а також обчисленні поточних імовірностей обирання чистих стратегій іншим гравцем. Завданням теперішнього дослідження є розробка методу реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі, де принаймні один гравець володіє незліченною множиною чистих стратегій, а кількість майбутніх партій гри є відомою.

Метод реалізації оптимальної змішаної стратегії з нескінченним спектром

Нагадаємо, що згідно з результатами роботи [8] при відомій кількості партій гри $G < \infty$ метод реалізації оптимальної змішаної стратегії у матричній $M \times N$-грі, де $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, полягає у наступному. Нехай перший гравець володіє множиною $X = \{x_i\}_{i=1}^{M}$ чистих стратегій, а другий — множиною $Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}$ чистих стратегій. Нехай оптимальною змішаною стратегією першого гравця буде вектор

$$\widehat{\mathbf{X}} = \left[\widehat{p}_1 \quad \widehat{p}_2 \quad \ldots \quad \widehat{p}_{M-1} \quad \widehat{p}_M \right], \tag{1}$$

а оптимальною змішаною стратегією другого гравця — вектор

$$\breve{\mathbf{Y}} = \left[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \ldots \quad \breve{q}_{N-1} \quad \breve{q}_N \right]. \tag{2}$$

Ці вектори, звісно, задовольняють очевидним вимогам:

$$\widehat{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^M, \ \widehat{p}_i \in [0; 1] \ \forall \ i = \overline{1, M}, \ \sum_{i=1}^{M} \widehat{p}_i = 1, \tag{3}$$

$$\breve{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^N, \ \breve{q}_j \in [0; 1] \ \forall \ j = \overline{1, N}, \ \sum_{j=1}^{N} \breve{q}_j = 1. \tag{4}$$

За спектром

$$\operatorname{supp}\widehat{\mathbf{X}} = \left\{x_i \in X : \widehat{p}_i > 0\right\} = \left\{x_{i_k}\right\}_{k=1}^{K} \tag{5}$$

оптимальної стратегії (1) першого гравця формується вектор відповідних імовірностей

$$\widehat{\mathbf{X}}_0 = \left[\, \widehat{p}_{i_1} \quad \widehat{p}_{i_2} \quad \ldots \quad \widehat{p}_{i_{K-1}} \quad \widehat{p}_{i_K} \,\right], \tag{6}$$

де $K \leqslant M$, $i_k < i_{k+1}$ $\forall\ k = \overline{1,\, K-1}$ та $i_k \in \left\{i\right\}_{i=1}^{M}$ $\forall\ k = \overline{1,\, K}$. Аналогічно за спектром

$$\operatorname{supp}\breve{\mathbf{Y}} = \left\{y_j \in Y : \breve{q}_j > 0\right\} = \left\{y_{j_l}\right\}_{l=1}^{L} \tag{7}$$

оптимальної стратегії (2) другого гравця формується вектор відповідних імовірностей

$$\breve{\mathbf{Y}}_0 = \left[\, \breve{q}_{j_1} \quad \breve{q}_{j_2} \quad \ldots \quad \breve{q}_{j_{L-1}} \quad \breve{q}_{j_L} \,\right], \tag{8}$$

де $L \leqslant N$, $j_l < j_{l+1}$ $\forall\ l = \overline{1,\, L-1}$ та $j_l \in \left\{j\right\}_{j=1}^{N}$ $\forall\ l = \overline{1,\, L}$. Якщо позначити через $\mathbf{W} = \left(w_{ij}\right)_{M \times N}$ матрицю цієї гри, то значенням гри буде число

$$V_{\text{opt}} = \widehat{\mathbf{X}}\mathbf{W}\left(\breve{\mathbf{Y}}\right)^{T} = \sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} w_{ij}\,\widehat{p}_i\,\breve{q}_j \ . \tag{9}$$

Перший гравець попередньо обирає свої чисті стратегії, розігруючи $K-1$ рівномірно розподілену на напівсегменті $\left[0;\, 1\right)$ випадкову величину $\left\{\Theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\left\{\theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$, причому випадкова величина Θ_k розігрується завжди перед випадковою величиною Θ_{k+1} $\forall\ k = \overline{1,\, K-2}$. Якщо значення

$$\theta_u < \widehat{p}_{i_u} \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{u-1} \widehat{p}_{i_k}} \tag{10}$$

випадкової величини Θ_u, то перший гравець попередньо обирає чисту стратегію x_{i_u} $\forall\ u = \overline{1,\, K-1}$; інакше, якщо

$$\theta_u \geqslant \widehat{p}_{i_u} \frac{1}{1 - \sum\limits_{k=1}^{u-1} \widehat{p}_{i_k}}, \tag{11}$$

то перший гравець має розігрувати випадкову величину Θ_{u+1} $\forall\ u = \overline{1,\, K-2}$ та має попередньо обирати чисту стратегію x_{i_K} при $u = K-1$. Другий гравець попередньо обирає свої чисті стратегії, незалежно від першого гравця розігруючи $L-1$ рівномірно розподілену на напівсегменті $\left[0;\, 1\right)$ випадкову величину $\left\{\Xi_l\right\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\left\{\xi_l\right\}_{l=1}^{L-1}$, причому випадкова величина Ξ_l розігрується завжди перед випадковою величиною Ξ_{l+1} $\forall\ l = \overline{1,\, L-2}$. Якщо значення

$$\xi_v < \breve{q}_{j_v} \frac{1}{1 - \sum\limits_{l=1}^{v-1} \breve{q}_{j_l}} \tag{12}$$

випадкової величини Ξ_v, то другий гравець попередньо обирає чисту стратегію y_{j_v} $\forall\ v = \overline{1,\, L-1}$; інакше, якщо

$$\xi_v \geqslant \breve{q}_{j_v} \frac{1}{1 - \sum\limits_{l=1}^{v-1} \breve{q}_{j_l}}, \tag{13}$$

то другий гравець має розігрувати випадкову величину Ξ_{v+1} $\forall\ v = \overline{1,\, L-2}$ та має попередньо обирати чисту стратегію y_{j_L} при $v = L - 1$.

Реальний виграш першого гравця у g-й партії гри позначатимемо $V(g)$, де $g = \overline{1, G}$. У першій партії гри перший гравець при попередньому виборі чистої стратегії x_{i_r} за умови

$$\tilde{V}\left(x_{i_r}, 1\right) = \sum_{l=1}^{L} w_{i_r j_l} \breve{q}_{j_l} \geqslant V_{\text{opt}} - \delta_1(1) \tag{14}$$

обирає чисту стратегію x_{i_r} уже остаточно, де $r \in \{k\}_{k=1}^{K}$ і число

$$\delta_1(1) \leqslant V_{\text{opt}} - V_{\text{low}} = V_{\text{opt}} - \max_{i=\overline{1, M}} \min_{j=\overline{1, N}} w_{ij} \tag{15}$$

є допуском втрати першого гравця у першій партії гри. Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії x_{i_t} має місце

$$\tilde{V}\left(x_{i_t}, 1\right) = \sum_{l=1}^{L} w_{i_t j_l} \breve{q}_{j_l} < V_{\text{opt}} - \delta_1(1), \tag{16}$$

де $t \in \{k\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_{i_r} не буде виконано нерівність (14). Далі перший гравець для себе робить позначення

$$\begin{gathered}\breve{\mathbf{Y}}_0 = \left[\breve{q}_{j_1} \quad \breve{q}_{j_2} \quad \ldots \quad \breve{q}_{j_{L-1}} \quad \breve{q}_{j_L}\right] = \left[q_{j_1}(1) \quad q_{j_2}(1) \quad \ldots \quad q_{j_{L-1}}(1) \quad q_{j_L}(1)\right] = \\ = \left[\frac{c_1(1)}{G} \quad \frac{c_2(1)}{G} \quad \ldots \quad \frac{c_{L-1}(1)}{G} \quad \frac{c_L(1)}{G}\right],\end{gathered} \tag{17}$$

де $c_l(1) = G\breve{q}_{j_l} \quad \forall\, l = \overline{1, L}$. Взагалі, у g-й партії гри, де $g = \overline{2, G}$, перший гравець після вибору другим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії чистої стратегії y_{j_s}, $s \in \{l\}_{l=1}^{L}$, обчислює імовірність

$$\begin{gathered}q_{j_s}(g) = \frac{c_s(g-1) - 1}{G} \cdot \frac{1 + \operatorname{sign}\left[c_s(g-1) - 1\right]}{2} = \frac{c_s(g)}{G} = \\ = q_{j_s}(g-1) \frac{c_s(g-1) - 1}{c_s(g-1)} \cdot \frac{1 + \operatorname{sign}\left[c_s(g-1) - 1\right]}{2},\end{gathered} \tag{18}$$

а також імовірності

$$q_{j_l}(g) = q_{j_l}(g-1) \frac{1 - q_{j_s}(g-1) \dfrac{c_s(g-1) - 1}{c_s(g-1)} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{sign}\left[c_s(g-1) - 1\right]}{2}}{1 - q_{j_s}(g-1)} = \frac{c_l(g)}{G}, \;\; \forall\, l \in \left\{\overline{1, L}\right\} \setminus \{s\}. \tag{19}$$

Якщо при виборі деякої чистої стратегії x_{i_t} має місце

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}\left(x_{i_t}, g\right)}{g} = \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{l=1}^{L} w_{i_t j_l} q_{j_l}(g)}{g} < V_{\text{opt}} - \delta_1(g), \tag{20}$$

де $t \in \{k\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_{i_r} не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}\left(x_{i_r}, g\right)}{g} = \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{l=1}^{L} w_{i_r j_l} q_{j_l}(g)}{g} \geqslant V_{\text{opt}} - \delta_1(g), \tag{21}$$

де $r \in \{k\}_{k=1}^{K}$ і $0 < \delta_1(g) < \delta_1(g-1)$ $\forall\ g = \overline{2,\ G}$. Функція допусків втрат $\delta_1(g)$ між кожними двома сусідніми її коригуваннями визначається як

$$\delta_1(g) = \frac{1}{g\beta_1 g^{\frac{1}{a_1}}}, \tag{22}$$

де значення

$$\beta_1 \geqslant \frac{1}{V_{\text{opt}} - V_{\text{low}}} = \frac{1}{V_{\text{opt}} - \max\limits_{i=1,\ M} \min\limits_{j=1,\ N} w_{ij}} \tag{23}$$

визначається у точці $g = 1$ або у точках коригування, а степеневий показник $a_1 > 0$ можна покласти рівним одиниці. Згадане коригування функції (22) виникає у випадках, коли у g_0-й партії гри, де $g = g_0$, $g_0 \in \left\{\overline{2,\ G}\right\}$, неможливо виконати нерівність (21), і тоді першому гравцю необхідно скоригувати у точці g_0 функцію $\delta_1(g)$ так, щоб нерівність (21) виконувалась хоча б для однієї чистої стратегії x_{i_r} зі спектру (5).

Аналогічно має діяти і другий гравець. Він у першій партії гри при попередньому виборі чистої стратегії y_{j_s}, $s \in \{l\}_{l=1}^{L}$, за умови

$$\tilde{V}\left(y_{j_s},\ 1\right) = \sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_s} \widehat{p}_{i_k} \leqslant V_{\text{opt}} + \delta_2(1) \tag{24}$$

обирає чисту стратегію y_{j_s} уже остаточно, де число

$$\delta_2(1) \leqslant V_{\text{up}} - V_{\text{opt}} = \min\limits_{j=1,\ N} \max\limits_{i=1,\ M} w_{ij} - V_{\text{opt}} \tag{25}$$

є допуском втрати другого гравця у першій партії гри. Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії y_{j_h} має місце

$$\tilde{V}\left(y_{j_h},\ 1\right) = \sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_h} \widehat{p}_{i_k} > V_{\text{opt}} + \delta_2(1), \tag{26}$$

де $h \in \{l\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_{j_s} не буде виконано нерівність (24). Далі другий гравець для себе робить позначення

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{X}}_0 &= \left[\widehat{p}_{i_1} \quad \widehat{p}_{i_2} \quad \ldots \quad \widehat{p}_{i_{K-1}} \quad \widehat{p}_{i_K}\right] = \left[p_{i_1}(1) \quad p_{i_2}(1) \quad \ldots \quad p_{i_{K-1}}(1) \quad p_{i_K}(1)\right] = \\ &= \left[\frac{d_1(1)}{G} \quad \frac{d_2(1)}{G} \quad \ldots \quad \frac{d_{K-1}(1)}{G} \quad \frac{d_K(1)}{G}\right],\end{aligned} \tag{27}$$

де $d_k(1) = G\widehat{p}_{i_k}$ $\forall\ k = \overline{1,\ K}$. Тоді після вибору першим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії гри чистої стратегії x_{i_r}, $r \in \{k\}_{k=1}^{K}$, другий гравець обчислює імовірність

$$\begin{aligned}p_{i_r}(g) &= \frac{d_r(g-1)-1}{G} \cdot \frac{1+\operatorname{sign}\left[d_r(g-1)-1\right]}{2} = \frac{d_r(g)}{G} = \\ &= p_{i_r}(g-1)\frac{d_r(g-1)-1}{d_r(g-1)} \cdot \frac{1+\operatorname{sign}\left[d_r(g-1)-1\right]}{2},\end{aligned} \tag{28}$$

а також імовірності

$$p_{i_k}(g) = p_{i_k}(g-1)\frac{1-p_{i_r}(g-1)\dfrac{d_r(g-1)-1}{d_r(g-1)} \cdot \dfrac{1+\operatorname{sign}\left[d_r(g-1)-1\right]}{2}}{1-p_{i_r}(g-1)} = \frac{d_k(g)}{G},\ \forall\ k \in \left\{\overline{1,\ K}\right\} \setminus \{r\}. \tag{29}$$

Якщо при виборі деякої чистої стратегії y_{j_h} має місце

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m)+\tilde{V}\left(y_{j_h},\, g\right)}{g}=\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m)+\sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_h} p_{i_k}(g)}{g}>V_{\mathrm{opt}}+\delta_2(g), \tag{30}$$

де $h \in \{l\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_{j_s} не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m)+\tilde{V}\left(y_{j_s},\, g\right)}{g}=\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m)+\sum_{k=1}^{K} w_{i_k j_s} p_{i_k}(g)}{g}\leqslant V_{\mathrm{opt}}+\delta_2(g), \tag{31}$$

де $s \in \{l\}_{l=1}^{L}$ і $0<\delta_2(g)<\delta_2(g-1)\ \ \forall\ g=\overline{2,\, G}$. Функція допусків втрат $\delta_2(g)$ між кожними двома сусідніми її коригуваннями визначається як

$$\delta_2(g)=\frac{1}{g\beta_2 g^{\frac{1}{a_2}}}, \tag{32}$$

де значення

$$\beta_2 \geqslant \frac{1}{V_{\mathrm{up}}-V_{\mathrm{opt}}}=\frac{1}{\min\limits_{j=\overline{1,\, N}} \max\limits_{i=\overline{1,\, M}} w_{ij}-V_{\mathrm{opt}}} \tag{33}$$

аналогічно значенню (23) визначається у точці $g=1$ або у точках коригування, а степеневий показник $a_2>0$ можна покласти рівним одиниці. Як і для першого гравця, згадане коригування функції (33) виникає у випадках, коли у g_0-й партії гри, де $g=g_0$, $g_0 \in \left\{\overline{2,\, G}\right\}$, неможливо виконати нерівність (31), і тоді другому гравцю необхідно скоригувати у точці g_0 функцію $\delta_2(g)$ так, щоб нерівність (31) виконувалась хоча б для однієї чистої стратегії y_{j_s} зі спектру (7).

Проте коли один з гравців має нескінченну множину чистих стратегій, що належать спектру його оптимальної змішаної стратегії, то описаний метод реалізації оптимальної змішаної стратегії має бути адаптований до випадку $M=\infty$ або $N=\infty$. Надалі для спрощення викладень домовимося про те, щоб не виділяти спектр, оскільки це, власне, не принципово [9]. Припустимо, що перший гравець володіє неперервною множиною $X=[0;\,1]$ чистих стратегій, а також оптимальною змішаною стратегією $\widehat{p}(x)$ як функцією (рис. 1 у [9, с. 198]) від чистої стратегії $x \in X$, причому спектр цієї оптимальної змішаної стратегії є нескінченним [1, 2, 10]. Тут інтеграл

$$\int_0^1 \widehat{p}(x)\,dx=1 \tag{34}$$

еквівалентний сумі у формулі (3). Розіб'ємо сегмент $X=[0;\,1]$ на такі напівсегменти, щоб функція $\widehat{p}(x)$ на кожному з них була практично незмінною (рис. 2 у [9, с. 199]). Для цього необхідно виконання наступних двох умов для кожного напівсегменту:

$$\frac{d\widehat{p}(x)}{dx}\geqslant 0 \text{ або } \frac{d\widehat{p}(x)}{dx}\leqslant 0\ \ \forall\ x\in\left[x_{k-1};\, x_k\right) \text{ при } k=\overline{1,\, K}, \tag{35}$$

де $x_0 \equiv 0$ та $x_K \equiv 1$;

$$\left|\frac{d\widehat{p}(x)}{dx}\right|\leqslant a\ \ \forall\ x\in\left[x_{k-1};\, x_k\right) \text{ при } k=\overline{1,\, K}, \tag{36}$$

де параметр a може бути названий допустимою мінливістю оптимальної змішаної стратегії $\widehat{p}(x)$.

Очевидно, що цей параметр не може бути чітко визначений, оскільки залежить від необхідної точності і швидкості розрахунків, причому з його збільшенням обчислювальна швидкість зростає, а точність спадає. Тому приблизно $a \in (0.001;\, 0.01)$ або навіть $a \approx 0.1$. Крім того, ще двома умовами, котрі необхідно виконувати для кожного зазначеного напівсегменту, є умови достатньої гладкості ядра гри $W(x,\, y)$ на кожному з них, де y — чиста стратегія другого гравця з множини Y усіх його чистих стратегій. Для множини $Y = [0;\, 1]$ першою з цих умов є

$$\frac{\partial^2 W(x,\, y)}{\partial x \partial y} \geqslant 0 \text{ або } \frac{\partial^2 W(x,\, y)}{\partial x \partial y} \leqslant 0 \quad \forall\ x \in [x_{k-1};\, x_k) \text{ при } k = \overline{1,\, K} \text{ та } \forall\ y \in [0;\, 1]. \tag{37}$$

Якщо множина Y є дискретною скінченною множиною, тобто $Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}$ при $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то умова (37) буде формулюватися так:

$$\frac{\partial W(x,\, y_l)}{\partial x} - \frac{\partial W(x,\, y_{l-1})}{\partial x} \geqslant 0 \text{ або } \frac{\partial W(x,\, y_l)}{\partial x} - \frac{\partial W(x,\, y_{l-1})}{\partial x} \leqslant 0$$
$$\forall\ x \in [x_{k-1};\, x_k) \text{ при } k = \overline{1,\, K} \text{ та } l = \overline{2,\, L}. \tag{38}$$

Друга умова достатньої гладкості ядра гри для $Y = [0;\, 1]$ формулюється таким чином:

$$\left| \frac{\partial^2 W(x,\, y)}{\partial x \partial y} \right| \leqslant b \quad \forall\ x \in [x_{k-1};\, x_k) \text{ при } k = \overline{1,\, K} \text{ та } \forall\ y \in [0;\, 1]. \tag{39}$$

Для дискретної скінченної множини $Y = \{y_j\}_{j=1}^{N}$ умова (39) пишеться як

$$\left| \frac{\partial W(x,\, y_l)}{\partial x} - \frac{\partial W(x,\, y_{l-1})}{\partial x} \right| \leqslant b \quad \forall\ x \in [x_{k-1};\, x_k) \text{ при } k = \overline{1,\, K} \text{ та } l = \overline{2,\, L}, \tag{40}$$

де параметр b є допустимою мінливістю ядра, причому $b \in (0.001;\, 0.01)$ або навіть $b \approx 0.1$, оскільки ця мінливість також залежить від необхідної точності і швидкості розрахунків. Слід зауважити, що допустимі мінливості a та b не обов'язково мають бути одного порядку, оскільки функція $\widehat{p}(x)$ та поверхня $W(x,\, y)$ можуть змінюватись по-різному як за аргументом, так і із градієнтом.

Тепер для реалізації своєї оптимальної змішаної стратегії $\widehat{p}(x)$ перший гравець може використати множину чистих стратегій

$$\{x_{k-1}\}_{k=1}^{K} = \left\{0,\, \{x_k\}_{k=1}^{K-1}\right\} = \{0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{K-2},\, x_{K-1}\} \tag{41}$$

з відповідними імовірностями їх обирання

$$\{\widehat{p}(x_{k-1})\gamma\}_{k=1}^{K} = \left\{\widehat{p}(0)\gamma,\, \{\widehat{p}(x_k)\gamma\}_{k=1}^{K-1}\right\} = \{\widehat{p}(0)\gamma,\, \widehat{p}(x_1)\gamma,\, \widehat{p}(x_2)\gamma,\, \ldots,\, \widehat{p}(x_{K-2})\gamma,\, \widehat{p}(x_{K-1})\gamma\}, \tag{42}$$

де постійний крок дискретизації $\gamma = x_k - x_{k-1}$ при $k = \overline{1,\, K-1}$. Зауважимо, що в силу наближеної рівності

$$\sum_{k=1}^{K} \widehat{p}(x_{k-1})\gamma \approx 1 \tag{43}$$

матимемо лише границю

$$\lim_{\gamma \to 0} \sum_{k=1}^{K} \widehat{p}(x_{k-1})\gamma = 1, \tag{44}$$

а не точну одиничну суму імовірностей (42). Далі перший гравець попередньо обирає свої чисті стратегії, розігруючи $K-1$ рівномірно розподілену на напівсегменті $[0;\, 1)$ випадкову величину $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$, причому випадкова величина Θ_k розігрується завжди перед випадковою величиною

$\Theta_{k+1}\ \ \forall\ k=\overline{1,\ K-2}$. Якщо значення

$$\theta_u < \frac{\widehat{p}\left(x_{u-1}\right)\gamma}{\sum_{k=1}^{K}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)\gamma-\sum_{k=1}^{u-1}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)\gamma}=\frac{\widehat{p}\left(x_{u-1}\right)}{\sum_{k=1}^{K}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)-\sum_{k=1}^{u-1}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)} \tag{45}$$

випадкової величини Θ_u , то перший гравець попередньо обирає чисту стратегію $x_{u-1}\ \ \forall\ u=\overline{1,\ K-1}$; інакше, якщо

$$\theta_u \geqslant \frac{\widehat{p}\left(x_{u-1}\right)\gamma}{\sum_{k=1}^{K}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)\gamma-\sum_{k=1}^{u-1}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)\gamma}=\frac{\widehat{p}\left(x_{u-1}\right)}{\sum_{k=1}^{K}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)-\sum_{k=1}^{u-1}\widehat{p}\left(x_{k-1}\right)}, \tag{46}$$

то перший гравець має розігрувати випадкову величину $\Theta_{u+1}\ \ \forall\ u=\overline{1,\ K-2}$ та має попередньо обирати чисту стратегію x_{K-1} при $u=K-1$. Зазначимо, що у формулах (45) і (46) замість одиниці, яка фігурує у формулах (10) та (11) у знаменнику, покладено суму (43). Це зроблено для більш коректних розрахунків.

Нехай оптимальною змішаною стратегію другого гравця є (8). У першій партії гри перший гравець при попередньому виборі чистої стратегії x_r за умови

$$\tilde{V}\left(x_r,1\right)=\sum_{l=1}^{L}W\left(x_r,\ y_{j_l}\right)\breve{q}_{j_l}\geqslant V_{\text{opt}}-\delta_1\left(1\right) \tag{47}$$

обирає чисту стратегію x_r уже остаточно, де $r\in\left\{k-1\right\}_{k=1}^{K}$ і число

$$\delta_1\left(1\right)\leqslant V_{\text{opt}}-V_{\text{low}}=V_{\text{opt}}-\max_{x\in[0;\,1]}\min_{j=\overline{1,\,N}}W\left(x,\ y_j\right), \tag{48}$$

а значення гри

$$V_{\text{opt}}=\int_0^1\sum_{j=1}^{N}W\left(x,\ y_j\right)\breve{q}_j\widehat{p}\left(x\right)dx\ . \tag{49}$$

Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії x_t має місце

$$\tilde{V}\left(x_t,1\right)=\sum_{l=1}^{L}W\left(x_t,\ y_{j_l}\right)\breve{q}_{j_l}<V_{\text{opt}}-\delta_1\left(1\right), \tag{50}$$

де $t\in\left\{k-1\right\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\left\{\Theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\left\{\theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_r не буде виконано нерівність (47). Далі перший гравець для себе робить позначення (17), де $c_l\left(1\right)=G\breve{q}_{j_l}\ \ \forall\ l=\overline{1,\ L}$. У g -й партії гри, де $g=\overline{2,\ G}$, перший гравець після вибору другим гравцем у попередній $\left(g-1\right)$ -й партії чистої стратегії y_{j_s} , $s\in\left\{l\right\}_{l=1}^{L}$, обчислює імовірність (18), а також імовірності (19). Якщо при виборі деякої чистої стратегії x_t має місце

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V\left(m\right)+\tilde{V}\left(x_t,\ g\right)}{g}=\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V\left(m\right)+\sum_{l=1}^{L}W\left(x_t,\ y_{j_l}\right)q_{j_l}\left(g\right)}{g}<V_{\text{opt}}-\delta_1\left(g\right), \tag{51}$$

де $t\in\left\{k-1\right\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\left\{\Theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\left\{\theta_k\right\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_r не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V\left(m\right)+\tilde{V}\left(x_r,\ g\right)}{g}=\frac{\sum_{m=1}^{g-1}V\left(m\right)+\sum_{l=1}^{L}W\left(x_r,\ y_{j_l}\right)q_{j_l}\left(g\right)}{g}\geqslant V_{\text{opt}}-\delta_1\left(g\right), \tag{52}$$

де $r \in \{k-1\}_{k=1}^{K}$ і $0 < \delta_1(g) < \delta_1(g-1)$ $\forall$ $g = \overline{2, G}$.

Якщо оптимальною змішаною стратегію другого гравця є функція $\breve{q}(y)$, що задана на множині $Y = [0; 1]$ чистих стратегій, то замість (47) — (50) у першій партії гри перший гравець оперує співвідношеннями

$$\tilde{V}(x_r, 1) = \int_0^1 W(x_r, y)\breve{q}(y)dy \geqslant V_{\text{opt}} - \delta_1(1), \tag{53}$$

$$\delta_1(1) \leqslant V_{\text{opt}} - V_{\text{low}} = V_{\text{opt}} - \max_{x\in[0;\,1]} \min_{y\in[0;\,1]} W(x, y), \tag{54}$$

$$V_{\text{opt}} = \int_0^1 \int_0^1 W(x, y)\,\breve{p}(x)\breve{q}(y)dxdy, \tag{55}$$

$$\tilde{V}(x_t, 1) = \int_0^1 W(x_t, y)\breve{q}(y)dy < V_{\text{opt}} - \delta_1(1). \tag{56}$$

А ось замість позначення (17) перший гравець далі має діяти подібно до дій другого гравця з його оптимальною змішаною стратегією $\breve{q}(y)$ та еквівалентним сумі у формулі (4) інтегралом

$$\int_0^1 \breve{q}(y)dy = 1. \tag{57}$$

Другий гравець розбиває сегмент $Y = [0; 1]$ на такі напівсегменти, щоб функція $\breve{q}(y)$ разом з ядром $W(x, y)$ на кожному з них були практично незмінними. Для цього на кожному напівсегменті повинні виконуватись наступні аналогічні умовам (35) — (40) чотири умови:

$$\frac{d\breve{q}(y)}{dy} \geqslant 0 \text{ або } \frac{d\breve{q}(y)}{dy} \leqslant 0 \;\; \forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L}, \tag{58}$$

де $y_0 \equiv 0$ та $y_L \equiv 1$;

$$\left|\frac{d\breve{q}(y)}{dy}\right| \leqslant c \;\; \forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L}, \tag{59}$$

де параметр $c \in (0.001;\, 0.01)$ або $c \ll 0.1$; при $X = [0; 1]$

$$\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \geqslant 0 \text{ або } \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y} \leqslant 0 \;\; \forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L} \text{ та } \forall\; x \in [0; 1], \tag{60}$$

а при $X = \{x_i\}_{i=1}^{M}$ для $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$\frac{\partial W(x_k, y)}{\partial y} - \frac{\partial W(x_{k-1}, y)}{\partial y} \geqslant 0 \text{ або } \frac{\partial W(x_k, y)}{\partial y} - \frac{\partial W(x_{k-1}, y)}{\partial y} \leqslant 0$$
$$\forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L} \text{ та } k = \overline{2, K}; \tag{61}$$

ще також для множини $X = [0; 1]$

$$\left|\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}\right| \leqslant d \;\; \forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L} \text{ та } \forall\; x \in [0; 1], \tag{62}$$

а для множини $X = \{x_i\}_{i=1}^{M}$

$$\left|\frac{\partial W(x_k, y)}{\partial y} - \frac{\partial W(x_{k-1}, y)}{\partial y}\right| \leqslant d \;\; \forall\; y \in [y_{l-1};\, y_l) \text{ при } l = \overline{1, L} \text{ та } k = \overline{2, K}, \tag{63}$$

де параметр $d \in (0.001;\ 0.01)$ або $d \approx 0.1$.

Тепер для реалізації своєї оптимальної змішаної стратегії $\breve{q}(y)$ другий гравець може використати множину чистих стратегій

$$\{y_{l-1}\}_{l=1}^{L} = \left\{0,\ \{y_l\}_{l=1}^{L-1}\right\} = \{0,\ y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_{L-2},\ y_{L-1}\} \tag{64}$$

з відповідними імовірностями їх обирання

$$\left\{\breve{q}(y_{l-1})\lambda\right\}_{l=1}^{L} = \left\{\breve{q}(0)\lambda,\ \left\{\breve{q}(y_l)\lambda\right\}_{l=1}^{L-1}\right\} = \left\{\breve{q}(0)\lambda,\ \breve{q}(y_1)\lambda,\ \breve{q}(y_2)\lambda,\ \dots,\ \breve{q}(y_{L-2})\lambda,\ \breve{q}(y_{L-1})\lambda\right\}, \tag{65}$$

де постійний крок дискретизації $\lambda = y_l - y_{l-1}$ при $l = \overline{1,\ L-1}$. Ці стратегії може виписати і перший гравець у формі вектора відповідних імовірностей

$$\begin{aligned} &\left[\breve{q}(0)\lambda \quad \breve{q}(y_1)\lambda \quad \dots \quad \breve{q}(y_{L-2})\lambda \quad \breve{q}(y_{L-1})\lambda\right] = \\ &= \left[q(0,1)\lambda \quad q(y_1,1)\lambda \quad \dots \quad q(y_{L-2},1)\lambda \quad q(y_{L-1},1)\lambda\right] = \\ &= \left[\frac{c_1(1)}{G} \quad \frac{c_2(1)}{G} \quad \dots \quad \frac{c_{L-1}(1)}{G} \quad \frac{c_L(1)}{G}\right], \end{aligned} \tag{66}$$

де $c_l(1) = G\breve{q}(y_{l-1})\lambda \quad \forall\ l = \overline{1,\ L}$. У g-й партії гри, де $g = \overline{2,\ G}$, перший гравець після вибору другим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії чистої стратегії y_s, $s \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$, обчислює імовірність

$$\begin{aligned} q(y_s,\ g)\lambda &= \frac{c_{s+1}(g-1)-1}{G} \cdot \frac{1+\operatorname{sign}\left[c_{s+1}(g-1)-1\right]}{2} = \frac{c_{s+1}(g)}{G} = \\ &= q(y_s,\ g-1)\lambda \frac{c_{s+1}(g-1)-1}{c_{s+1}(g-1)} \cdot \frac{1+\operatorname{sign}\left[c_{s+1}(g-1)-1\right]}{2}, \end{aligned} \tag{67}$$

а також імовірності

$$\begin{aligned} q(y_l,\ g)\lambda &= q(y_l,\ g-1)\lambda \frac{\sum\limits_{v=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda - q(y_s,\ g-1)\lambda \frac{c_{s+1}(g-1)-1}{c_{s+1}(g-1)} \cdot \frac{1+\operatorname{sign}\left[c_{s+1}(g-1)-1\right]}{2}}{\sum\limits_{v=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda - q(y_s,\ g-1)\lambda} = \\ &= \frac{c_{l+1}(g)}{G},\ \forall\ l \in \left\{\overline{0,\ L-1}\right\} \setminus \{s\}, \end{aligned} \tag{68}$$

де у порівнянні з формулами (18) і (19) враховано, що

$$\sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda \approx 1, \tag{69}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda = 1. \tag{70}$$

Якщо при виборі деякої чистої стратегії x_t має місце

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(x_t,\ g)}{g} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum\limits_{l=0}^{L-1} W(x_t,\ y_l)\, q(y_l,\ g)\lambda}{g} < V_{\text{opt}} - \delta_1(g), \tag{71}$$

де $t \in \{k-1\}_{k=1}^{K}$, то перший гравець розігрує випадкові величини $\{\Theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ зі значеннями $\{\theta_k\}_{k=1}^{K-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії x_r не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(x_r,\, g)}{g} = \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{l=0}^{L-1} W(x_r,\, y_l)\, q(y_l,\, g)\lambda}{g} \geqslant V_{\text{opt}} - \delta_1(g)\,, \tag{72}$$

де $r \in \{k-1\}_{k=1}^{K}$ і $0 < \delta_1(g) < \delta_1(g-1)$ $\forall\, g = \overline{2,\, G}$. Так перший гравець реалізує свою оптимальну змішану стратегію $\widehat{p}(x)$.

Другий гравець діє аналогічно, попередньо обираючи свої чисті стратегії при розігруванні $L-1$ рівномірно розподіленої на напівсегменті $[0;\, 1)$ випадкової величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$, причому випадкова величина Ξ_l розігрується завжди перед випадковою величиною Ξ_{l+1} $\forall\, l = \overline{1,\, L-2}$. Якщо значення

$$\xi_v < \frac{\breve{q}(y_{v-1})\lambda}{\sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda - \sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}(y_{l-1})\lambda} = \frac{\breve{q}(y_{v-1})}{\sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1}) - \sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}(y_{l-1})} \tag{73}$$

випадкової величини Ξ_v, то другий гравець попередньо обирає чисту стратегію y_{v-1} $\forall\, l = \overline{1,\, L-1}$; інакше, якщо

$$\xi_v \geqslant \frac{\breve{q}(y_{v-1})\lambda}{\sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1})\lambda - \sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}(y_{l-1})\lambda} = \frac{\breve{q}(y_{v-1})}{\sum_{l=1}^{L} \breve{q}(y_{l-1}) - \sum_{l=1}^{v-1} \breve{q}(y_{l-1})}\,, \tag{74}$$

то другий гравець має розігрувати випадкову величину Ξ_{v+1} $\forall\, v = \overline{1,\, L-2}$ та має попередньо обирати чисту стратегію y_{L-1} при $v = L-1$. Зазначимо, що у формулах (73) і (74) замість одиниці, яка фігурує у формулах (12) та (13) у знаменнику, покладено суму (69). Це, як і у (45) і (46), зроблено для більш коректних розрахунків.

Нехай оптимальною змішаною стратегію першого гравця є (6). У першій партії гри другий гравець при попередньому виборі чистої стратегії y_s за умови

$$\tilde{V}(y_s,\, 1) = \sum_{k=1}^{K} W\left(x_{i_k},\, y_s\right) \widehat{p}_{i_k} \leqslant V_{\text{opt}} + \delta_2(1) \tag{75}$$

обирає чисту стратегію y_s уже остаточно, де $s \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$ і число

$$\delta_2(1) \leqslant V_{\text{up}} - V_{\text{opt}} = \min_{y \in [0;\, 1]} \max_{i = \overline{1,\, M}} W(x_i,\, y) - V_{\text{opt}}\,, \tag{76}$$

а значення гри

$$V_{\text{opt}} = \int_0^1 \sum_{i=1}^{M} W(x_i,\, y)\, \widehat{p}_i \breve{q}(y)\, dy\,. \tag{77}$$

Отже, якщо при виборі деякої чистої стратегії y_h має місце

$$\tilde{V}(y_h,\, 1) = \sum_{k=1}^{K} W\left(x_{i_k},\, y_h\right) \widehat{p}_{i_k} > V_{\text{opt}} + \delta_2(1)\,, \tag{78}$$

де $h \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_s не буде виконано нерівність (75). Далі другий гравець для себе робить позначення (27), де $d_k(1) = G\widehat{p}_{i_k}$ $\forall\, k = \overline{1,\, K}$. У g-й партії гри, де $g = \overline{2,\, G}$, другий гравець після вибору першим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії чистої стратегії x_r, $t \in \{k-1\}_{k=1}^{K}$, обчислює імовірність (28), а також імовірності (29). Якщо при виборі деякої чистої стратегії y_h має місце

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_h, g)}{g} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum\limits_{k=1}^{K} W\left(x_{i_k}, y_h\right) p_{i_k}(g)}{g} > V_{\text{opt}} + \delta_2(g), \tag{79}$$

де $h \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_s не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_s, g)}{g} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum\limits_{k=1}^{K} W\left(x_{i_k}, y_s\right) p_{i_k}(g)}{g} \leqslant V_{\text{opt}} + \delta_2(g), \tag{80}$$

де $s \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$ і $0 < \delta_2(g) < \delta_2(g-1)$ $\forall\ g = \overline{2, G}$.

Якщо оптимальною змішаною стратегію першого гравця є функція $\widehat{p}(x)$, що задана на множині $X = [0; 1]$ чистих стратегій, то замість (75) — (78) у першій партії гри другий гравець оперує співвідношеннями

$$\tilde{V}(y_s, 1) = \int\limits_0^1 W(x, y_s)\,\widehat{p}(x)\,dx \leqslant V_{\text{opt}} + \delta_2(1), \tag{81}$$

$$\delta_2(1) \leqslant V_{\text{up}} - V_{\text{opt}} = \min_{y \in [0;\, 1]} \max_{x \in [0;\, 1]} W(x, y) - V_{\text{opt}}, \tag{82}$$

де значенням гри є подвійний інтеграл (55), а

$$\tilde{V}(y_h, 1) = \int\limits_0^1 W(x, y_h)\,\widehat{p}(x)\,dx > V_{\text{opt}} + \delta_2(1). \tag{83}$$

А ось замість позначення (27) другий гравець далі має діяти подібно до дій першого гравця з його оптимальною змішаною стратегією $\widehat{p}(x)$ та розбиттям (35) — (40), де, використовуючи множину чистих стратегій (41) з відповідними імовірностями їх обирання (42), другий гравець робитиме позначення

$$\begin{aligned}
&\left[\widehat{p}(0)\gamma \quad \widehat{p}(x_1)\gamma \quad \ldots \quad \widehat{p}(x_{K-2})\gamma \quad \widehat{p}(x_{K-1})\gamma\right] = \\
&= \left[p(0, 1)\gamma \quad p(x_1, 1)\gamma \quad \ldots \quad p(x_{K-2}, 1)\gamma \quad p(x_{K-1}, 1)\gamma\right] = \\
&= \left[\frac{d_1(1)}{G} \quad \frac{d_2(1)}{G} \quad \ldots \quad \frac{d_{K-1}(1)}{G} \quad \frac{d_K(1)}{G}\right],
\end{aligned} \tag{84}$$

де $d_k(1) = G\widehat{p}(x_{k-1})\gamma$ $\forall\ k = \overline{1, K}$. У g-й партії гри, де $g = \overline{2, G}$, другий гравець після вибору першим гравцем у попередній $(g-1)$-й партії чистої стратегії x_r, $r \in \{k-1\}_{k=1}^{K}$, обчислює імовірність

$$\begin{aligned}
p(x_r, g)\gamma &= \frac{d_{r+1}(g-1) - 1}{G} \cdot \frac{1 + \operatorname{sign}\left[d_{r+1}(g-1) - 1\right]}{2} = \frac{d_{r+1}(g)}{G} = \\
&= p(x_r, g-1)\gamma \frac{d_{r+1}(g-1) - 1}{d_{r+1}(g-1)} \cdot \frac{1 + \operatorname{sign}\left[d_{r+1}(g-1) - 1\right]}{2},
\end{aligned} \tag{85}$$

а також імовірності

$$\begin{aligned}
p(x_k, g)\gamma &= p(x_k, g-1)\gamma \frac{\sum\limits_{u=1}^{K} \widehat{p}(x_{k-1})\gamma - p(x_r, g-1)\gamma \dfrac{d_{r+1}(g-1) - 1}{d_{r+1}(g-1)} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{sign}\left[d_{r+1}(g-1) - 1\right]}{2}}{\sum\limits_{u=1}^{K} \widehat{p}(x_{k-1})\gamma - p(x_r, g-1)\gamma} = \\
&= \frac{d_{k+1}(g)}{G}, \ \forall\ k \in \left\{\overline{0, K-1}\right\} \setminus \{r\},
\end{aligned} \tag{86}$$

де у порівнянні з формулами (28) і (29) враховано, що мають місце (43) і (44). Якщо при виборі деякої чистої стратегії y_h має місце

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_h,\, g)}{g} = \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{k=0}^{K-1} W(x_k,\, y_h)\, p(x_k,\, g)\gamma}{g} > V_{\mathrm{opt}} + \delta_2(g), \tag{87}$$

де $h \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$, то другий гравець розігрує випадкові величини $\{\Xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ зі значеннями $\{\xi_l\}_{l=1}^{L-1}$ до того моменту, доки для деякої чистої стратегії y_s не буде виконано нерівність

$$\frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \tilde{V}(y_s,\, g)}{g} = \frac{\sum_{m=1}^{g-1} V(m) + \sum_{k=0}^{K-1} W(x_k,\, y_s)\, p(x_k,\, g)\gamma}{g} \leqslant V_{\mathrm{opt}} + \delta_2(g), \tag{88}$$

де $s \in \{l-1\}_{l=1}^{L}$ і $0 < \delta_2(g) < \delta_2(g-1)$ $\forall\ g = \overline{2,\, G}$. Так другий гравець реалізує свою оптимальну змішану стратегію $\breve{q}(y)$.

Висновки та перспектива подальших досліджень

При наперед відомій кількості G партій гри в антагоністичній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях, де перший гравець володіє оптимальною змішаною стратегією $\widehat{p}(x)$ з нескінченним спектром, йому необхідно виконувати розбиття (35) — (40) і визначатися з чистими стратегіями (41) та з відповідними імовірностями їх обирання (42). Чисті стратегії перший гравець попередньо обирає за співвідношеннями (45) і (46). Далі він визначає свою функцію допусків втрат $\delta_1(g)$. Якщо оптимальною змішаною стратегію другого гравця є (8), то перед кожною g-ю партією гри за результатами вибору другого гравця у $(g-1)$-й партії перший гравець перераховує за формулами (18) та (19) імовірності обирання другим гравцем його чистих стратегій у поточній, g-й партії гри. Перший гравець слідкує за тим, щоб обрана чиста стратегія x_r задовольняла нерівності (52). Якщо ж оптимальною змішаною стратегію другого гравця є функція $\breve{q}(y)$, що задана на множині $Y = [0;\, 1]$ чистих стратегій, то перший гравець для себе виписує множину чистих стратегій другого гравця (64) з відповідними імовірностями їх обирання (65) за допомогою розбиття (58) — (63). І тоді замість обчислення імовірностей (18) та (19) перший гравець обчислює імовірності (67) і (68), зробивши позначення (66). Тут він слідкує за тим, щоб обрана чиста стратегія x_r задовольняла нерівності (72).

Другий гравець, володіючи оптимальною змішаною стратегією $\breve{q}(y)$ в антагоністичній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з наперед відомою кількістю G партій гри, має діяти аналогічно. Спочатку він виконує розбиття (58) — (63) для визначення своєї множини чистих стратегій (64) з відповідними імовірностями їх обирання (65). Чисті стратегії другий гравець попередньо обирає за співвідношеннями (73) і (74). Далі він визначає свою функцію допусків втрат $\delta_2(g)$. Якщо оптимальною змішаною стратегію першого гравця є (6), то перед кожною g-ю партією гри за результатами вибору першого гравця у $(g-1)$-й партії другий гравець перераховує за формулами (28) та (29) імовірності обирання першим гравцем його чистих стратегій у поточній, g-й партії гри. Другий гравець слідкує за тим, щоб обрана чиста стратегія y_s задовольняла нерівності (80). Якщо ж оптимальною змішаною стратегію першого гравця є функція $\widehat{p}(x)$, що задана на множині $X = [0;\, 1]$ чистих стратегій, то другий гравець для себе виписує множину чистих стратегій першого гравця (41) з відповідними імовірностями їх обирання (42) за допомогою розбиття (35) — (40). І тоді замість обчислення імовірностей (28) та (29) другий гравець обчислює імовірності (85) і (86), зробивши позначення (84). Тут він слідкує за тим, щоб обрана чиста стратегія y_s задовольняла нерівності (88).

Проте представлений метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у довільній антагоністичній грі з відомою кількістю партій гри має наступну проблему. Нехай, наприклад, у $(g-1)$-й партії гри перший гравець обрав стратегію x_r та отримав виграш $W(x_r,\, y_s)$. Але якщо функція $W(x_r,\, y)$ від змінної y приймає однакове значення $W(x_r,\, y_s)$ хоча б у двох точках, причому ці дві стратегії належать спектру оптимальної змішаної стратегії другого гравця, та імовірності їх вибору на даний момент не є нульовими, то перший гравець може і помилитися, віддавши перевагу одній з цих двох стратегій. У перспективі ця проблема своєрідного свідомого або несвідомого маскування [11 — 17] вибору гравцями свої чистих стратегій потребує глибшого дослідження.

Література

1. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. –М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. –272 с.
2. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. –М.: Едиториал УРСС, 2004. –216 с.
3. Романюк В.В. Про порядок перебору чистих стратегій в одній матричній грі без сідлової точки для реалізації оптимальних змішаних стратегій / В.В. Романюк // Материалы II Международной научно-практической конференции "Ключевые аспекты научной деятельности-2007". Том 7. Естественные науки. – Днепропетровск: Наука и образование, 2007. –С. 12-14.
4. Романюк В.В. Моделювання реалізації оптимальних змішаних стратегій в антагоністичній грі з двома чистими стратегіями в кожного з гравців / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". –2007. –№ 3. – С. 74-77.
5. Romanuke V.V. The principle of optimality problem in the elementary matrix game with the finite number of plays / V.V. Romanuke // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2007. –№ 1. –С. 226-230.
6. Романюк В.В. Формулювання одного з принципів оптимальності в елементарній антагоністичній грі без сідлової точки при неповній реалізації оптимальних змішаних стратегій / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. –2007. –№ 2. –Т. 2. –С. 218-222.
7. Романюк В.В. Тактика перебору чистих стратегій як теоретичне підґрунтя для дослідження ефективності різних способів реалізації оптимальних змішаних стратегій / В. В. Романюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". –2008. –№ 3. –С. 61-68.
8. Романюк В.В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри / В.В. Романюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". –2009. –№ 2. –С. 45-52.
9. Romanuke V.V. Method of practicing the optimal mixed strategy with innumerable set in its spectrum by unknown number of plays / V. V. Romanuke // Measuring and Computing Devices in Technological Processes. – 2008. –№ 2. –P. 196-203.
10. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. –М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. –304 с.: ил.
11. Романюк В.В. Комплексне програмне забезпечення для визначення оптимальної поведінки у конкурентних процесах з визначеними на одиничному гіперкубі простору $\mathbb{R}^4$ експоненціальними платіжними функціями / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. –2009. –№ 2. –Т. 2. –С. 188-193.
12. Romanuke V.V. Optimality control in the concave antagonistic game with annihilation probability payoff function as the kernel on the unit hypercube of the six-dimensional arithmetic space / V.V. Romanuke // Информационно-вычислительные технологии и их приложения: сборник статей X Международной научно-технической конференции. –Пенза: РИО ПГСХА, 2009. –С. 236-241.
13. Романюк В.В. Про рівнозначність оптимальних змішаних стратегій другого гравця у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром на одиничному гіперкубі чотиривимірного евклідового простору / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. –2009. – № 2. –Т. 1. –С. 113-121.
14. Романюк В.В. Нерівнозначні оптимальні змішані стратегії другого гравця у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром, що задається на декартовому добутку двох одиничних кубів / В.В. Романюк // Науково-теоретичний журнал Хмельницького економічного університету "Наука й економіка". –Випуск 3 (15), 2009. –Том 2. –С. 206-234.
15. Романюк В.В. Моделирование выхода на рынок двух конкурирующих предприятий с помощью игровой бесшумной дуэли в MATLAB 7.0.1 / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. –2009. –№ 3. –Т. 2. –С. 233-238.
16. Романюк В.В. Оптимізація кількості варіантів відповіді у закритих тестах з фіксованим часом за допомогою матричної гри / В.В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. –2009. –№ 3. –С. 187-192.
17. Романюк В.В. Разрешение системы преследователь-добыча для экспоненциальной вероятности поражения добычи преследователем / В.В. Романюк // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. –Харьков: НТУ "ХПИ", 2009. –№ 13. –С. 138-149.

Надійшла 4.11.2009 р.