приемлемости принятого решения используется мера согласия между экспертами, принимающих решение.

Определены вероятностные характеристики мер согласия, характеризующих специфику взаимодействия экспертов. В качестве модели взаимодействия экспертов предложен распределенный вероятностный граф, построенный на базе частных решений экспертов. Разработан метод оценки мер согласия с учетом вариантов и особенностей взаимодействия экспертов.

В результате анализа мер согласия и взаимодействия экспертов в сетевой модели принятия решения предложены также аналогичные критерии для исследования структурной надежности информационных сетей.

Литература

1. Берников А.Р., Графов Р.П. Согласование экспертных оценок для формирования модели деятельности оператора в тренажерах // Научно-технический и научно производственный журнал «Информационные технологии». – М. – 2003. – № 6. – С. 44-47.

2. Уильям Кокрен. Методы выборочного исследования. – М.: Статистика, 1976. – С. 440.

3. Берников А.Р., Графов Р.П., Савенко О.С. Доопределение специализированной базы данных коллективом экспертов на основе вероятностной оценки меры их согласия // Информационные технологии. – 2007. – № 7

4. Теория сетей связи / Под ред. В.Н. Рогинского. – М.: Радио и связь, 1981. – С. 191.

Надійшла 10.12.2009 р.

УДК 519.832.3

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

ПРОГРАМНА MATLAB-ФУНКЦІЯ НА ОСНОВІ ТРЬОХ ПРОГРАМНИХ МОДУЛІВ ДЛЯ ПРАКТИЧНОЇ АДАПТАЦІЇ ДИСКРЕТНОЇ БЕЗШУМНОЇ ДУЕЛІ З КОСОСИМЕТРИЧНИМ ЯДРОМ НА ПРАВИЛЬНІЙ РЕШІТЦІ ОДИНИЧНОГО КВАДРАТА З НЕЛІНІЙНИМИ ФУНКЦІЯМИ ВЛУЧНОСТІ

Дано означення дискретної безшумної дуелі з кососиметричним ядром на правильній решітці одиничного квадрата з нелінійними функціями влучності гравців. Побудовано програмну MATLAB-функцію для регуляризації оптимальної поведінки дуелянта у симетричній дискретній безшумній дуелі протягом заданого числа її повторів.

There has been given the definition of the discrete noiseless duel with the skewsymmetric kernel on the regular grid of the unit square with the nonlinear accuracy functions of the players. There has been built the program MATLAB-function for regularizing the optimal behavior of the duelist in the symmetric discrete noiseless duel during the being assigned number of its repeats.

Ключові слова: дискретна безшумна дуель, ядро на одиничному квадраті, MATLAB-функція.

Вступ та постановка проблеми у загальному виді

Стрімке зростання та модифікація потреб сучасного суспільства залишають небагато часу для пошуку нових шляхів задоволення цих потреб. При цьому екстенсивний розвиток не завжди гарантуватиме якісні результати, адже цей спосіб задоволення потреб рано чи пізно досягає своєї межі. Утворені нерівномірним співвідношенням потреб та їх задоволень конфліктні системи мають бути оптимізовані з використанням сучасних прикладних математичних гілок, серед яких центральне місце посідає теорія бескоаліційних ігор. Це відповідає інтенсивному шляху задоволення потреб, які безперервно виникають, зокрема, у соціально-економічних та біо-екологічних системах.

Однією з найпростіших моделей вирішення бескоаліційних конфліктів є антагоністична безшумна дуель, про яку достатньо написано у багатьох джерелах [1 — 7]. Рішення, прийняті на основі розв’язку цієї моделі, дозволяють оптимальним чином скориговувати активність у мікроекономічних процесах, у мікросоціумах, у системах регулювання і контролю екологічної безпеки. Проте відома модель безшумної дуелі, у якій множинами чистих стратегій гравців є сегменти з континуумом точок, не зовсім підходить до опису можливих активних станів у виділених конфліктних системах, де доводиться приймати рішення лише на окремих етапах, як правило, однакової тривалості.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

В абсолютній більшості праць, у яких розглядаються ігрові безшумні дуелі [5 — 7], у якості множини чистих стратегій гравця береться одиничний сегмент $[0; 1]$ числової прямої $\mathbb{R}$. А про практично обґрунтовану дискретизацію цього сегмента не згадується. У роботі [8], яка тут є виключенням, розглядається модель однократного виходу на ринок двох конкуруючих підприємств у рамках ігрової безшумної дуелі, де, як приклад, зображується задача про моделювання виходу цих підприємств на ринок при заданій кількості повторень гри. Результатом згаданої роботи є програмне забезпечення для демонстраційного проведення такого моделювання.

Формулювання мети статті та постановка завдань

Розглянемо безшумну дуель, що задається на одиничному квадраті

$$X \times Y = [0; 1] \times [0; 1] \tag{1}$$

своїм ядром

$$K(x, y) = h_1(x) - h_2(y) + h_1(x) h_2(y) \operatorname{sign}\left[h_2(y) - h_1(x)\right], \; x \in X, \; y \in Y, \tag{2}$$

де $h_1(x)$ є функцією влучності першого гравця, а $h_2(y)$ є функцією влучності другого гравця. Ця гра описує чимало антагоністично-конфліктних процесів лише у граничному переході, коли гравець володіє безліччю варіантів своїх можливих дій. Розв'язок гри з ядром (2) на одиничному квадраті (1) є добре відомим [6, 7]: при $h_1(x) = h_2(x)$ завдяки симетричності цієї гри або кососиметричності її ядра тут $K(x, y) = -K(y, x)$, з чого випливає оптимальне значення гри $v_{\text{opt}} = 0$, а також однакові оптимальні стратегії $p_{\text{opt}}(x)$ і $q_{\text{opt}}(y)$ першого та другого гравців відповідно. При лінійності функцій влучності $h_1(x) = x$ та $h_2(y) = y$ оптимальні стратегії гравців [6, 7]

$$p_{\text{opt}}(x) = \frac{1}{4x^3} \frac{\operatorname{sign}\left(x - \frac{1}{3}\right) + 1}{2} \operatorname{sign}\left|x - \frac{1}{3}\right| + \frac{1}{4x^3}\left(1 - \left|\operatorname{sign}\left(x - \frac{1}{3}\right)\right|\right) \tag{3}$$

та

$$q_{\text{opt}}(y) = \frac{1}{4y^3} \frac{\operatorname{sign}\left(y - \frac{1}{3}\right) + 1}{2} \operatorname{sign}\left|y - \frac{1}{3}\right| + \frac{1}{4y^3}\left(1 - \left|\operatorname{sign}\left(y - \frac{1}{3}\right)\right|\right). \tag{4}$$

Взагалі кажучи, функції влучності мають задовольняти крайовим умовам

$$h_1(0) = 0, \; h_1(1) = 1 \tag{5}$$

та

$$h_2(0) = 0, \; h_2(1) = 1. \tag{6}$$

Тому, враховуючи очевидну монотонну неспадність кожної з них, узагальнено треба брати

$$h_1(x) = x^{\alpha}, \; \alpha > 0 \tag{7}$$

та

$$h_2(y) = y^{\alpha}, \; \alpha > 0. \tag{8}$$

Зрозуміло, встановити аналітично розв'язок безшумної дуелі з ядром (2) на одиничному квадраті (1) при нелінійних функціях влучності (7) і (8) дуже важко. Крім того, як уже було зауважено, таке встановлення є не завжди доцільним, зважаючи на практично обумовлену фінітність множини чистих стратегій дуелянта (гравця).

Метою даної статті є формалізація (симетричної) дискретної безшумної дуелі з ядром (2) на одиничному квадраті (1) при нелінійних функціях влучності (7) і (8), де множиною чистих стратегій гравця є ізольовані точки одиничного сегмента $[0; 1]$, а відстань між двома сусідніми точками є незмінною. Також необхідно побудувати програмну функцію у математично-орієнтованому середовищі MATLAB, яка б дозволила повністю вирішити питання оптимальної поведінки дуелянта у симетричній дискретній безшумній дуелі за відоме заздалегідь число її розігрувань.

Дискретна безшумна дуель з ядром на кінцевій підмножині одиничного квадрата $[0; 1] \times [0; 1]$ з нелінійними функціями влучності

Означимо дискретну безшумну дуель з ядром (2), яке задається на деякій підмножині одиничного квадрата (1), наступним чином. Нехай n є кількістю чистих стратегій гравця, причому $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, де кожні дві сусідні стратегії є рівновіддаленими, і в їх число входять кінці одиничного сегмента $[0; 1]$. Тоді множиною чистих стратегій кожного з гравців є n-елементний набір чисел

$$\left\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \mathbf{K}, \frac{n-2}{n-1}, 1\right\} = \left\{\frac{k}{n-1}\right\}_{k=0}^{n-1} \subset [0; 1] \tag{9}$$

одиничного сегмента $[0; 1]$. Тому підмножиною одиничного квадрата (1), на якій задаватимемо дискретну безшумну дуель, буде набір

$$\left\{\frac{k}{n-1}\right\}_{k=0}^{n-1}\times\left\{\frac{j}{n-1}\right\}_{j=0}^{n-1}=\left\{x_{k+1}\right\}_{k=0}^{n-1}\times\left\{y_{j+1}\right\}_{j=0}^{n-1}=\left\{\left\{\left[\frac{k}{n-1}\quad\frac{j}{n-1}\right]\right\}_{k=0}^{n-1}\right\}_{j=0}^{n-1}\subset X\times Y=[0;\,1]\times[0;\,1] \tag{10}$$

з n^2 точок одиничного квадрата (1). Кінцеву підмножину (10) одиничного квадрата (1) можна називати правильною решіткою цього квадрата. Ядро (2) даної гри, задане на правильній решітці (10), набуває усього n^2 значень, тобто його можна представляти як матрицю гри розміром $n\times n$. Позначимо її через $\mathbf{D}=\left(d_{kj}\right)_{n\times n}$, де

$$d_{kj}=K\left(\frac{k-1}{n-1},\,\frac{j-1}{n-1}\right),\ k=\overline{1,\,n}\,,\ \ j=\overline{1,\,n}\,. \tag{11}$$

Отже,

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}
K(0,\,0) & K\left(0,\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(0,\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(0,\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K(0,\,1)\\
K\left(\frac{1}{n-1},\,0\right) & K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K\left(\frac{1}{n-1},\,1\right)\\
K\left(\frac{2}{n-1},\,0\right) & K\left(\frac{2}{n-1},\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(\frac{2}{n-1},\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(\frac{2}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K\left(\frac{2}{n-1},\,1\right)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
K\left(\frac{n-2}{n-1},\,0\right) & K\left(\frac{n-2}{n-1},\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(\frac{n-2}{n-1},\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(\frac{n-2}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K\left(\frac{n-2}{n-1},\,1\right)\\
K(1,\,0) & K\left(1,\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(1,\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(1,\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K(1,\,1)
\end{pmatrix}, \tag{12}$$

де, очевидно, матриця (12) є кососиметричною: $\mathbf{D}=-\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$. Тому замість (12) можна писати

$$\mathbf{D}=\begin{pmatrix}
0 & K\left(0,\,\frac{1}{n-1}\right) & K\left(0,\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(0,\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K(0,\,1)\\
-K\left(0,\,\frac{1}{n-1}\right) & 0 & K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{2}{n-1}\right) & \cdots & K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K\left(\frac{1}{n-1},\,1\right)\\
-K\left(0,\,\frac{2}{n-1}\right) & -K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{2}{n-1}\right) & 0 & \cdots & K\left(\frac{2}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & K\left(\frac{2}{n-1},\,1\right)\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
-K\left(0,\,\frac{n-2}{n-1}\right) & -K\left(\frac{1}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & -K\left(\frac{2}{n-1},\,\frac{n-2}{n-1}\right) & \cdots & 0 & K\left(\frac{n-2}{n-1},\,1\right)\\
-K(0,\,1) & -K\left(\frac{1}{n-1},\,1\right) & -K\left(\frac{2}{n-1},\,1\right) & \cdots & -K\left(\frac{n-2}{n-1},\,1\right) & 0
\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Отже, дискретною безшумною дуеллю, де множиною чистих стратегій кожного з гравців є (9), називатимемо антагоністичну гру з ядром (2) у формі матриці (13), елементи якої (11) визначені на правильній решітці (10) одиничного квадрата (1), а функціями влучності гравців є (7) та (8). У дискретній безшумній дуелі оптимальні стратегії $p_{\mathrm{opt}}(x)$ і $q_{\mathrm{opt}}(y)$ першого та другого гравців треба позначати як вектори імовірностей

$$\mathbf{P}_{\mathrm{opt}}=\left[P_{\mathrm{opt}}(x_1)\quad P_{\mathrm{opt}}(x_2)\quad P_{\mathrm{opt}}(x_3)\quad \cdots\quad P_{\mathrm{opt}}(x_{n-1})\quad P_{\mathrm{opt}}(x_n)\right] \tag{14}$$

та

$$\mathbf{Q}_{\mathrm{opt}}=\left[Q_{\mathrm{opt}}(y_1)\quad Q_{\mathrm{opt}}(y_2)\quad Q_{\mathrm{opt}}(y_3)\quad \cdots\quad Q_{\mathrm{opt}}(y_{n-1})\quad Q_{\mathrm{opt}}(y_n)\right] \tag{15}$$

відповідно, де $P_{\mathrm{opt}}(x_k)$ є імовірністю обирання першим гравцем його чистої стратегії $x_k=\frac{k-1}{n-1}$, $k=\overline{1,\,n}$, а $Q_{\mathrm{opt}}(y_j)$ є імовірністю обирання другим гравцем його чистої стратегії $y_j=\frac{j-1}{n-1}$, $j=\overline{1,\,n}$.

Представлення програмної MATLAB-функції dndna на основі трьох програмних модулів

Для побудови у MATLAB програми, яка б дозволила повністю вирішити питання оптимальної поведінки дуелянта у симетричній дискретній безшумній дуелі за відоме заздалегідь число r її розігрувань, використаймо відомі, розроблені та опрацьовані автором програмні засоби [9 — 15]. Спочатку нам необхідно, власне, розв'язати $n \times n$-гру з матрицею (13), приймаючи певне n та параметр α. Для цього можна застосувати програмний модуль **sp** (рис. 1), представлення якого проходило у роботах [9 — 12].

```
function [Sopt, Hopt, Vlow1, Vup1, OMS, Vopt] = sp(P)
%      This function finds the low and up values of the game,
%   and, if saddle points exist, determines the optimal
%   strategies for players. The input for this function is a payoff matrix.
%format rat, disp(' '), disp('   Payoff matrix='), disp(' '), disp(num2str(P, 2))
disp(' '), [lines columns]=size(P);
[VlowColumns VlowColumnsIndices]=min(P,[],2);
[Vlow1 Vlow1Indices]=max(VlowColumns);
[VupLines VupLinesIndices]=max(P,[],1);
[Vup1 Vup1Indices]=min(VupLines); k=0; l=0;
for line=1:lines
    if Vlow1==VlowColumns(line)
       k=k+1;
       VlowIndices(k,:)=[line VlowColumnsIndices(line)];
       for column=VlowColumnsIndices(line)+1:columns
           if Vlow1==P(line,column)
              k=k+1;
              VlowIndices(k,:)=[line column];
           end
       end
    end
end
for column=1:columns
    if Vup1==VupLines(column)
       l=l+1;
       VupIndices(l,:)=[VupLinesIndices(column) column];
       for line=VupLinesIndices(column)+1:lines
           if Vup1==P(line,column)
              l=l+1;
              VupIndices(l,:)=[line column];
           end
       end
    end
end
```

Рис. 1. MATLAB-код програмного модуля sp для знаходження розв'язку матричної гри

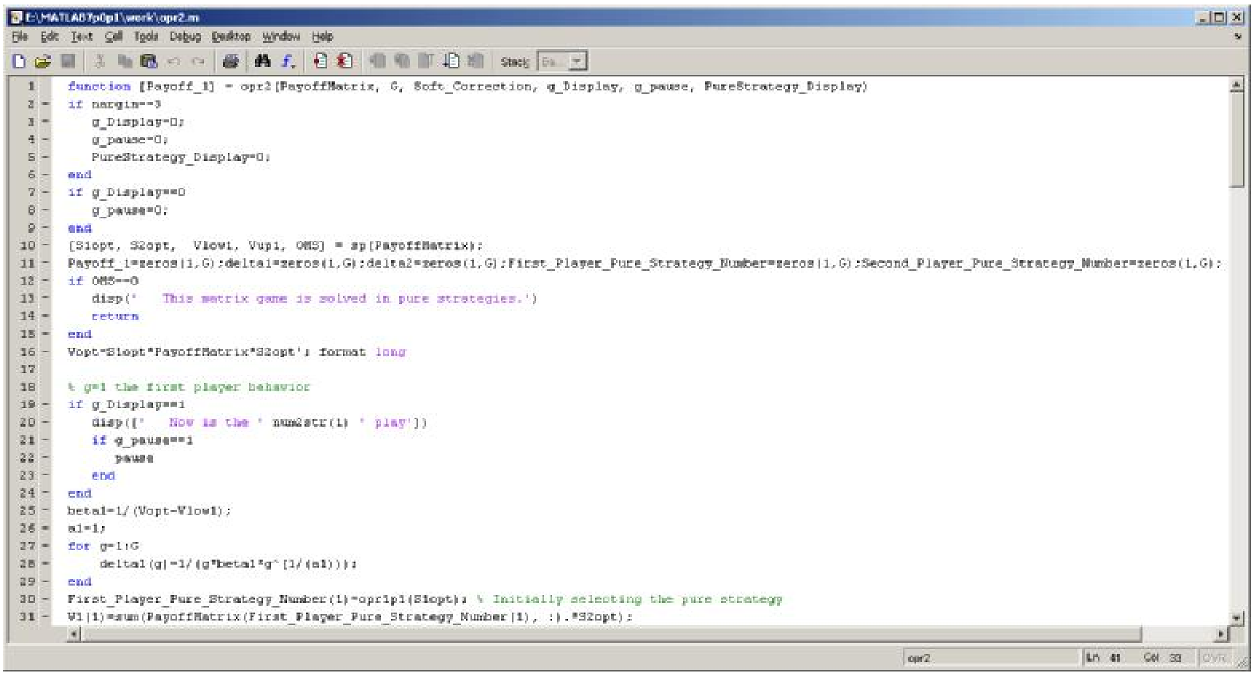
Вхідним аргументом цього модуля є матриця гри, а у перелік з шести параметрів гри, які повертаються, входять оптимальні змішані стратегії гравців (оптимальне значення гри і так відоме — воно дорівнює, звичайно, нулю).

Програмний модуль **sp** є умовно субмодулем для програмного модуля **opr1p1** (рис. 2), який, приймаючи на вході оптимальну змішану стратегію гравця у формі вектора імовірностей, видає гравцю номер чистої стратегії, яку у поточному розігруванні йому слід обирати [9]. Але програмний модуль **opr1p1** самостійно застосовний тільки тоді, коли кількість розігрувань або повторів гри є необмежено великою або просто невідомою, тобто гравці не мають інформації про період закінчення розігрувань.

```
function [Pure_Strategy_Number] = opr1p1(Spectrum_Probabilities_or_Optimal_Mixed_Strategy, ...
                                         Pure_Strategy_Number_display)
if nargin==1
   Pure_Strategy_Number_display=0;
end
k=1;
theta=rand;
while theta>=sum(Spectrum_Probabilities_or_Optimal_Mixed_Strategy(1:k))
      k=k+1;
end
Pure_Strategy_Number=k;
if Pure_Strategy_Number_display==1
   disp(['Number of the Pure Strategy to be selected: ' num2str(Pure_Strategy_Number)])
end
```

Рис. 2. MATLAB-код програмного модуля opr1p1 для реалізації змішаної стратегії гравця у формі вектора імовірностей при невідомому горизонті повторень матричної гри

Якщо кількість r повторів гри відома, то для якомога кращої практичної реалізації своєї оптимальної змішаної стратегії гравець може використати програмний модуль **opr2** [16], у якому програмні модулі **sp** та **opr1p1** є субмодулями (рис. 3). Задаючи в модулі **opr2** кількість r, а також спосіб коригування граничних втрат, обидва гравці на кожному з r повторів матричної гри отримують підказку про номер чистої стратегії до обирання. Після останнього, r-го розігрування, перший гравець знає відносне відхилення свого середнього за r повторів гри виграшу від значення гри v_{opt} (для другого гравця це число є відносним відхиленням від його середнього програшу).

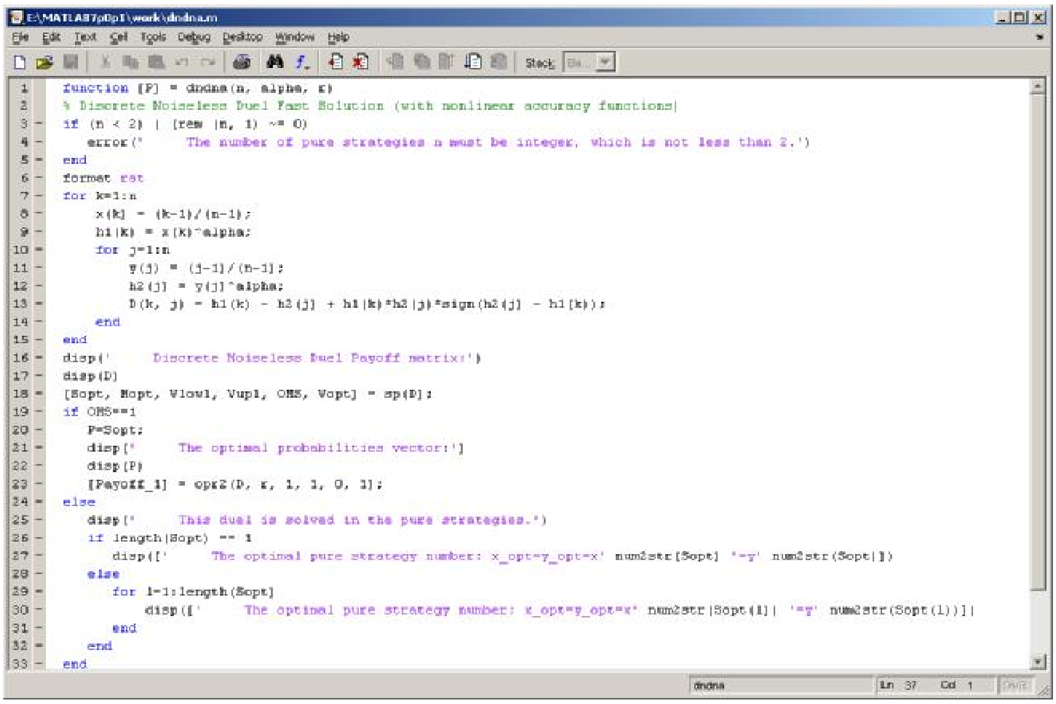


```
function [Payoff_1] = opr2(PayoffMatrix, G, Soft_Correction, g_Display, g_pause, PureStrategy_Display)
if nargin==3
   g_Display=0;
   g_pause=0;
   PureStrategy_Display=0;
end
if g_Display==0
   g_pause=0;
end
[S1opt, S2opt,  Vlow1, Vup1, OMS] = sp(PayoffMatrix);
Payoff_1=zeros(1,G);delta1=zeros(1,G);delta2=zeros(1,G);First_Player_Pure_Strategy_Number=zeros(1,G);Second_Player_Pure_Strategy_Number=zeros(1,G);
if OMS==0
   disp('   This matrix game is solved in pure strategies.')
   return
end
Vopt=S1opt*PayoffMatrix*S2opt'; format long

% g=1 the first player behavior
if g_Display==1
   disp(['   Now is the ' num2str(1) ' play'])
   if g_pause==1
      pause
   end
end
beta1=1/(Vopt-Vlow1);
a1=1;
for g=1:G
    delta1(g)=1/(g*beta1*g^(1/(a1)));
end
First_Player_Pure_Strategy_Number(1)=opr1p1(S1opt); % Initially selecting the pure strategy
W1(1)=sum(PayoffMatrix(First_Player_Pure_Strategy_Number(1), :).*S2opt);
```

Рис. 3. Matlab-код програмного модуля opr2 для реалізації змішаної стратегії гравця у формі вектора імовірностей за фіксовану кількість повторень матричної гри

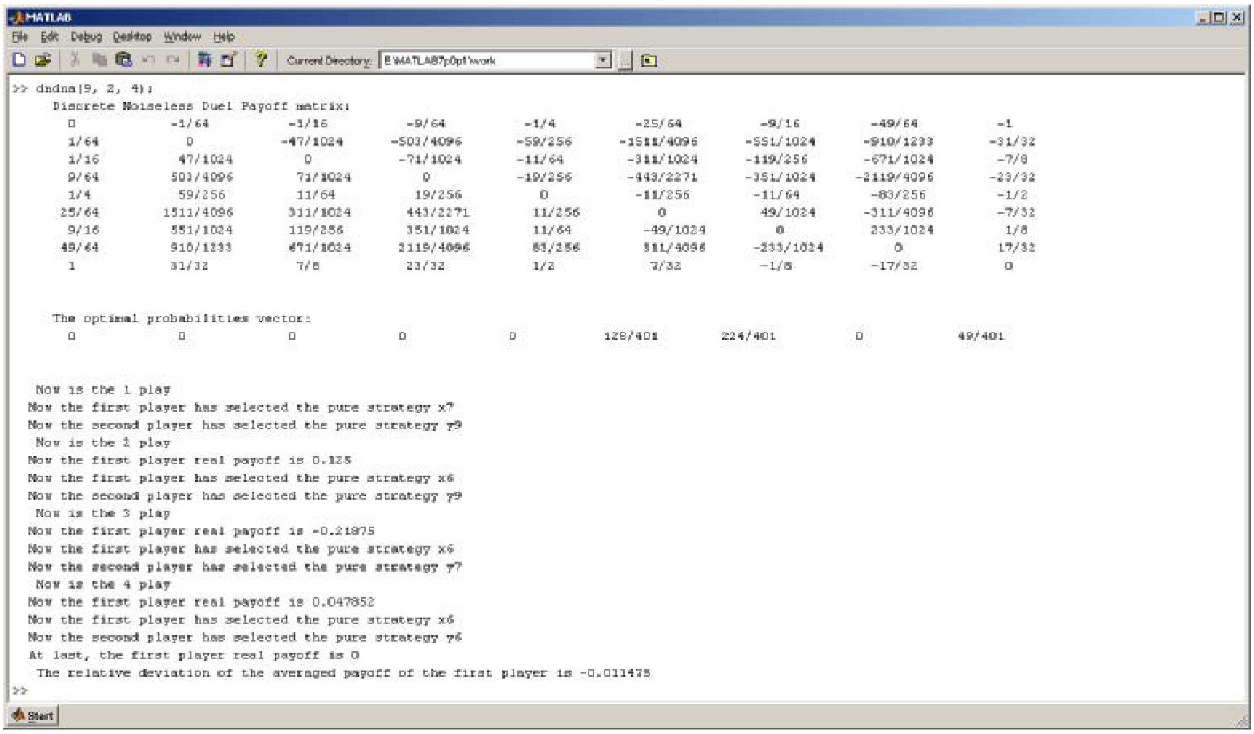
Описані три програмних модуля використаємо у програмній MATLAB-функції **dndna** (рис. 4), у якій формуватиметься матриця (13). Вхідними аргументами цієї функції є числа n, α та r, а повертає вона, окрім оптимальних змішаних стратегій (14) та (15) обох гравців, номер і значення чистої стратегії даного гравця для її обирання у кожному з r повторів заданої дискретної безшумної дуелі.



```
function [P] = dndna(n, alpha, r)
% Discrete Noiseless Duel Fast Solution (with nonlinear accuracy functions)
if (n < 2) | (rem (n, 1) ~= 0)
   error('      The number of pure strategies n must be integer, which is not less than 2.')
end
format rat
for k=1:n
    x(k) = (k-1)/(n-1);
    h1(k) = x(k)^alpha;
    for j=1:n
        y(j) = (j-1)/(n-1);
        h2(j) = y(j)^alpha;
        D(k, j) = h1(k) - h2(j) + h1(k)*h2(j)*sign(h2(j) - h1(k));
    end
end
disp('      Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:')
disp(D)
[Sopt, Hopt, Vlow1, Vup1, OMS, Vopt] = sp(D);
if OMS==1
   P=Sopt;
   disp('      The optimal probabilities vector:')
   disp(P)
   [Payoff_1] = opr2(D, r, 1, 1, 0, 1);
else
   disp('      This dual is solved in the pure strategies.')
   if length(Sopt) == 1
      disp(['      The optimal pure strategy number: x_opt=y_opt=x' num2str(Sopt) '=y' num2str(Sopt)])
   else
      for l=1:length(Sopt)
         disp(['      The optimal pure strategy number: x_opt=y_opt=x' num2str(Sopt(l)) '=y' num2str(Sopt(l))])
      end
   end
end
```

Рис. 4. MATLAB-код програмної функції dndna для визначення розв'язку заданої дискретної безшумної дуелі та реалізації змішаної стратегії гравця у формі вектора імовірностей за фіксовану кількість повторень цієї дуелі

На рис. 5 — 8 зображено скріншоти прикладів використання MATLAB-функції **dndna**, серед яких виділені і ті випадки, коли дискретна безшумна дуель з матрицею (13) розв’язується у чистих стратегіях.

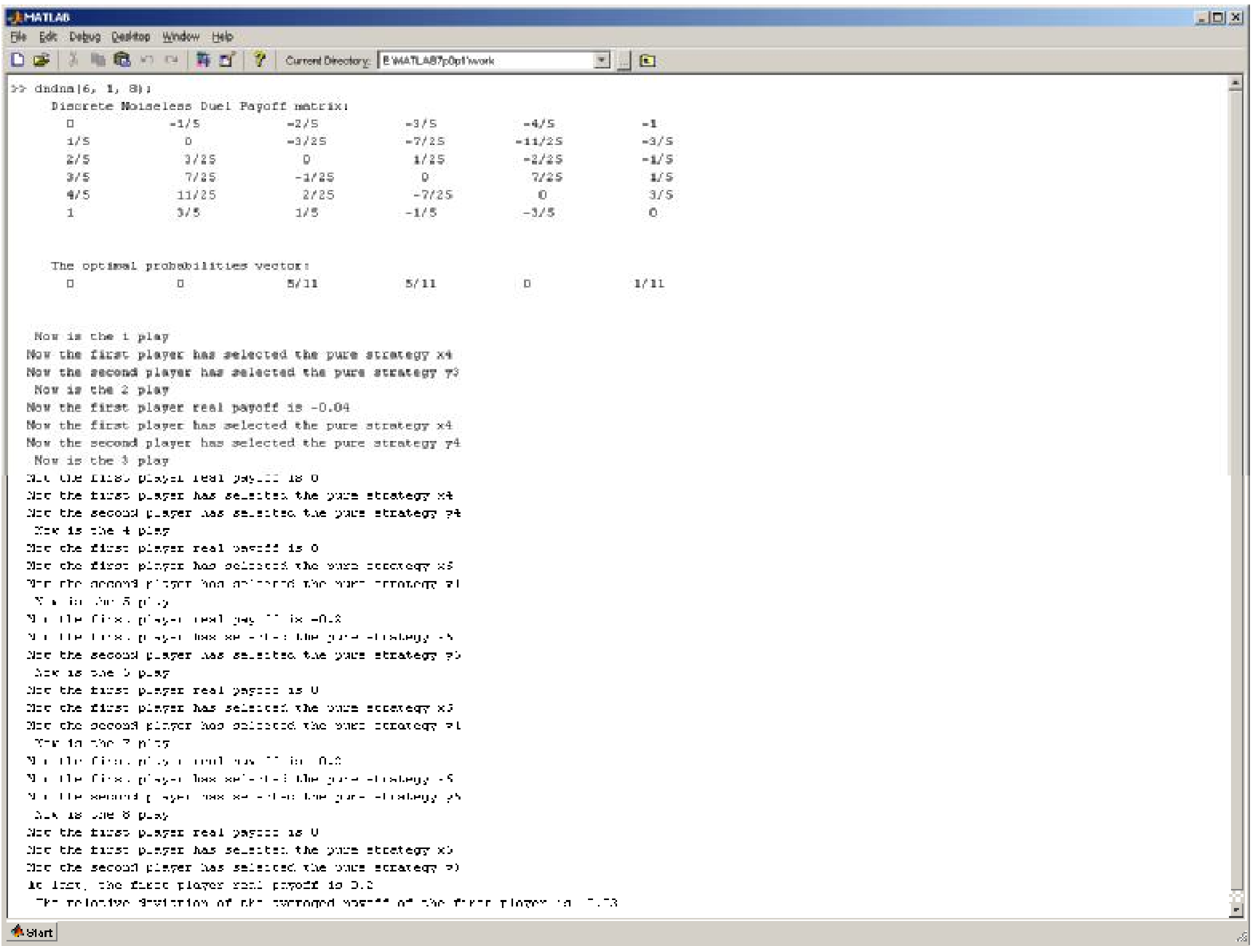


```
>> dndna(9, 2, 4);
    Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:
      0         -1/64       -1/16       -9/64       -1/4        -25/64      -9/16       -49/64      -1
      1/64       0          -47/1024    -503/4096   -59/256     -1511/4096  -551/1024   -910/1233   -31/32
      1/16       47/1024     0          -71/1024    -11/64      -311/1024   -119/256    -671/1024   -7/8
      9/64       503/4096    71/1024     0          -19/256     -443/2271   -351/1024   -2119/4096  -23/32
      1/4        59/256      11/64       19/256      0          -11/256     -11/64      -83/256     -1/2
      25/64      1511/4096   311/1024    443/2271    11/256      0           49/1024    -311/4096   -7/32
      9/16       551/1024    119/256     351/1024    11/64      -49/1024     0           233/1024    1/8
      49/64      910/1233    671/1024    2119/4096   83/256      311/4096   -233/1024    0           17/32
      1          31/32       7/8         23/32       1/2         7/32       -1/8        -17/32       0


    The optimal probabilities vector:
      0          0           0           0           0           128/401     224/401     0           49/401


  Now is the 1 play
 Now the first player has selected the pure strategy x7
 Now the second player has selected the pure strategy y9
  Now is the 2 play
 Now the first player real payoff is 0.125
 Now the first player has selected the pure strategy x6
 Now the second player has selected the pure strategy y9
  Now is the 3 play
 Now the first player real payoff is -0.21875
 Now the first player has selected the pure strategy x6
 Now the second player has selected the pure strategy y7
  Now is the 4 play
 Now the first player real payoff is 0.047852
 Now the first player has selected the pure strategy x6
 Now the second player has selected the pure strategy y6
 At last, the first player real payoff is 0
  The relative deviation of the averaged payoff of the first player is -0.011475
>>
```

Рис. 5. Оптимальні змішані стратегії (14) та (15) у дискретній безшумній дуелі з $n = 9$ при $\alpha = 2$ та хід реалізації гравцями їх оптимальних поведінок за $r = 4$ повторів дуелі



```
>> dndna(6, 1, 8);
    Discrete Noiseless Duel Payoff matrix:
      0         -1/5        -2/5        -3/5        -4/5        -1
      1/5        0          -3/25       -7/25       -11/25      -3/5
      2/5        3/25        0           1/25       -2/25       -1/5
      3/5        7/25       -1/25        0           7/25        1/5
      4/5        11/25       2/25       -7/25        0           3/5
      1          3/5         1/5        -1/5        -3/5         0


    The optimal probabilities vector:
      0          0           5/11        5/11        0           1/11


  Now is the 1 play
 Now the first player has selected the pure strategy x4
 Now the second player has selected the pure strategy y3
  Now is the 2 play
 Now the first player real payoff is -0.04
 Now the first player has selected the pure strategy x4
 Now the second player has selected the pure strategy y4
  Now is the 3 play
 Now the first player real payoff is 0
 Now the first player has selected the pure strategy x4
 Now the second player has selected the pure strategy y4
  Now is the 4 play
 Now the first player real payoff is 0
 Now the first player has selected the pure strategy x5
 Now the second player has selected the pure strategy [illegible]
  Now is the 5 play
 Now the first player real payoff is [illegible]
 Now the first player has selected the pure strategy [illegible]
 Now the second player has selected the pure strategy [illegible]
  Now is the [illegible] play
 Now the first player real payoff is 0
 Now the first player has selected the pure strategy [illegible]
 Now the second player has selected the pure strategy [illegible]
  Now is the 7 play
 Now the first player real payoff is [illegible]
 Now the first player has selected the pure strategy [illegible]
 Now the second player has selected the pure strategy [illegible]
  Now is the 8 play
 Now the first player real payoff is 0
 Now the first player has selected the pure strategy [illegible]
 Now the second player has selected the pure strategy [illegible]
 At last, the first player real payoff is [illegible]
  The relative deviation of the averaged payoff of the first player is [illegible]
```

Рис. 6. Оптимальні змішані стратегії (14) та (15) у дискретній безшумній дуелі з $n = 6$ при $\alpha = 1$ та хід реалізації гравцями їх оптимальних поведінок за $r = 8$ повторів дуелі

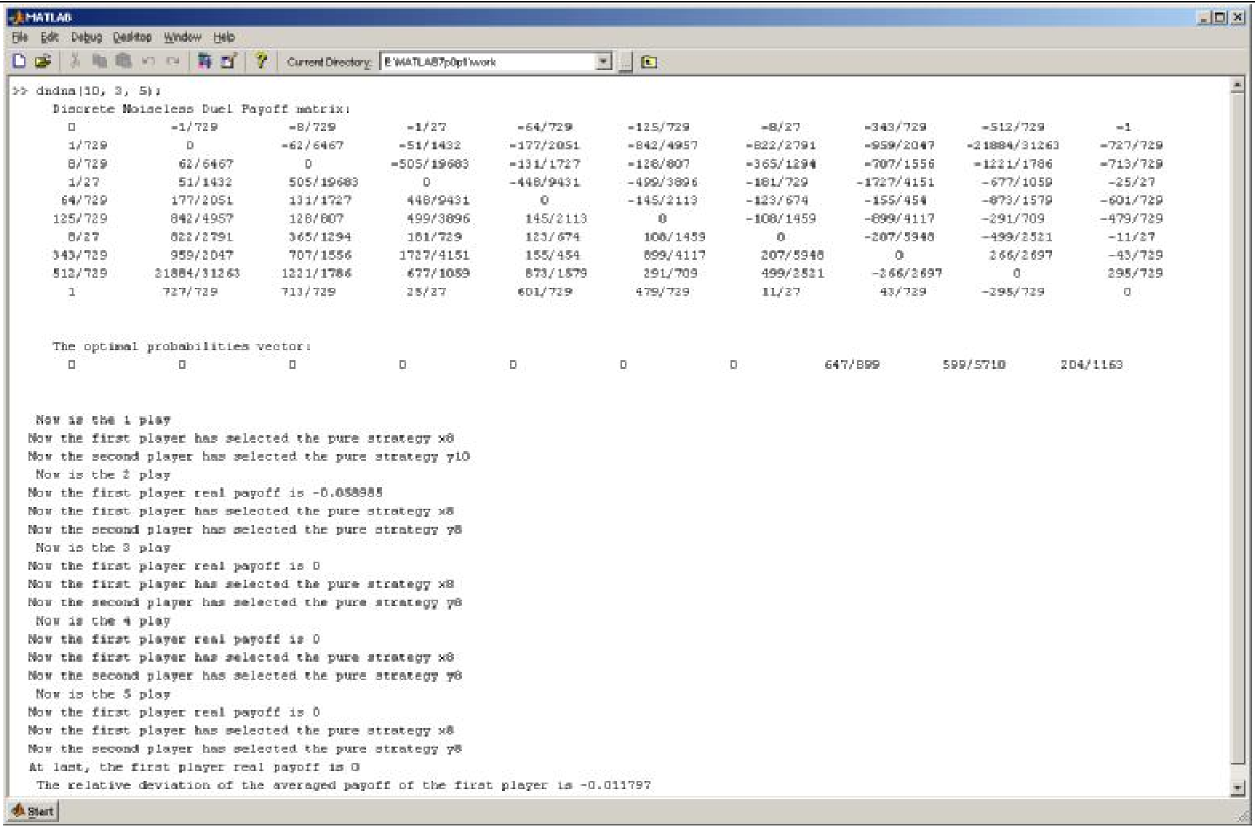


Рис. 7. Оптимальні змішані стратегії (14) та (15) у дискретній безшумній дуелі з $n = 10$ при $\alpha = 3$ та хід реалізації гравцями їх оптимальних поведінок за $r = 5$ повторів дуелі

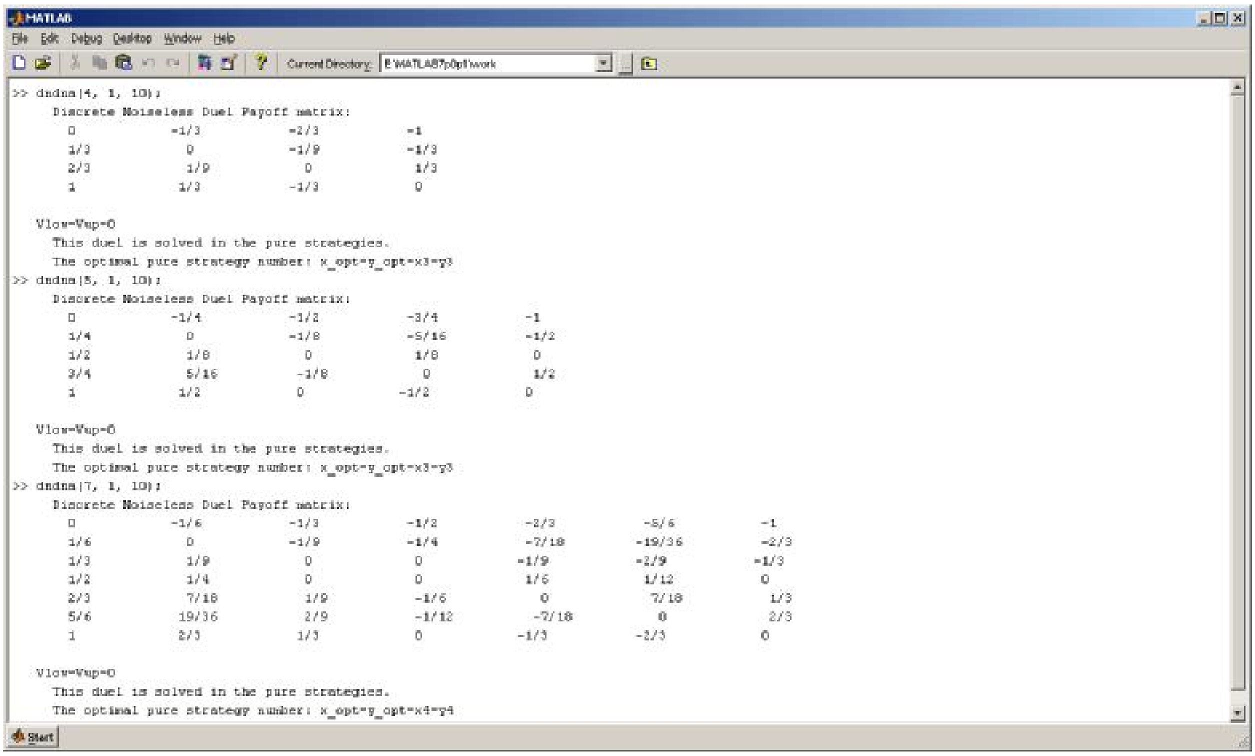


Рис. 8. Сідлові точки у чистих стратегіях у дискретній безшумній дуелі з $n \in \{4, 5, 7\}$ при $\alpha = 1$

Висновки та перспективи подальших досліджень в обраному напрямку

Розроблена програмна MATLAB-функція **dndna** дозволяє гравцю отримувати не тільки розв'язок дискретної безшумної дуелі з матрицею (13) на множині ситуацій у формі правильної решітки (10), але й отримувати у розгорнутому виді схему обирання ним його чистих стратегій для якомога кращої реалізації свої оптимальної змішаної стратегії протягом r повторень гри. Щоправда, у деяких досліджених і візуалізованих на рис. 8 випадках дискретна безшумна дуель з матрицею (13) розв'язується у чистих стратегіях. Саме під такі моделі слід підлаштовувати активність у релевантних соціально-економічних та біо-екологічних системах, де тоді проблема безумовного дотримання принципу оптимальності [17, 18] вирішується за одне повторення дуелі. Перспективи подальших досліджень вбачаються у розгляді тих дискретних безшумних дуелей, у яких чисті стратегії гравця на одиничному сегменті $[0; 1]$ розміщуються нееквідистантно. Таке їх розміщення є більш правдоподібним (вірогідним), адже наявність деякого варіанта дії у даній точці, яку ми ототожнюємо з чистою стратегією, не завжди може лінеаризовано (власне, стрибкоподібно) залежати від відстані між цією точкою і моментом завершення дуелі.

Література

1. Teraoka Y. A single bullet duel with uncertain information available to the duelists / Bull. Math. Statist. – 1979. – N. 18. – P. 69– 80.

2. Teraoka Y. A two-person game of timing with random arrival time of the object / Math. Japonica. – 1979. – N. 24. – P. 427– 438.

3. Baston V. J., Garnaev A. Y. A non-zero-sum war of attrition / ZOR-Mathematical Methods and Models of Operation Research. – 1997. – N. 45. – P. 197– 211.

4. Hamers H. A silent duel over a cake / ZOR-Mathematical Methods and Models of Operation Research. – 1993. – N. 37. – P. 119– 127.

5. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.

6. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с.: ил.

7. Оуэн Г. Теория игр: Пер. с англ. Изд. 2-е. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 216 с.

8. Романюк В. В. Моделирование выхода на рынок двух конкурирующих предприятий с помощью игровой бесшумной дуэли в MATLAB 7.0.1 // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2009. – № 3. – Т. 2. – С. 233– 238.

9. Романюк В. В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з пустою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з невідомою кількістю партій гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2009. – № 2. – С. 224– 229.

10. Romanuke V. V. Determination of the optimal pure strategies subset as the latent predominance set in some matrix games // Scientific Papers of Donetsk National Technical University. "Informatics, Cybernetics and Computer Science". – 2009. – Vol. 10 (153). – P. 46– 53.

11. Романюк В. В. Разрешение системы преследователь– добыча для экспоненциальной вероятности поражения добычи преследователем // Вестник НТУ "ХПИ". Тематический выпуск: Информатика и моделирование. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2009. – № 13. – С. 138– 149.

12. Романюк В. В. Оптимізація кількості варіантів відповіді у закритих тестах з фіксованим часом за допомогою матричної гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2009. – № 3. – С. 187– 192.

13. Романюк В. В. Комплексне програмне забезпечення для визначення оптимальної поведінки у конкурентних процесах з визначеними на одиничному гіперкубі простору $\mathbb{R}^4$ експоненціальними платіжними функціями // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2009. – № 2. – Т. 2. – С. 188– 193.

14. Романюк В. В. Про рівнозначність оптимальних змішаних стратегій другого гравця у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром на одиничному гіперкубі чотиривимірного евклідового простору // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2009. – № 2. – Т. 1. – С. 113– 121.

15. Романюк В. В. Нерівнозначні оптимальні змішані стратегії другого гравця у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром, що задається на декартовому добутку двох одиничних кубів // Наука й економіка. – 2009. – № 3 (15). – Том 2. – С. 206– 234.

16. Романюк В. В. Адаптація методу реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною ситуацій рівноваги з відомою наперед кількістю раундів гри у програмному середовищі MATLAB // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2009. – № 4. – С. 57– 67.

17. Романюк В. В. Формулювання одного з принципів оптимальності в елементарній антагоністичній грі без сідлової точки при неповній реалізації оптимальних змішаних стратегій // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2007. – № 2. – Т. 2. – С. 218– 222.

18. Романюк В. В. Про раціоналізований принцип оптимальності у деяких матричних іграх // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2008. – № 1. – С. 156– 161.

Надійшла 11.12.2009 р.