

МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФУНКЦІОНУВАННЯ АВТОРЕМОНТНОЇ ОРГАНІЗАЦІЇ

Для оптимізації процесу технічного обслуговування і поточного ремонту автотранспортних засобів органу охорони державного кордону необхідно побудувати модель процесу функціонування авторемонтної організації. Під час дослідження була розроблена модель авторемонтної організації в класі марківських процесів з безперервним часом і дискретними станами. Особливістю отриманої моделі полягає в її здатності враховувати вплив групових заявок автотранспортних засобів на показники ефективності авторемонтної організації.

For optimization process of technical service and repair vehicles of border detachments it is necessary to build the model of service organization. During research the model of service organization was developed in the class of Markov's processes with continuous time and discrete states. The feature of the model consists in it's ability to take into account influence of group requests on the indexes of service organization.

Ключові слова: автотранспортний засіб, авторемонтна організація, модель, система масового обслуговування, показники ефективності.

Вступ. Авторемонтна організація забезпечує технічну готовність автотранспортних засобів органу охорони державного кордону (прикордонного загону) шляхом оперативного проведення робіт по їх обслуговуванню (технічному обслуговуванню (ТО) і поточному ремонту (ПР)) [1]. На оперативність проведення робіт персоналом авторемонтної організації можна впливати шляхом оптимізації процесу її функціонування [1]. Але для цього необхідно побудувати модель процесу функціонування авторемонтної організації.

Авторемонтна організація може бути представлений системою масового обслуговування (СМО), в якій пости обслуговування стаціонарних і рухомих ремонтних майстерень, виконують функції приладів (каналів) обслуговування. Проведені в роботі [2] дослідження властивостей потоків заявок і обслуговувань автотранспортних засобів в умовах прикордонних загонів Держприкордонслужби дозволяють стверджувати про наявність властивостей неординарності і стаціонарності в потоці заявок, а також щодо наявності властивості відсутності післядії в потоках заявок і обслуговувань автотехніки. Виявлені властивості дозволяють використовувати марківські моделі теорії масового обслуговування для моделювання процесу функціонування авторемонтної організації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питаннями моделювання діяльності авторемонтних організацій займалися такі науковці, як Медью С., Власов В.М., Никульшин С.В., Хабибуллин Р.Г., Тахтамышев Х.М. та ін. Не претендуючи на повноту аналізу, розглянемо роботи [3-7]. Типовим недоліком моделей, представлених в роботах [3-7], є їх неможливість враховувати вплив групових заявок автотехніки на процес функціонування авторемонтної організації. Наявність зазначеного недоліку не дозволяє отримати корисну модель, яка б відображала істотні для цілей моделювання параметри і властивості досліджуваного процесу.

Мета статті. Побудувати модель роботи авторемонтної організації з метою оптимізації процесу обслуговування прикордонної автотехніки, підвищення її технічної готовності.

Результати дослідження. Процес роботи авторемонтної організації (системи обслуговування) пов'язаний з надходженням груп вимог із заздалегідь невідомим кількісним складом даних груп у випадкові моменти часу. Такий потік вимог називається неординарним. Кожна група може містити рівно i вимог, що потребують індивідуального обслуговування, а саме надання кожній вимозі індивідуального каналу обслуговування (пост ТО і ПР), який (пост ТО і ПР) буде зайнятий обслуговуванням цієї вимоги в середньому $(1/\mu)$ часу.

Оцінка ймовірностей станів системи масового обслуговування з неординарним вхідним потоком вимог вважається можливою лише чисельними методами для конкретної структури потоку. Найбільш успішна спроба дослідження моделі обслуговування неординарного потоку представлена в роботі А. Шахбазова [8]. Проте в роботі А. Шахбазова [8] аналітичний опис фінальних ймовірностей системи обслуговування неординарного вхідного потоку відсутній.

Для формалізації такого процесу обслуговування назовемо групу у складі i вимог, що надійшли до системи обслуговування в один момент часу (одночасно) – заявкою на обслуговування. Як правило, завжди існує розумна оцінка максимально можливої кількості (L) вимог в одній заявці ($i \leq L$).

Заздалегідь вгадати кількість вимог у черговій заявці, як правило, не вдається і цю величину (i) приходить вважати випадковою. Однак спостереження за потоком заявок дозволяє оцінити частку (a_i) заявок, що включають рівно i вимог у складі загального потоку заявок до системи обслуговування. Величина a_i у такому випадку може служити оцінкою ймовірності того, що чергова заявка у своєму складі буде мати рівно i вимог. Тоді, оцінка математичного сподівання ($M_{\text{вим.з}}$) кількості вимог у складі однієї заявки знайдеться:

$$M_{\text{вим.з}} = \sum_{i=1}^L i \times a_i .$$

Для ординарного потоку інтенсивність заявок I визначає середню кількість вимог, що надходять у систему за одиницю часу і одночасно – частоту їхнього надходження. Для неординарного потоку з тією же

інтенсивністю I частота надходження груп вимог (заявок) буде меншою, що визначає необхідність використання ще однієї характеристики.

Параметром λ вхідного потоку заявок назвемо середню кількість заявок (груп вимог), що надходять до системи за одиницю часу ("частота" надходження груп вимог, заявок). Очевидно, що $(\lambda \leq I)$.

Парціальним потоком заявок з параметром λ_i назвемо частину загального вхідного потоку, що включає в себе потік заявок з кількістю рівно i вимог в одній заявці.

На практиці оцінка значень відзначених характеристик вхідного потоку може бути виконана в результаті спостереження за потоком і фіксації загальної кількості вимог ($N_{\text{вим}}$), що надходили до системи обслуговування за час спостереження ($T_{\text{спост}}$), а також кількості заявок (N_i) у складі рівно i вимог. Оцінки можна виконати за формулами:

$$I = \frac{N_{\text{вим}}}{T_{\text{спост}}}; \quad N_3 = \sum_{i=1}^L N_i; \quad a_i = \frac{N_i}{N_3}; \quad \lambda = \frac{N_3}{T_{\text{спост}}}; \quad \lambda_i = \lambda \cdot a_i.$$

Між відзначеними характеристиками неординарного вхідного потоку заявок (груп вимог) виникають наступні взаємозв'язки:

$$M_{\text{вим.з}} = \sum_{i=1}^L i \times a_i; \quad \lambda = \frac{I}{M_{\text{вим.з}}}; \quad \lambda_i = \lambda \times a_i; \quad i = 1, 2, \dots, L.$$

Перейдемо до опису авторемонтної організації, представленій багатоканальною системою масового обслуговування ($M_t/M/n/m$) з m місць для очікування і з неординарним вхідним потоком вимог. Нагадаємо, неординарність вхідного потоку припускає надходження вимог в систему обслуговування групами. Групи вимог називаються заявками. У даній системі є n однотипних приладів (каналів), обслуговуючих потік груп вимог з параметром потоку («частотою» появи груп) λ . Для обслуговування кожної вимоги, що надійшла у складі групи, призначається один вільний прилад (канал) обслуговування (пост ТО і ПР). Загальний вхідний потік включає L парціальних потоків заявок з параметрами $(\lambda_1 = \lambda a_1, \lambda_2 = \lambda a_2, \dots, \lambda_L = \lambda a_L)$. Нагадаємо, заявки в кожному парціальному потоці містять рівно i вимог ($i = 1, \dots, L$) в кожній заявці. Для визначеності вважатимемо, що $L \geq (n + m)$. При цьому для реального потоку з іншим складом заявок досить покласти рівними нулю ймовірності ($a_i = 0$) появи заявок у складі рівно i вимог, якщо такі заявки в потоці відсутні.

Вимога зі складу групової заявки, що не знайшла вільного каналу, стає в чергу і чекає обслуговування деякий випадковий час з середнім значенням $t_{\text{черг}}$. Якщо всі m місць в черзі вже зайняті, то вимога у момент надходження відразу отримує відмову і покидає систему необслуженою.

Відповідно до технології моделювання, для побудови моделі перерахуємо і позначимо символами S_k ($0 \leq k \leq n$) та $S_{n+\gamma}$ ($1 \leq \gamma \leq m$) кожен стан, при якому в системі знаходиться рівно k та $(n+\gamma)$ вимог. Після цього побудуємо граф моделі процесу (див. рис. 1) щодо n -канальної системи масового обслуговування з m місць для очікування та неординарним вхідним потоком заявок.

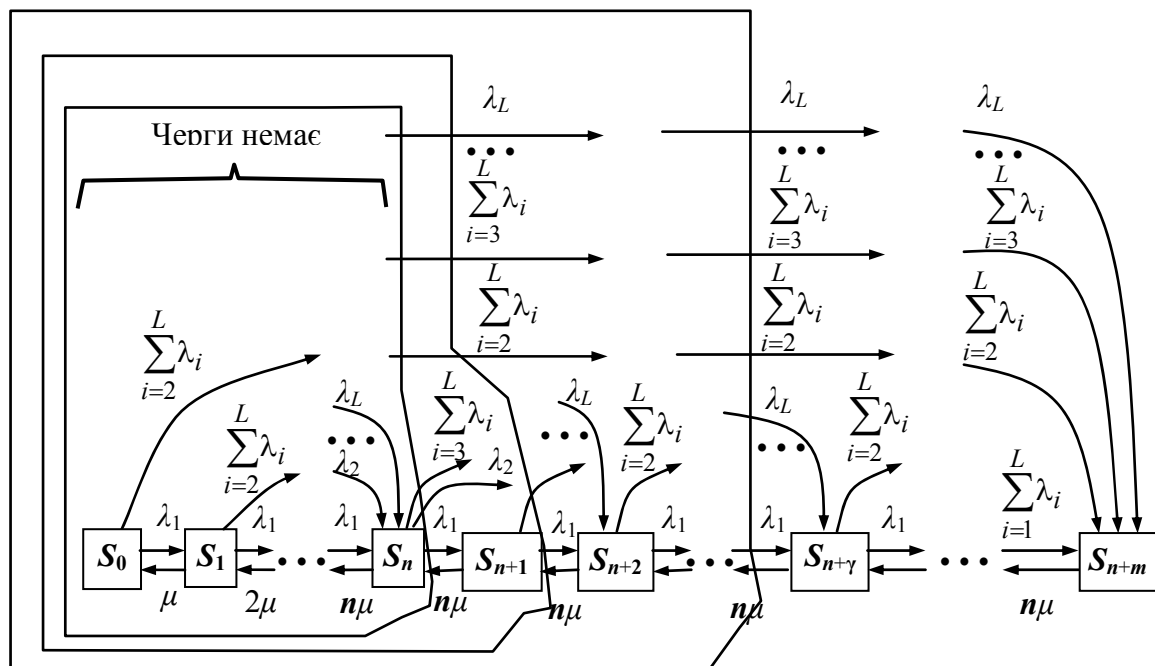


Рис. 1. Граф моделі процесу обслуговування неординарного вхідного потоку n -канальною СМО з m місць для очікування

На графі моделі у разі надходження заявки у складі однієї вимоги відбувається підключення ще одного каналу обслуговування або збільшення довжини черги з переходом в сусідній стан справа (див. на рис. 1 стрілка з позначенням частоти переходів λ_1). У разі надходження заявки з великою кількістю ($i > 1$)

вимог відбувається стрибкоподібне збільшення кількості вимог в системі і відповідний перескок управо через $(i-1)$ станів (див. на рис. 1 стрілка з позначенням частоти $\Sigma\lambda_i$), якщо в системі в даний момент є достатня кількість вільних каналів обслуговування або/і місць для очікування. В іншому випадку відбувається перехід в останній стан S_{n+m} . При цьому в заявці частина вимог, для яких не знайшлося вільних каналів обслуговування або місць для очікування, отримають відмову і покинуть систему необслуженими.

При формуванні інтенсивностей переходів з права наліво врахуємо кількість зайнятих каналів в кожному стані. Якщо зайнятий обслуговуванням один канал (стан S_1), то інтенсивність звільнення каналу (переходу із стану S_1 в стан S_0) збігається з продуктивністю μ одного каналу, якщо зайняті обслуговуванням всі n каналів (стан S_n), то інтенсивність звільнення каналу і переходу в попередній (S_{n-1}) -й стан буде рівна $n\mu$ – сумарній продуктивності n зайнятих каналів.

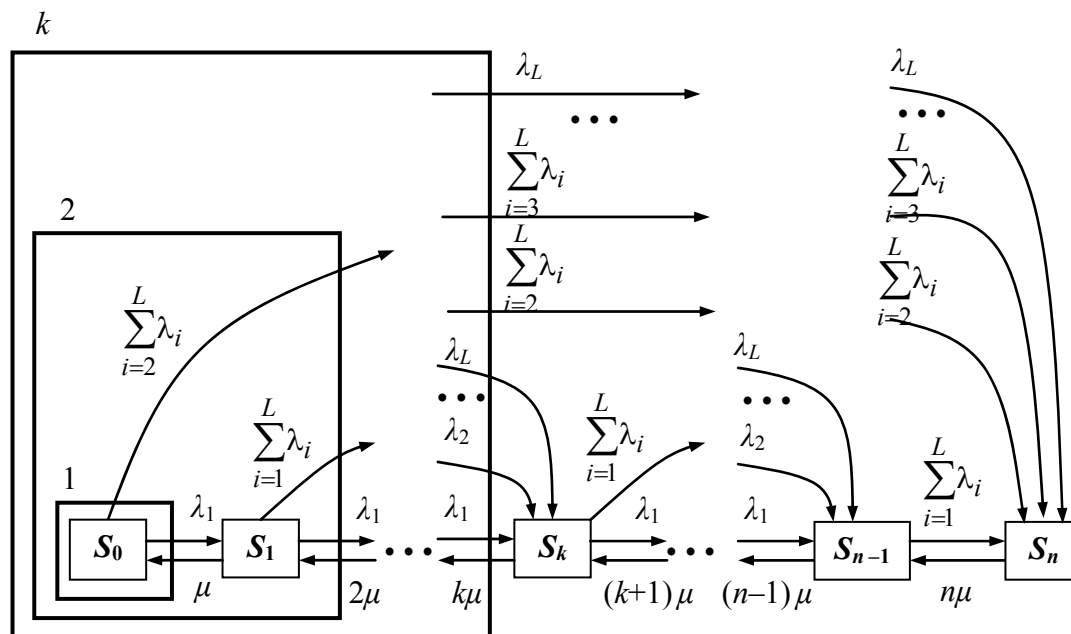


Рис. 2. Граф перших n станів n -канальної СМО з m місць для очікування і неординарним входним потоком вимог

В стані S_{n+1} всі канали зайняті обслуговуванням і в черзі знаходиться одна вимога. Інтенсивність переходу із стану S_{n+1} в стан S_n буде також рівна $n\mu$. В стані $S_{n+\gamma}$ у черзі знаходяться γ вимог. Інтенсивність переходу із стану $S_{n+\gamma}$ у стан $S_{n+\gamma-1}$ також дорівнює $n\mu$.

Перш ніж досліджувати процес обслуговування в станах $S_{n+\gamma}$ необхідно описати процес обслуговування до моменту досягнення стану S_n , в якому зайняті всі канали обслуговування. На рис. 2 розглянемо більш детально процеси, що відбуваються в перших n станах моделі.

Сумарна інтенсивність потоку обслуговування (кількість вимог, що обслуговуються, в одиницю часу) для кожного стану визначається кількістю каналів, зайнятих у цьому стані. Так, якщо зайнятий обслуговуванням один канал (стан S_1), то інтенсивність обслуговування дорівнює продуктивності одного каналу (μ), якщо зайняті обслуговуванням рівно k каналів (стан S_k), то інтенсивність обслуговування буде в k раз більше і складе величину $(k\mu)$.

На графі моделі (рис. 2) можливий покроковий перехід з одного стану в будь-який інший стан за кінцеве число кроків. Тому при постійних інтенсивностях переходів у системі обслуговування можливе встановлення стаціонарного режиму. Задача полягає у визначенні аналітичних виражень для фінальних ймовірностей P_k ($0 \leq k \leq n$) станів S_k .

Будемо шукати вираження для фінальних ймовірностей P_k у формі, близької до формул Ерланга [9], а саме у вигляді формули:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 f_k, \quad 0 \leq k \leq n. \quad (1)$$

У цьому випадку всі особливості неординарної структури входного потоку заявок повинні бути зосереджені у виразах для функцій неординарності (f_k). При виродженні входного потоку в ординарний (у найпростіший) усі функції неординарності повинні виявитися рівними одиниці і знайдені формули фінальних ймовірностей автоматично повинні перетворюватися у формули Ерланга, що буде свідчити на користь коректності аналізу. Впровадимо позначення для коефіцієнтів (ρ_i , $0 \leq i < L$) завантаження системи частиною входного потоку заявок:

$$\rho_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \sum_{j=1+i}^L \lambda_j, & \text{за умови } 0 \leq i < L; \\ 0, & \text{за умови } i \geq L. \end{cases} \quad (2)$$

Скористаємося правилом балансу потоків переходів [10] і складемо рівняння балансу для контурів на графі моделі (рис. 2), отримаємо:

$$\left. \begin{aligned} 1\mu P_1 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 2\mu P_2 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_0; \\ 3\mu P_3 &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_2 + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_1 + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_0; \\ &\dots \\ k\mu P_k &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0. \end{aligned} \right\}$$

Отримані рівняння дозволяють встановити закономірність їхнього формування: у правій частині кількість доданків збігається з індексом k фінальної ймовірності, розташованої в лівій частині рівності; індекс фінальної ймовірності в кожному доданку в правій частині рівності зменшується відносно індексу k на величину (α) номера доданка (у першому доданку – на $\alpha = 1$, у другому – на $\alpha = 2$ та ін.). Ця ж величина α є нижньою межею суми параметрів парціальних потоків груп вимог ($\sum \lambda_i$) для кожної зі згаданих ймовірностей. Тому далі будемо оперувати рівняннями для загального випадку k -го контуру на графі моделі (див. останнє рівняння для ймовірності P_k). Розділимо ліву і праву частини k -го рівняння на величину продуктивності μ , отримаємо:

$$kP_k = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{k-1} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{k-2} + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{k-3} + \dots + \frac{1}{\mu} \left(\sum_{i=k}^L \lambda_i \right) P_0$$

Потім скористаємося коефіцієнтами ($\rho_i, 0 \leq i < L$) завантаження системи частиною вхідного потоку заявок і знайдемо рівняння для загального випадку:

$$kP_k = \rho_0 P_{k-1} + \rho_1 P_{k-2} + \rho_2 P_{k-3} + \dots + \rho_{k-1} P_0. \quad (3)$$

Нагадаємо, що права частина рівняння (3) “збільшується” або “зменшується” автоматично залежно від значень індексу k у силу того, що для $i < 0$ стану S_i відсутні й ймовірності $P_i = 0$.

Підставимо формулу (1) для фінальних ймовірностей P_k , у рівняння (3). Третій доданок у правій частині використовувався для ілюстрації закономірності зміни доданків, далі з метою стислості запису третій доданок у правій частині опустимо, отримаємо:

$$k \frac{\rho_0^k}{k!} P_0 \cdot f_k = \rho_0 \frac{\rho_0^{k-1}}{(k-1)!} P_0 f_{k-1} + \rho_1 \frac{\rho_0^{k-2}}{(k-2)!} P_0 f_{k-2} + \dots + \rho_{k-1} \cdot (1) \cdot P_0 f_0.$$

Потім розділимо обидві частини рівності на множник, що знаходиться в лівій частині рівності перед функцією неординарності (f_k), для наочності врахуємо відкинутий третій доданок у правій частині рівності отримаємо:

$$f_k = f_{k-1} + f_{k-2} \frac{\rho_1}{\rho_0^2} (k-1) + f_{k-3} \frac{\rho_2}{\rho_0^3} (k-1)(k-2) + \dots + f_0 \frac{\rho_{k-1}}{\rho_0^k} (k-1) \dots (1)$$

В останньому доданку перемножується послідовність з $(k-1)$ чисел, кожне з яких менше попереднього на одиницю, останнє число виявляється рівним одиниці. Знайдене вираження є рекурентним, зручним для швидких чисельних розрахунків і може бути представлено більш компактно:

$$f_k = f_{k-1} + \sum_{i=2}^k \left[f_{k-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (k-j) \right], \quad k = 2, \dots, n. \quad (4)$$

Явні аналітичні вираження функцій неординарності з формули (4) одержати можна, але їхній запис марний по причині громіздкості.

Для визначення значення найпершої функції неординарності (f_0) підставимо у формулу (1) значення $k=0$, отримаємо:

$$P_0 = P_0 \times f_0,$$

звідси впливає рівність $f_0 = 1$. Значення функції неординарності (f_1) знайдемо з формули (4) при значенні $k=1$. Отримаємо:

$$f_1 = f_{1-1} + \sum_{i=2}^1 \left[f_{1-i} \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \prod_{j=1}^{i-1} (1-j) \right] = f_0 + [0] = f_0.$$

Таким чином, дві перші функції неординарності виявилися рівними одиниці ($f_1 = f_0 = 1$), що робить визначеними аналітичні вирази для всіх шуканих фінальних ймовірностей і дозволяє вважати поставлену задачу вирішеною.

Отже були виведені вирази фінальних ймовірностей перших n станів розглядаємої моделі $M_L/M/n/m$, а також формули для визначення функцій неординарності:

$$P_k = \frac{\rho_0^k}{k!} \cdot P_0 \cdot f_k, \quad k=1, \dots, n; \quad f_0 = f_1 = 1. \quad (5)$$

$$f_k = f_{k-1} + \sum_{i=2}^k \left[f_{k-i} \cdot \frac{\rho_{i-1}}{\rho_0^i} \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (k-j) \right], \quad k=2, \dots, n. \quad (6)$$

Перейдемо до отримання фінальних ймовірностей для станів $S_{n+\gamma}$ системи (рис. 1). В роботі [10] фінальні ймовірності $P_{n+\gamma}$ станів $S_{n+\gamma}$ ($\gamma > 0$) для системи обслуговування з найпростішим потоком та очікуванням мали вигляд:

$$P_{n+\gamma} = \frac{\rho^n}{n!} \left(\frac{\rho}{n} \right)^\gamma P_0, \quad \gamma=1, 2, \dots, m \quad (7)$$

У випадку неординарного вхідного потоку вимог фінальні ймовірності $P_{n+\gamma}$ станів $S_{n+\gamma}$ ($\gamma > 0$) шукатимемо з урахуванням вже відомої формули (7), помноженої на функцію неординарності $f_{n+\gamma}$:

$$P_{n+\gamma} = \frac{\rho_0^n}{n!} \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^\gamma \cdot P_0 \cdot f_{n+\gamma}, \quad \gamma = \overline{1, m}; \quad \rho_0 = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^L \lambda_j. \quad (8)$$

При цьому збережемо позначення для коефіцієнта (ρ_i , $0 \leq i < L$) завантаження системи частиною потоку [див. формула (2)]. Слід знайти розрахункові вирази для функцій неординарності $f_{n+\gamma}$. З цієї метою для груп станів $S_{n+\gamma}$ сформуємо три замкнуті контури (див. рис. 1) і складемо для них рівняння балансу потоків переходів в надії виявити закономірності таких рівнянь, отримаємо:

$$\begin{aligned} n\mu P_{n+1} &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_n + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{n-1} + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{n-2} + \dots + \left(\sum_{i=n+1}^L \lambda_i \right) P_0; \\ n\mu P_{n+2} &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{n+1} + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_n + \left(\sum_{i=3}^L \lambda_i \right) P_{n-1} + \dots + \left(\sum_{i=n+2}^L \lambda_i \right) P_0. \end{aligned}$$

Найбільш чітко логіку формування рівнянь можна встановити на прикладі контуру з номером γ (див. рис. 1), для якого запишемо рівняння балансу потоків переходів з урахуванням деталей його формування:

$$\begin{aligned} n\mu P_{n+\gamma} &= \left(\sum_{i=1}^L \lambda_i \right) P_{(n+\gamma)-1} + \left(\sum_{i=2}^L \lambda_i \right) P_{(n+\gamma)-2} + \dots + \left(\sum_{i=\gamma-1}^L \lambda_i \right) P_{(n+1)} + \\ &+ \left(\sum_{i=\gamma}^L \lambda_i \right) P_{(n+\gamma)-(\gamma-0)} + \left(\sum_{i=\gamma+1}^L \lambda_i \right) P_{(n+\gamma)-(\gamma+1)} + \dots + \left(\sum_{i=n+\gamma}^L \lambda_i \right) P_{(n+\gamma)-(n+\gamma)}. \end{aligned}$$

Відзначимо, що у другій стрічці рівняння використовується вже відома ймовірність [формула (5)] станів, для яких черга відсутня. Закономірності формування таких рівнянь виглядають наступним чином. У правій частині рівняння балансу потоків переходів кількість $(n+\gamma)$ доданків збігається із значенням індексу ймовірності у лівій частині рівняння, що легко прослідкувати по значеннях нижньої границі суми $(\sum \lambda_i)$ параметрів парціальних потоків. **Індекс ймовірності** в кожному подальшому доданку в правій частині рівняння **зменшується на одиницю** в порівнянні з індексом ймовірності у попередньому доданку. **Нижня межа** (початкове значення) індексу **суми** параметрів парціальних потоків в кожному доданку в правій частині рівняння збігається з числом, на яке зменшується індекс ймовірності, що стоїть при цій сумі параметрів.

В останньому рівнянні розділимо ліву і праву частини рівняння на продуктивність каналу обслуговування (μ). У правій частині рівняння, враховуючи отримані вирази коефіцієнта завантаження (2) системи частиною потоку, одержимо:

$$\begin{aligned} nP_{n+\gamma} &= \rho_0 P_{(n+\gamma)-1} + \rho_1 P_{(n+\gamma)-2} + \dots + \rho_{\gamma-2} P_{(n+\gamma)-(\gamma-1)} + \\ &+ \rho_{\gamma-1} P_{(n+\gamma)-(\gamma-0)} + \rho_\gamma P_{(n+\gamma)-(\gamma+1)} + \dots + \rho_{n+\gamma-1} P_{(n+\gamma)-(n+\gamma)}. \end{aligned}$$

Остаточно рівняння балансу потоків переходів для третього контуру на графі моделі (див. рис. 1) буде мати вигляд:

$$nP_{n+\gamma} = \sum_{j=0}^{\gamma-2} \rho_j P_{(n+\gamma)-1-j} + \sum_{k=0}^n \rho_{(\gamma-1)+k} P_{n-k}, \quad 0 < \gamma \leq m, \quad (9)$$

при якому другий доданок в правій частині рівняння об'єднує вже відому ймовірність [формула (5)] станів, для яких черга відсутня. Підставимо формулу (8) для фінальних ймовірностей в ліву частину рівності (9) і в перший доданок правої частини. У другий доданок правої частини підставимо формулу фінальних ймовірностей (5), отримаємо:

$$\begin{aligned} n \frac{\rho_0^n}{n!} \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^\gamma \cdot P_0 \cdot f_{n+\gamma} &= \sum_{j=0}^{\gamma-2} \rho_j \frac{\rho_0^n}{n!} \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^{\gamma-1-j} \cdot P_0 \cdot f_{(n+\gamma)-1-j} + \\ &+ \sum_{k=0}^n \rho_{(\gamma-1)+k} \frac{\rho_0^{n-k}}{(n-k)!} \cdot P_0 \cdot f_{n-k}; \quad 0 < \gamma \leq m. \end{aligned}$$

У лівій частині рівності в чисельнику співмножник n збігається із значенням знаменника співмножника $(\rho_0/n)^\gamma$ і ці елементи можна скоротити. Одночасно скоротимо у всіх доданках ймовірність P_0 , отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0^n}{n!} \cdot \frac{\rho_0^\gamma}{n^{\gamma-1}} \cdot f_{n+\gamma} &= \sum_{j=0}^{\gamma-2} f_{(n+\gamma)-1-j} \cdot \rho_j \cdot \frac{\rho_0^n}{n!} \cdot \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^{\gamma-1-j} + \\ &+ \sum_{k=0}^n f_{n-k} \cdot \rho_{(\gamma-1)+k} \cdot \frac{\rho_0^{n-k}}{(n-k)!}, \quad 0 < \gamma \leq m. \end{aligned}$$

Для визначення функції неординарності $f_{n+\gamma}$ розділимо ліву і праву частину рівності на множник, що стоїть в лівій частині при функції $f_{n+\gamma}$ знайдемо:

$$\begin{aligned} f_{n+\gamma} &= \sum_{j=0}^{\gamma-2} f_{(n+\gamma)-1-j} \cdot \rho_j \cdot \frac{\rho_0^n}{n!} \cdot \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^{\gamma-1-j} \cdot \left(\frac{n!}{\rho_0^n} \cdot \frac{n^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \right) + \\ &+ \sum_{k=0}^n f_{n-k} \cdot \rho_{(\gamma-1)+k} \cdot \frac{\rho_0^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \left(\frac{n!}{\rho_0^n} \cdot \frac{n^{\gamma-1}}{\rho_0^\gamma} \right), \quad 0 < \gamma \leq m. \end{aligned}$$

Далі скоротимо подібні співмножники і знайдемо остаточний вираз для функції неординарності $f_{n+\gamma}$.

$$\begin{aligned} f_{n+\gamma} &= f_{(n+\gamma)-1} + \sum_{j=1}^{\gamma-2} \left[f_{(n+\gamma)-1-j} \cdot \frac{\rho_j}{\rho_0^{j+1}} \cdot n^j \right] + \\ &+ \frac{n!}{\rho_0^\gamma} \cdot n^{\gamma-1} \cdot \sum_{k=0}^n \left[f_{n-k} \cdot \frac{\rho_{(\gamma-1)+k}}{\rho_0^k \cdot (n-k)!} \right], \quad 0 < \gamma \leq m. \end{aligned} \quad (10)$$

Нагадаємо, що сума членів дорівнює нулю, якщо кінцеве значення індексу суми менше початкового значення, оскільки така сума містить рівно нуль доданків. Аналогічне множення дорівнює одиниці. Відзначимо, що в правій частині формули (10) другий доданок відноситься до перших n станів системи масового обслуговування, в яких черги немає.

При $\gamma=1$ в правій частині формули (10) перша сума дорівнює нулю, а у другому доданку результатом множення є одиниця. При $\gamma=2$ в правій частині формули (10) в першій сумі залишається один доданок (для $j=0$), результат множення в цьому доданку дорівнює одиниці, отримаємо:

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= f_n + \frac{n!}{\rho_0} \cdot (1) \cdot \sum_{k=0}^n \left[f_{n-k} \cdot \frac{\rho_k}{\rho_0^k \cdot (n-k)!} \right], \quad \gamma=1; \\ f_{n+2} &= f_{n+1} + \frac{n!}{\rho_0^2} \cdot n \cdot \sum_{k=0}^n \left[f_{n-k} \cdot \frac{\rho_{k+1}}{\rho_0^k \cdot (n-k)!} \right], \quad \gamma=2. \end{aligned}$$

Для відшукування ймовірності P_0 нульового стану скористаємось умовою нормування ймовірностей, підставивши туди формули (5, 8):

$$\sum_{k=0}^{n+m} P_k = 1; \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} \cdot P_0 \cdot f_k + \sum_{\gamma=1}^m \frac{\rho_0^n}{n!} \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^\gamma \cdot P_0 \cdot f_{n+\gamma} = 1,$$

винесемо загальний множник P_0 за дужки і знайдемо його значення:

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^n \frac{\rho_0^k}{k!} f_k + \frac{\rho_0^n}{n!} \cdot \sum_{\gamma=1}^m \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^\gamma f_{n+\gamma} \right)^{-1}. \quad (11)$$

Відзначимо, що в даному випадку «станами, що генерують відмови» є всі останні $(L - 1)$ станів системи масового обслуговування, оскільки поява заявки у складі L вимог для цих станів приведе до обов'язкової відмови в обслуговуванні якоїсь частини вимог в цій заявці. Тому ймовірність обслуговування слід шукати із застосуванням виразу для математичного очікування числа зайнятих каналів обслуговування ($M_{зк}$) і абсолютної пропускної спроможності (A) системи. Для цього виразимо суму ймовірностей станів $S_{n+\gamma}$ з використанням умови нормування ймовірностей:

$$\sum_{k=0}^{n+\gamma} P_k = \sum_{k=0}^n P_k + \sum_{\gamma=1}^m P_{n+\gamma} = 1; \quad \rightarrow \quad \sum_{\gamma=1}^m P_{n+\gamma} = 1 - \sum_{k=0}^n P_k. \quad (12)$$

Математичне очікування ($M_{зк}$) кількості каналів, зайнятих обслуговуванням, знайдемо з урахуванням формули (12):

$$M_{зк} = \sum_{k=0}^{n+\gamma} k P_k = \sum_{k=0}^n k P_k + n \sum_{\gamma=1}^m P_{n+\gamma} = \sum_{k=0}^n k P_k + n \left(1 - \sum_{k=0}^n P_k \right).$$

Звідси, розкриваючи дужки, остаточно знаходимо:

$$M_{зк} = n - \sum_{k=0}^n (n - k) P_k.$$

Абсолютну пропускну спроможність (A) системи масового обслуговування знайдемо з урахуванням того, що кожен з $M_{зк}$ зайнятих каналів обслуговує в середньому μ вимог в одиницю часу:

$$A = M_{зк} \cdot \mu = \mu \cdot \left(n - \sum_{k=0}^n (n - k) P_k \right).$$

Ймовірність обслуговування (і відносну пропускну спроможність q) знайдемо як відношення середньої кількості обслужених вимог до середньої кількості вимог, що надійшли до системи за одиницю часу:

$$P_{обс} = q = \frac{A}{I} = \frac{1}{\rho} \left(n - \sum_{k=0}^n (n - k) P_k \right).$$

Ймовірність відмови знайдемо як ймовірність протилежної події:

$$P_{отк} = 1 - P_{обс}.$$

Середню довжину черги (r) знайдемо як математичне очікування випадкової величини γ – кількості вимог у черзі:

$$r = \sum_{\gamma=1}^m \gamma \cdot P_{n+\gamma} = \frac{\rho_0^n}{n!} \cdot P_0 \cdot \sum_{\gamma=1}^m \gamma \left(\frac{\rho_0}{n} \right)^\gamma f_{n+\gamma}.$$

Середня кількість вимог у системі (U) знайдемо як суму середньої кількості вимог, що знаходяться в обслуговуванні ($w = M_{зк}$), і середньої кількості вимог, що стоять у черзі:

$$U = M_{зк} + r.$$

Середній час очікування в черзі не задовольняє формулі Літтла і може бути обчислений завдяки безпосередньому підсумовуванню:

$$t_{оч} = \sum_{k=0}^{m-1} P_{n+k} \frac{k+1}{n\mu}.$$

Середній час обслуговування вимоги знайдемо як математичне очікування ($t_{обс}$) випадкової величини часу (t_0) обслуговування. При відмові в обслуговуванні $t_0 = 0$, при виконанні обслуговування $M[t_0] = 1/\mu$. Тоді математичне очікування ($t_{обс}$) прийме вигляд:

$$t_{обс} = 0 \cdot P_{отк} + \frac{1}{\mu} \cdot P_{обс} = \frac{1}{\mu} \cdot P_{обс} = \frac{q}{\mu}.$$

Загальний час ($t_{сум}$) знаходження вимоги в системі обслуговування виявиться рівним:

$$t_{сум} = t_{оч} + t_{обс} = t_{оч} + \frac{q}{\mu}.$$

Висновки. Таким чином в результаті проведеного моделювання була побудована модель роботи авторемонтної організації, яка враховує неординарність вхідного потоку заявок прикордонної автотехніки.

Оскільки отримана модель відображає істотні для цілей моделювання параметри і властивості досліджуваного процесу, то можна стверджувати про корисність розробленої моделі.

Надалі представляє цікавість, використовуючи розроблену модель авторемонтної організації, провести розрахунки показників процесу обслуговування прикордонної автотехніки з метою виявлення адекватності отриманої моделі.

Література

1. Кобеньков А.В. Техническое обеспечение войск пограничного округа. – М.: Воениздат, 1975. – 37 с.
2. Головня С.Б. Дослідження властивостей потоків заявок і обслуговувань автотранспортних засобів для побудови моделі ремонтного підрозділу органу охорони державного кордону // Зб. наук. пр/ Гол. ред. Балашов В.О. – Хмельницький: Вид-во Нац. Академія ДПСУ, 2010. – (№ 50/1. Ч. II) С. 35-41.
3. Madu C. A closed Quencintry Maintenance Network with two repair Centers // Journal of the Operational Research Sosiety (OR), Vol.39. № 10. 1998. – P. 959-967/
4. Власов В.М. Оценка и проектирование организационно-технологического обеспечения производства ТО и ремонта автомобилей: Дисс.... д-ра техн. наук. – М. 1996. – 363 с.
5. Никульшин С.В. Совершенствование структуры и организационных форм технологических процессов автосервисных предприятий: Дис. ... канд.техн. наук: 05.22.10 / УТУ. – К, 1999. – 211 с.
6. Хабибуллин Р.Г. Основы формирования фирменной системы технического обслуживания и ремонта автомобилей (на примере автомобилей КамАЗ): Автореф. дис. ... канд.техн.наук: 05.22.10. – М.: МАДИ (ТУ), 2000. – 21 с.
7. Тахтамышев Х.М. Теоретические основы формирования и использования внутри-производственной мощности автотранспортных предприятий: Дис.... д-ра техн. наук. – К., 1989. – 429 с.
8. Шахбазов А.А., Самандаров Э.Г. Об обслуживании неординарного потока // Сб. Кибернетику на службе коммунизму Т. II. М. – Л., Энергия, 1964. – С. 193–212.
9. Вентцель Е.С. Исследование операций. М.: – Советское радио, 1972. – 552 с.
10. Городнов В.П. Теоретические основы моделирования микроэкономических и других процессов и систем: Монография. – Х.: Изд-во АВВ МВД Украины, 2008. – 484 с.

Надійшла 23.2.2010 р.

УДК 677.055

Б.Ф. ППА, А.І. МАРЧЕНКО, В.В. ЧАБАН
Київський національний університет технологій та дизайну

ДВОПОТОЧНИЙ ЦИЛІНДРИЧНИЙ РЕДУКТОР З ЗОВНІШНІМ І ВНУТРІШНІМ ЗУБЧАСТИМИ ЗАЧЕПЛЕННЯМИ ТА ВИБІР ЙОГО ПАРАМЕТРІВ

Представлено результати досліджень по розробці нової конструкції зубчастого редуктора – двопоточного циліндричного редуктора з зовнішнім та внутрішнім зачепленням, що дозволяє вирішити проблему зменшення його габаритів і, відповідно, металомісткості. Наведено методику вибору робочих параметрів запропонованого редуктора, що забезпечують працездатність та довговічність його роботи.

The results of researches on development of a new design of a gear reducer – two-line cylindrical reducer with external and internal gearings are submitted, that allows to solve a problem of reduction of its dimensions and mass. The technique of choice of working parameters of the offered reducer is given which provide serviceability and durability it work.

Ключові слова: зубчастий редуктор, зубчасте зачеплення.

Вступ

Аналіз відомих конструкцій зубчастих редукторів [1– 3] показує, що перспективним напрямком їх проектування є зменшення їх габаритних розмірів та металомісткості. Одним із напрямків вирішення цієї проблеми є розробка двопоточних зубчастих редукторів.

Дослідження авторів присвячені розробці нової конструкції двопоточного зубчастого редуктора – циліндричного редуктора з зовнішнім та внутрішнім зубчастим зачепленням та методики вибору його робочих параметрів, здатних вирішити задачу підвищення ефективності роботи редуктора, що є актуальним для сучасного машинобудування.

Об'єктом досліджень обрано двопоточний циліндричний зубчастий редуктор та метод вибору його робочих параметрів, здатних забезпечити працездатність та ефективність роботи редуктора.

При вирішенні задач, поставлених у даній роботі, були використані сучасні методи теоретичних досліджень, що базуються на теорії деталей машин та опору матеріалів.

Завданням досліджень стала розробка перспективної конструкції двопоточного циліндричного зубчастого редуктора з зовнішнім та внутрішнім зубчастим зачепленням та методики вибору його робочих параметрів.

Основний розділ

В результаті проведених досліджень авторами запропонована принципово нова більш ефективна