

металлов с применением тлеющего и дугового разрядов в газах // Новые процессы термической обработки. Библиотека ОТТОМ. – Харьков: ННЦ ХФТИ, 2004. – С. 5-57.

4. Пастух І. М., Лук'янюк М. В. Азотування в циклічно комутованому тліючому розряді: початкові положення // Вісник ХНУ. – 2008. – № 6. – С. 38-41.

5. Попович М. Г., Ковальчук О. В. Теорія автоматичного керування: Підручник. – К.: Либідь, 1997. – 544 с.

Надійшла 15.2.2010 р.

УДК 621.81: (621.891+620.194)

І. М. ПАСТУХ, В.С. КУРСКОЙ  
Хмельницький національний університет

## МОДЕЛЬ КОНТАКТУ МІКРОЕЛЕМЕНТІВ ПОВЕРХОНЬ

*Запропонована модель контакту мікроелементів, які утворюють поверхню, з використанням форми параболоїдів.*

*The model of contact surface microelements, build a surface, is offered, with the use paraboloids form.*

Ключові слова: поверхня, модель, контакт, сили в контакті.

### Вступ та постановка задачі.

Задача контакту поверхонь з'єднань, критерій працездатності яких в основному становить фретингостійкість [1], є чи не центральною в дослідженні процесів тертя взагалі та фретингу в особливості. Справа, насамперед, полягає в тому, що форма та розміри поверхні контакту впливають не тільки на номінальну величину площі контакту, але, що, можливо, ще більш суттєво – на розподіл контактних напружень. Оскільки характер взаємодії двох поверхонь передбачає як пружні деформації, так і переходить в область пластичних, то по можливості точне визначення контактних напружень в цьому сенсі відіграє вирішальну роль.

**Аналіз стану задачі.** Макропрофіль поверхонь існує як математичне поняття, тобто якщо мова йде, наприклад, про ідеально плоску поверхню, описану відповідним рівнянням, то в дійсності ця субстанція представляє собою надзвичайно складну структуру, причому ступінь складності залежить від того, на якому рівні її розглядають: макро-, мікро- чи нанорівні. Реально дві поверхні контактують опосередковано на рівні мікроелементів (МЕ). Можливі різні варіанти математичного опису поверхні МЕ: сфера, коноїд, еліпсоїд, в тому числі – еліпсоїд обертання, окремим випадком якого є сфера, двополосний гіперболоїд, циліндрична поверхня різних типів, еліптичний параболоїд. Сферичною поверхнею доцільно моделювати макроповерхні. Коноїд не має закругленої вершини, що не зовсім відповідає реальній формі МЕ (див. нижче) та призводить до принципового спотворення картини контакту з умовно ідеальною площиною, яка характеризується, насамперед, значно більшою довжиною хвилі макропрофілю. Еліпсоїд при розташуванні більшої осі по дотичній до номінальної поверхні, яка формально описує геометричне місце точок границі між твердим тілом та його оточенням, може відображати певні МЕ, що мають симетрію стосовно цієї осі. При нормальному до номінальної поверхні розташуванні більшої осі еліпсоїда, він може моделювати гострі МЕ, але симетричні відносно нормалі до поверхні. Двополосний гіперболоїд ускладнює математичне оперування з моделлю, оскільки потрібно штучно відсікати одну частину.

В принциповому плані може використовуватись два типи еліптичних параболоїдних моделей відображення МЕ. В першому варіанті кожний МЕ відображається з індивідуальними параметрами висоти, півосей основи, тобто кожний реальний МЕ має унікальний математичний опис. При цьому еліпс основи параболоїда може орієнтуватись великою віссю вздовж напрямку траси ідентифікації або перпендикулярно до неї. Цей тип моделі придатний для використання упорядкованих структур, елементи яких суттєво не відрізняються один від іншого. У другому типі кожний МЕ відображається як різновид одного базового параболоїда, розміри якого в напрямку траси ідентифікації при різній висоті моделюються за рахунок зміни кутвої орієнтації МЕ на цій трасі. В принципі цей тип придатний для моделювання будь-якої поверхні, сформованої випадковим шляхом, проте існує певний жорсткий взаємозв'язок між характеристиками мікропрофілю вздовж та поперек траси ідентифікації, що в певній мірі може бути суттєвою передумовою, якщо виходити з концепції формування поверхні випадковим чином, хоча і з врахуванням статистично оброблених характеристик мікропрофілю.

**Основні положення моделі.** В підтвердження правомірності використання параболоїдної моделі наведемо рис. 1, на якому показана поверхня попередньо відполірованої міді з наступним бомбардуванням її іонами (збільшення на електронному мікроскопі 3000 раз) [2]. Частина МЕ цієї поверхні (на передньому плані) мають вершини, які зруйновані бомбардуванням. Проте основа їх, як і тих, що на задньому плані, за формою відповідають параболоїдам. Використання в якості прототипу МЕ поверхні еліптичного параболоїда відкриває можливість для однотипного математичного опису форми, оскільки в основу концепції передбачається покласти базовий еліптичний параболоїд (ЕП), форма якого показана на рис. 2, а рівняння має вигляд

$$z = \frac{x^2}{2v} + \frac{y^2}{2w}, \quad (1)$$

де  $v, w$  – сталі коефіцієнти більші нуля.

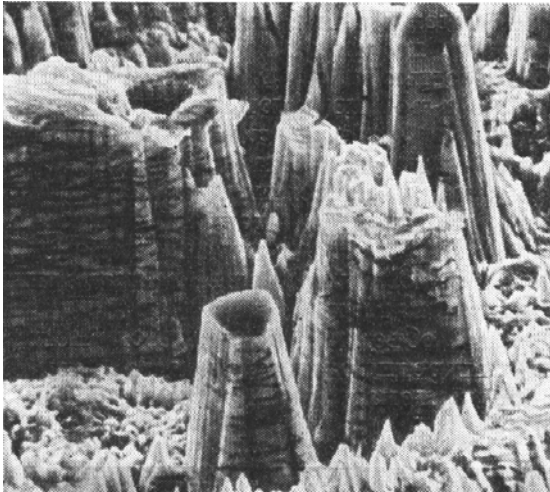


Рис. 1. Вигляд поверхні відполірованої міді після іонного бомбардування

Головні особливості еліптичного параболоїда зводяться до того, що в будь-якому перетині вертикальними площинами отримують параболи, рівняння яких: для площин, споріднених з  $zOx$   $x^2 = 2vz$ , для площин, споріднених з  $zOy$  –  $y^2 = 2wz$ ; будь-який перетин площиною, паралельною  $HOy$  на висоті  $h$  від вершини, має вигляд еліпса з великою та малою півосьми відповідно  $\sqrt{2vh}$  та  $\sqrt{2wh}$ .

Попередні принципи застосування ЕП викладені в [3]. Основу їх складає поняття базового ЕП, який має висоту, відповідну висоті найвищого МЕ, зафіксованого по трасі ідентифікації, більша вісь розраховується через максимальний коефіцієнт відносної ширини, менша – через мінімальний (див.

рис. 2).

$$a_0 = 0,5H_{mx}K_{Lmx}, \quad (2)$$

$$b_0 = 0,5H_{mx}K_{Lmn}, \quad (3)$$

де  $H_{mx}$  – максимальна висота МЕ, зафіксована по трасі ідентифікації,

$K_{Lmx}, K_{Lmn}$  – коефіцієнт максимальної (найбільшої) та мінімальної (найменшої) відносної ширини МЕ (відношення ширини МЕ в напрямку траси ідентифікації до його висоти), зафіксованих по цій трасі.

Однією з переваг параболоїдної форми МЕ є те, що в перетині його будь-якою вертикальною стосовно системи координат на рис. 2 площиною отримуємо параболу, тобто, якщо розглядати МЕ як консольно защемлену балку, то подібна форма наближає конструкцію до схеми балки рівної міцності. Це принципово важливо, коли враховувати, що фактор збурювання поверхні при фретингу може діяти в довільному напрямку горизонтально (з огляду на вибрану на рис. 2 систему координат). Концепція базового ЕП передбачає, що весь профіль поверхні по трасі ідентифікації моделюється однотипними за математичним описом фігурами, в даному випадку – еліптичними параболоїдами, причому той, що має максимальну відносну ширину орієнтований довшою віссю еліптичної основи вздовж траси ідентифікації, той, котрий має мінімальну відносну ширину – перпендикулярно трасі ідентифікації, всі інші проміжні розвернуті стосовно напрямку траси ідентифікації на певний кут. Зазначене, очевидно, стосується другого типу (див. вище) моделювання за допомогою еліптичних параболоїдів, для яких характерним є однотипність математичної моделі ЕП. Тоді базовий ЕП, виходячи з того, що

$$a_0 = \sqrt{2vH_{mx}} = 0,5H_{mx}K_{Lmx}; \quad v = 0,125H_{mx}K_{Lmx}^2; \quad (4)$$

$$b_0 = \sqrt{2wH_{mx}} = 0,5H_{mx}K_{Lmn}; \quad w = 0,125H_{mx}K_{Lmn}^2, \quad (5)$$

описується рівнянням

$$z = \frac{x^2}{0,25H_{mx}K_{Lmx}^2} + \frac{y^2}{0,25H_{mx}K_{Lmn}^2} = \frac{4}{H_{mx}} \left( \frac{x^2}{K_{Lmx}^2} + \frac{y^2}{K_{Lmn}^2} \right). \quad (6)$$

Ексцентриситет еліпса основи ЕП

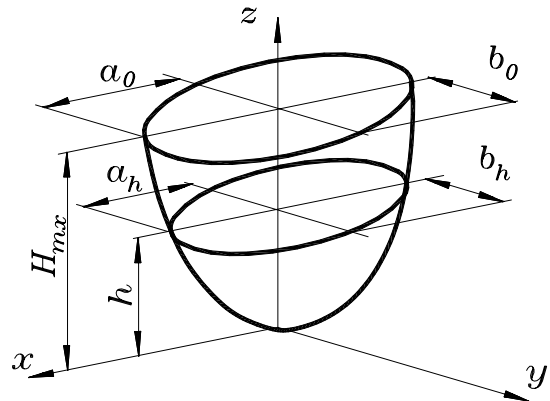


Рис. 2. Базовий еліптичний параболоїд

– еліптичними параболоїдами, причому той, що має максимальну відносну ширину орієнтований довшою віссю еліптичної основи вздовж траси ідентифікації, той, котрий має мінімальну відносну ширину – перпендикулярно трасі ідентифікації, всі інші проміжні розвернуті стосовно напрямку траси ідентифікації на певний кут. Зазначене, очевидно, стосується другого типу (див. вище) моделювання за допомогою еліптичних параболоїдів, для яких характерним є однотипність математичної моделі ЕП. Тоді базовий ЕП, виходячи з того, що

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b_0^2}{a_0^2}} = \sqrt{1 - \frac{K_{Lmn}^2}{K_{Lmx}^2}} \quad (7)$$

При відносній ширині певного  $i$ -го параболоїда  $K_{Lmn} < K_{Li} < K_{Lmx}$  рівняння еліпса основи ЕП в параметричній формі

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos \alpha_i \\ y = b \cdot \sin \alpha_i \end{cases} \quad (8)$$

а синус кута розвороту МЕ стосовно напрямку траси ідентифікації

$$\sin \alpha_i = \sqrt{\frac{a^2 - 0,25L_i^2}{a^2 \varepsilon^2}} \quad (9)$$

Враховуючи, що  $L_i = K_{Li} H_i$ , а

$$a_i = \sqrt{2\nu H_i},$$

$$\alpha_i = \arcsin \sqrt{\frac{\nu - 0,125 K_{Li}^2 H_i}{\nu \cdot \varepsilon^2}} \quad (10)$$

Координати точок еліпса, повернутого на кут  $\alpha_i$  (при умові, що центр його співпадає з початком координат) визначаються як функції координат еліпса з центром в точці початку координат

$$x_\alpha(x) = x \cdot \cos \alpha_i - y(x) \cdot \sin \alpha_i, \quad (11)$$

$$y_\alpha(x) = x \cdot \sin \alpha_i + y(x) \cdot \cos \alpha_i. \quad (12)$$

Для зручності представлення введемо поняття: матриці (М) – параболоїд направлено вершиною вниз – елемент умовно нерухомої поверхні; пуансона (Р) – направлений вершиною вгору – елемент рухомої при з'єднанні поверхні. Крім того, при розгляді пари контактуючих МЕ з метою спрощення попередніх викладок вважатимемо, що вісь параболоїда матриці співпадає з віссю  $z$ . Загальна картина контакту пари МЕ матриці і пуансона показана на рис. 3.

В загальному випадку кожний з МЕ пари контакту може бути розвернутий на кут  $\alpha$ . Пуансон зміщений відповідно по осях координат на величини  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$ . Точка початку системи координат на вершині найбільш виступаючого МЕ матриці. Тоді всі інші елементи матриці будуть описуватись рівняннями виду

$$z = \frac{(x - \Delta x)^2}{2\nu} + \frac{(y - \Delta y)^2}{2w} + \Delta z, \quad (13)$$

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  – зміщення МЕ стосовно початку координат в горизонтальній площині,

$\Delta z$  – різниця висот досліджуваного МЕ порівняно з найбільш виступаючого (ще раз звертається увага на ту обставину, що для зручності математичного опису МЕ матриці направлені випуклістю вниз).

Очевидно, що для кожного з МЕ, описаних формулою (13) сталі коефіцієнти  $\nu$  і  $w$  незмінні, оскільки використовується концепція базового параболоїда, але кожний з МЕ може бути повернутий на певний кут  $\alpha_M$ , який розраховується за формулою (10) залежно від поточного значення коефіцієнта відносної ширини. Тоді координати  $x$  і  $y$  визначаються з врахуванням кута повороту

$$x_\alpha(\lambda) = \sqrt{2\nu H_i} \cdot \cos(\lambda) \cdot \cos \alpha_i - \sqrt{2w H_i} \cdot \sin(\lambda) \cdot \sin \alpha_i + \Delta x, \quad (14)$$

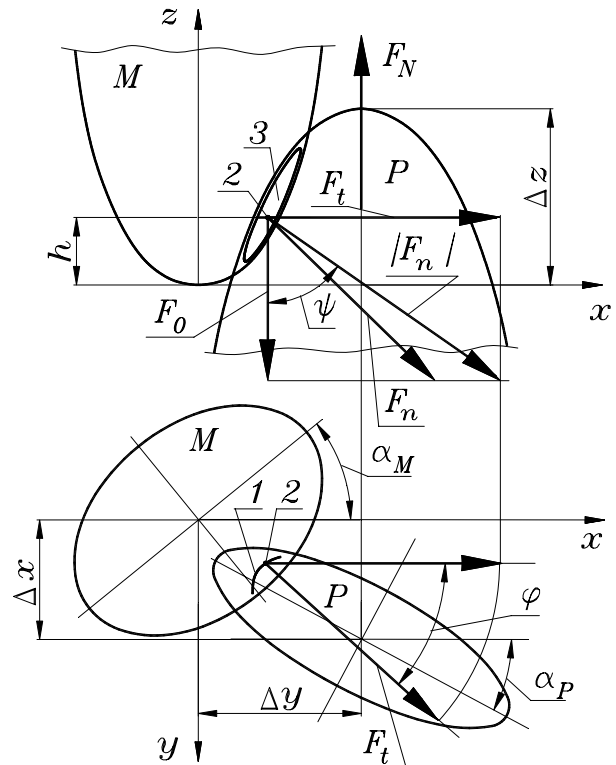


Рис. 3. Контакт матриці М та пуансона Р

1 – траєкторія лінії контакту на рівні  $h$ , 2 – точка прикладення рівнодійної тиску на цьому рівні, 3 – пляма контакту матриці та пуансона

$$y_{\alpha}(\lambda) = \sqrt{2vH_i} \cdot \cos(\lambda) \cdot \sin \alpha_i + \sqrt{2wH_i} \cdot \sin(\lambda) \cdot \cos \alpha_i + \Delta y, \quad (15)$$

а рівняння параболоїда матиме вигляд

$$z = \frac{(x_{\alpha}(\lambda) - \Delta x)^2}{2v} + \frac{(y_{\alpha}(\lambda) - \Delta x)^2}{2w} - \Delta z, \quad (16)$$

де  $\lambda$  – кутовий параметр,  $0 \leq \lambda \leq 2\pi$ .

Аналогічним порядком рівняння параболоїда, котрий відображає МЕ пуансона

$$z = \Delta z - \frac{(x_{\alpha}(\lambda) - \Delta x)^2}{2v} + \frac{(y_{\alpha}(\lambda) - \Delta x)^2}{2w}. \quad (17)$$

Просторова крива, яка є межею плями контакту матриці та пуансона, встановлюється за умови рівності відповідних рівнянь (16) і (17), що відображають конкретну пару взаємодіючих МЕ матриці та пуансона. Проте більш продуктивною буде дискретна процедура, в результаті якої можливим стає визначення не тільки, і навіть не стільки, абрису зони контакту, а основних сил, які діють по контактній площадці. Ці сили показані на рис. 3 стосовно матриці та певного перетину обох контактуючих МЕ на висоті  $h$ . Крива контакту досліджуваного перетину 1 встановлюється з огляду на рис. 4 наступним чином.

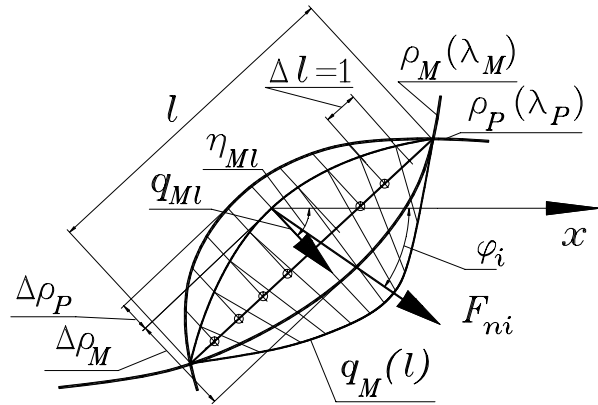


Рис. 4. Схема до визначення рівнодійної тиску в перерізі площадки контакту

Кінцевим результатом дискретної методики сканування площадки контакту повинно бути

визначення повної рівнодійної нормальних напружень стиску  $F_n$  та кутів орієнтації вектора рівнодійної в просторі  $\varphi$  та  $\psi$  (рис. 3). Ця процедура програмно реалізується наступним чином. В принципі в довільному напрямку з кроком, що дорівнює одиниці виміру довжини, тіла матриці та пуансона «розрізаються» паралельними площинами. Найоптимальнішим при цьому слід вважати варіант методики, коли система площин січення буде горизонтальною. Проте для випадку, коли досліджується пляма контакту, розташована на вершині МЕ більш доцільною буде система описана нижче. Послідовність подібного сканування принципової ролі не грає, бажано тільки для спрощення визначення рівнодійної кожного  $i$ -го шару забезпечити «однополостність» фігури, окресленої кривими абрисів матриці  $\rho_M(\lambda_M)$  та  $\rho_P(\lambda_P)$ , тобто фігура між означеними кривими повинна складатись з однієї частини. Точки перетину кривих абрисів  $\rho_M(\lambda_M)$  та  $\rho_P(\lambda_P)$  є точками початку та кінця кривої контакту в  $i$ -му шарові. Пряма, яка з'єднує ці точки, розбивається на ділянки шириною в одиницю довжини, в цьому випадку напруження стиску (наприклад стосовно матриці)  $q_M(l)$  з врахуванням того, що, як зазначалось вище, градація сканування в напрямку, перпендикулярному  $i$ -му шарові, теж буде рівною одиниці виміру довжини, будуть мати розмірність тиску (сила на одиницю площі).

Напруження тиску, виходячи з гіпотези нормальних напружень, нехтуючи силами тертя на поверхні контакту [4, 5], що в значній мірі дозволяє не враховувати дотичні напруження по кривій контакту в даному шарові, однакові для матриці та пуансона, тому

$$E_M \varepsilon_{\rho_M} = E_P \varepsilon_{\rho_P}, \quad (18)$$

де  $E_M, E_P$  – модулі пружності матриці та пуансона, в межах пружних деформацій можуть прийматись як сталі величини, трансформовані з відповідних значень модулів пружності для матеріалів матриці та пуансона із врахуванням масштабного фактору,

$\varepsilon_{\rho_M}, \varepsilon_{\rho_P}$  – відносні деформації поверхонь матриці та пуансона, при замкнутій формі перетину допустимо приймати

$$\varepsilon_{\rho_M} = \Delta \rho_M / 2 \rho_M(\lambda_M), \quad \varepsilon_{\rho_P} = \Delta \rho_P / 2 \rho_P(\lambda_P). \quad (19)$$

Якщо допустити, що абсолютні розміри МЕ по порядку величин співставимі, то відношення деформацій елементів поверхні контакту матриці і пуансона

$$\Delta \rho_M / \Delta \rho_P = E_P / E_M. \quad (20)$$

В разі, коли деформації елементів поверхні переходять в зону пластичності, або навіть ущільненого поза зоною пластичності стану, закон зміни модуля пружності може бути встановлено шляхом математичної інтерпретації діаграми напружень, в томі числі – за межею пружності, як криву другого чи третього порядку  $E(\varepsilon)$ .

Рівнодійна напружень тиску в  $i$ -му шарві як сума проєкцій напружень на напрямок нормалі до прямої, яка з'єднує початок та кінець кривої контакту в  $i$ -му шарві

$$F_{ni} = \sum_1^l q_l \cdot \sin(\mu + \eta_l), \quad (21)$$

де  $\eta_l$  – кут нахилу перпендикуляра до кривої контакту в точці  $l$ ,  $\eta_l = \arctg((y_l - y_{l-1}) / (x_l - x_{l-1}))$ ,  $y_l, y_{l-1}, x_l, x_{l-1}$  – координати точок на кривій контакту, як точки перетину цієї кривої з перпендикулярами до прямої, котра з'єднує початкову та кінцеву точки кривої,  $\mu$  – кут нахилу прямої, яка з'єднує початкову та кінцеву точки кривої контакту в  $i$ -му шарві,  $\mu = \arctg((y_n - y_k) / (x_n - x_k))$ ,  $y_n, y_k, x_n, x_k$  – координати точок початку та кінця кривої контакту, встановлені як точки перетину абрисів перетинів МЕ на рівні  $i$ -го шару. Можливий варіант визначення рівнодійної як векторної суми окремих напружень стиску.

Кут повороту рівнодійної в площині  $xOy$  визначається, якщо допустити, що сукупність напружень стиску по довжині кривої контакту  $i$ -го шару аналогічна системі сил, котрі сходяться (ефект дії можливо необхідного врівноважувального моменту з огляду на величину сил не розглядаємо)

$$\varphi_i = \arctg\left(\frac{\sum_{l=1}^l q_l \sin \eta_l}{\sum_{l=1}^l q_l \cos \eta_l}\right). \quad (22)$$

Точка прикладення рівнодійної визначається за відомою процедурою знаходження центра мас епюри  $q_M(l)$  (рис. 4).

Оскільки конфігурація зони контакту має форму виїмки, як правило, з чітким максимальним заглибленням, то цілком ймовірно, що характер розподілу напружень стиску в усіх перетинах буде аналогічним. При цьому важливо, щоб паралельні площини січення по можливості були перпендикулярні площині, в якій лежить крива, котра з'єднує точки максимальних напружень стиску.

Поточні кути нахилу рівнодійної для кожного  $i$ -го шару визначається як кути перпендикулярів до поверхні МЕ в точці, де вона перетинається силою  $F_{ni}$ .

Тоді кут повної рівнодійної сил тиску в площині  $xOz$  визначиться аналогічно формулі (22)

$$\psi = \arctg\left(\frac{\sum_{i=1}^i F_{ni} \sin \psi_i}{\sum_{i=1}^i F_{ni} \cos \psi_i}\right). \quad (23)$$

При цьому аналогічно попередньому умовно вважається, що сукупність сил відповідає схемі сил, які сходяться. Точка прикладення повної рівнодійної напружень тиску визначається теж за загальними правилами знаходження координат епюри рівнодійних сил для всіх шарів.

**Висновок.** Запропонована модель контактуючих поверхонь, в основі якої покладено мікроелемент у вигляді еліптичного параболоїда, дозволяє суттєво спростити аналітичний апарат та методику визначення сил, які виникають в зоні контакту. Просторове положення рівнодійної сили контактних напружень, рівно як і точка її прикладення, дозволяють визначити її дві головні складові: нормальну до номінальної поверхні контакту, яка врівноважує силу стиску, прикладену до контактуючих деталей та формує сили тертя; дотичну, яка разом з силою тертя взаємодіє з силою збурення контакту. В реальній конструкції контактуючих пар МЕ безліч, тому подальші дослідження повинні базуватись на випадковому принципі підбору пар контакту та оперування зведеними нормальними та дотичними силами.

## Література

1. Пастух І. М., Курської В. С. Класифікація та аналіз з'єднань деталей машин з позицій фретингостійкості // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 5. – С. 20-23.
2. Физический энциклопедический словарь. – М.: Советская энциклопедия, 1983. – С. 879.
3. Пастух І. М., Курської В. С. Методика ідентифікації поверхонь фретинг-контакту // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – № 1. – С. 47-50.
4. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник: В 3-х т. – Т. 2. – М.: Машиностроение, 1968. – 464 с.
5. Тимошенко С. П. Сопротивление материалов: Т. 1. – М.: Наука, 1965. – 364 с.

Надійшла 8.2.2010 р.