

Рис. 7. Функція $\frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$ (а) та її амплітудно-частотний спектр (б)

Висновки

Аналізуючи розглянуті вище методи вимірювання ЧХ лінійних чотириполосників, можна зробити такі висновки: методи вимірювання ЧХ ґрунтуються на використанні зондуючих сигналів, параметри яких змінюються у часі; за допомогою методів з використанням багаточастотних сигналів можна точніше і швидше виміряти параметри АЛЗ; найбільш близьким до визначених вимог для вимірювального сигналу є функція $f(\omega t) = \frac{\sin(\omega t)}{\omega t}$, спектральна характеристика якої має прямокутну форму. Але вона має недолік великого значення пік-фактору. Тому для зменшення похибок визначення ЧХ лінійних чотириполосників використовують сигнали, які мають прямокутний спектр і мінімальний пік-фактор.

Література

1. Бакланов И.Г. Методы измерений в системах связи. – М.: Эко-Трендз, 1999. – 193 с.
2. Бортник Г.Г., Кичак В.М. Яблонський. Методи та засоби оцінювання параметрів абонентських ліній зв'язку: Монографія. – Вінниця: УНІВЕРСУМ-Вінниця, 2006. – 139 с.
3. Гоноровский И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Сов.радио, 1977. – 496 с.
4. Мейзда Ф. Электронные измерительные приборы и методы измерений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990.
5. Радиотехнические цепи и сигналы: Учеб пособие для вузов / Д.В. Васильев, М.Р. Витоль, Ю.Н. Горшенков и др. / Под ред. К.А. Самойло. – М.: Радио и связь, 1982. – 528 с.
6. Тихонова Б.Н. Метрология и электрорадиоизмерения в телекоммуникационных системах: Учеб. пособие для вузов. – М.: Горячая Линия – Телеком, 2002. – 374 с.
7. А.с. № 1651245 СССР, МКИ G01 R 27/28 Устройство для измерения амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик четырехполосников с преобразованием частоты: . / К.С. Коротков, В.В. Зарубин (СССР). – № 4650094/21; Заявлено 13.02.89; Опубл. 23.05.91, Бюл. № 19. – 8 с., ил.

Надійшла 12.2.2010 р.

УДК 621.317.73

Ю.М. БОЙКО, В.М. ЛОКАЗЮК, О.І. БОНДАРЧУК
Хмельницький національний університет

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ЗАТУХАННЯ ПРИ ОПТИЧНІЙ РЕФЛЕКТОМЕТРІЇ ВОЛОКОННИХ СВІТЛОВОДІВ

Проведений аналіз визначення параметрів оптичних хвилеводів з допомогою методу імпульсної рефлектометрії. Розглянуті особливості рефлектограм при визначенні відстані до пошкоджень світловоду. Досліджений вплив тривалості зондуючих імпульсів на величину сигналу зворотного релеєвського розсіювання світла у волокні, ширину мертвої зони на початку рефлектограм та динамічний діапазон вимірювань.

The conducted analysis of determination of parameters of optical waveguides is with the help of method of impulsive measuring reflectometer. The considered features reflectors are at determination of distance to the damages of fibre explorers of light. Probed influence of duration of soundings impulses on the size of signal of reverse of Relleya dispersion of light in a fibre, width of dead area at the beginning to the reflectors and dynamic range of measurings.

Ключові слова: імпульсний метод рефлектометрії, оптичний світловод, рефлектограма, динамічний діапазон, «мертва» зона, зондуєчий імпульс.

ВСТУП

Основне обмеження для передачі інформації по волоконно-оптичній лінії зв'язку полягає в затуханні оптичного сигналу в міру його поширення по волокну. Інформація, що міститься в світловому сигналі, який розповсюджується по світловоду, має бути отримана і перетворена в свою початкову форму. В

міру поширення по волокну оптичний сигнал затухає із-за релеевського розсіяння (1). Деяка частка світлової енергії поглинається, частка енергії випромінюється з волокна назовні на дефектах, що виникають в склі при надмірних вигинах волокна. Якщо втраченої світлової енергії дуже багато, то сигнал може опинитися дуже слабким, щоб приймач на далекому кінці міг розрізнити в цьому сигналі окремі імпульси. Якщо сигнал в приймача дуже слабкий, тоді для компенсації надмірного затухання доведеться збільшити вихідну потужність передавача, підвищити чутливість приймача або зменшити відстань між передавачем і приймачем. Вкрай важливе знати, скільки саме світлової енергії втрачається в якому-небудь відрізку волокна перед тим ніж використовувати його в мережі зв'язку. Якщо повне затухання дуже велике, то необхідно приймати певні заходи по виправленню положення. Крім того при експлуатації інформаційних мереж оптичного діапазону частот виникають ефекти постійного зростання втрат у волоконних світловодах, а також несподівані порушення його світлопровідності. В цих випадках необхідно в короткий термін визначити координати місць пошкодження оптичних світловодів з метою проведення термінових ремонтно-відновлювальних робіт.

АНАЛІЗ ОСТАННІХ ДОСЛІДЖЕНЬ І ПУБЛІКАЦІЙ

При аналізі функціонування оптичних світловодів використовують імпульсні методи рефлектометрії (2). Найбільш розвиненим методом імпульсної рефлектометрії є метод OTDR (Optical time-domain reflectometer). На даний час випускається широка номенклатура OTDR рефлектометрів. Принцип роботи таких рефлектометрів ґрунтується на використанні послідовності одиничних зондуючих імпульсів. При проходженні оптичного імпульсу по тестованому волокну в кожен момент часу відбувається релеевське розсіяння на його локальних неоднородностях. Сигнал цього розсіяння в зворотну від руху світлового імпульсу сторону реєструється приймальним фотодіодом рефлектометра. Сигнал зворотного розсіяння складає порядку 0,0001 % потужності зондуючого імпульсу рис. 1. Вимірювання часового інтервалу між зондуючим імпульсом і сигналом зворотного розсіяння дає можливість визначити фізичну довжину між двома точками волокна. При проходженні оптичного імпульсу по тестованому волокну його потужність (амплітуда) зменшуються за рахунок розсіювання і втрат на локальних неоднорідностях волокна. Очевидно, що і сигнал зворотного розсіяння (його амплітуда) знижуватимуться. Потужність сигналу зворотного розсіяння залежить від амплітуди і тривалості посланого імпульсу. Аналіз залежності зміни амплітуди сигналу зворотного розсіяння на ділянках волокна дозволяє оцінити загасання даних ділянок.

Рефлектометр за один цикл вимірювань оптичного волокна (кабелю) дозволяє визначити: довжину всього кабелю і відстані до будь-якої його ділянки; затухання всього кабелю і його окремих ділянок; коефіцієнт загасання на одиницю довжини кабелю (наприклад, на кілометр); загасання в неоднорідностях кабелю; коефіцієнт відбиття від роз'ємного з'єднання двох оптичних волокон або від кінця оптичного волокна; відношення потужності, що вводиться в оптичне волокно, до потужності, що повернулася на початок волокна від заданої ділянки або всієї лінії. Можливості рефлектометра (його якості) по вимірюванню вказаних вище параметрів визначаються наступними його характеристиками: довжина хвилі випромінювання; тривалість імпульсів; мертва зона; динамічний діапазон вимірювання затухання; роздільна здатність.

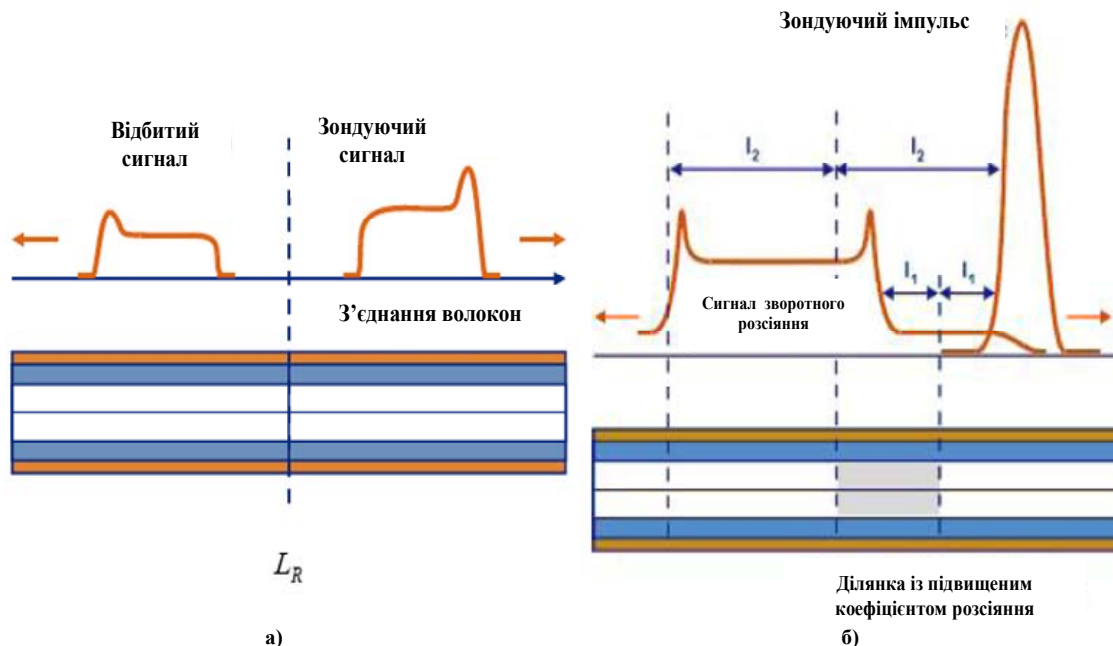


Рис. 1. Формування відбитого і розсіяного випромінювання при розповсюдженні короткого світлового імпульсу в оптичному світловоді: а) світловий сигнал відбитий від неоднорідності L_R ; б) сигнал зворотного розсіяння від ділянки із великим коефіцієнтом розсіяння

Для коротких зондуючих імпульсів потужність зворотного розсіяння $P_S(L, L)$ від деякої ділянки з

координатою L (рис. 1) поблизу цієї ділянки визначається енергією імпульсу на цій ділянці $W(L)$ і коефіцієнтом зворотного розсіяння K_S волокна (одиниця вимірювання c^{-1}). Тоді маємо:

$$P_S(L, L) = W(L)K_S = W_0 A(L)K_S, \quad (1)$$

де W_0 – енергія зонду чого імпульсу на вході у волоконний світловод, $A(L)$ – інтегральне затухання світла на ділянці від торця волокна до тестованої ділянки з координатою L .

Потужність, що реєструється фотоприймачем рефлектометру, менша наведеної потужності в декілька разів, що дорівнюють затуханню світла на шляху від досліджуваної ділянки до вхідного торця волокна. Очевидно, затухання на ділянці лінії зв'язку, що побудована з одномодових волокон, не залежить від напрямку і тоді реєстрована фотоприймачем потужність буде дорівнювати:

$$P_S(L) = A(L)P_S(L, L) = W_0 A^2(L)K_S = P_S(0)A^2(L), \quad (2)$$

де $P_S(0) = W_0 K_S$.

В логарифмічних одиницях вираз (2) буде мати вигляд:

$$P_{SdB}(L) = P_{SdB}(0) - 2A_{dB}(L), \quad (3)$$

де $P_{SdB}(0) = 10 \lg P_S(0)$, $P_{SdB}(L) = 10 \lg P_S(L)$ – відповідно потужності зворотного розсіяння поблизу вхідного торця волокна і ділянки з координатою L . $A_{dB}(L)$ – інтегральне затухання в логарифмічних одиницях (децибелах) на шляху від вхідного торця волокна до ділянки з координатою L . Знак «мінус» у формулі (3) обумовлений тим, що $A_{dB}(L)$ є додатною величиною.

Залежність потужності в дБм від часу наведено на рис. 2 а.

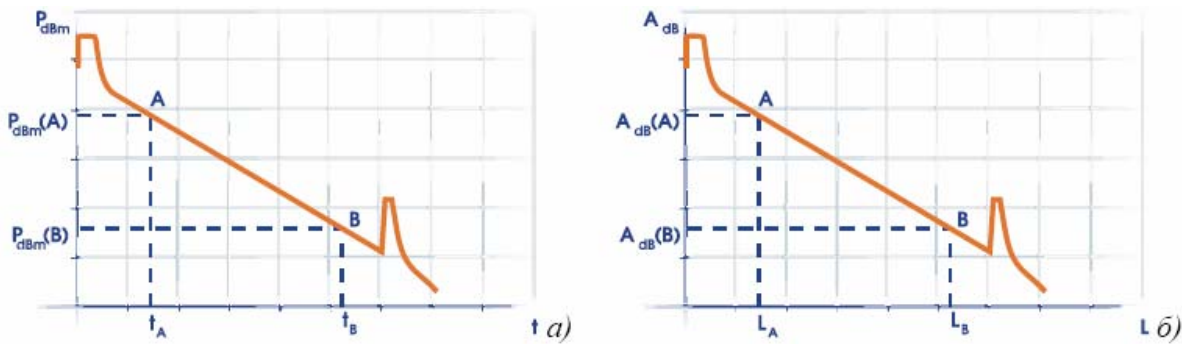


Рис. 2. Часова залежність реєстрованої фотоприймачем потужності зворотного розсіяння (а) і відповідні цій часовій залежності рефлектограма (б), отримана переходом по формулах (4, 5)

Потужність реєструється в моменти часу t_A, t_B визначається подвоєним затуханням світла на шляху до цих ділянок. Оскільки, задачею вимірювання проведеного в магістерській роботі, було вимірювання затухання, а ні його подвоєного значення, то прилад перераховував вимірювану залежність так, що на вертикальній шкалі відкладалось затухання в дБ, яке вдвічі менше значення різниці між рівнем втрат у вимірювальній точці і початковим рівнем втрат рис. 2 б:

$$A_{dB}(L) = 0,5[P_{SdB}(0) - P_{SdB}(L)], \quad (4)$$

або

$$A_{dB}(L) = 5 \lg \left[\frac{P_{SdB}(0)}{P_{SdB}(L)} \right], \quad (5)$$

По горизонтальній шкалі відкладемо відстань шляхом перерахунку з формули:

$$L = 0,5t v_{ГР}, \quad (6)$$

де $v_{ГР}$ – групова швидкість розповсюдження імпульсу по світловоду.

Тоді втрати у волоконній лінії передачі інформації в дБ на км визначимо так:

$$\alpha = \frac{5 \lg \left[\frac{P_{SdB}(0)}{P_{SdB}(L)} \right]}{L}. \quad (7)$$

ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ОПТИЧНОГО СВІТЛОВОДА З ДОПОМОГОЮ OTDR

Для вимірювання параметрів оптоволоконна використовували імпульсний рефлектометр марки Agilent E6003C (рис. 3). Для того щоб під'єднати волокно до джерела світла чи вимірювача, до волокна

необхідно під'єднати оптичний роз'єм. На ринку є велика кількість роз'ємів, найбільш звичайними є FC/PC, ST, SC, Biconic, SMA и D4. Для своїх вимірювань використовували роз'єм PC (Physical Contact – прямий фізичний контакт). Результати вимірювань графічно відображаються на екрані в вигляді рефлектограм. При цьому по вертикальній осі ведеться відлік потужності, а по горизонтальній осі – відстань.



Рис. 3. Рефлектометр марки Agilent E6003C

Приведені на рисунках 4-9 приклади рефлектограм, які найбільш частіше зустрічаються для об'єктів в волокні (об'єктом може бути все те, що викликає втрати або віддзеркалення – з'єднання, пошкодження).

В результаті перерахунку рефлектограма представляється на дисплеї OTDR як функція довжини волокна. При цьому точність вимірювання відстані за допомогою рефлектометра обмежується тими ж чинниками, що і при класичних способах виміру відстані (наприклад, за допомогою лінійки). А саме, точністю визначення положення початку і кінця відліку і точністю калібрування шкали приладу. Для OTDR характерне те, що точність виміру відстані практично не залежить від тривалості (τ) зондуючих імпульсів, яка може мінятися в широких межах (від 2 нс до 20 мкс). Обумовлено це тим, що положення неоднорідності на рефлектограмі визначається по передньому фронту імпульсу, як це показано на рис. 11.

На рис. 11 представлені рефлектограми відрізка волокна завдовжки близько 5 км з погонними втратами приблизно 0.2 дБ/км на $\lambda = 1550$ нм. Рефлектограми виміряні при двох значеннях тривалості імпульсу 100 нс (суцільна лінія) і 1 мкс (пунктирна лінія). Рефлектограми є прямими лініями (з кутом нахилу ~ 0.2 дБ/км) та з сплесками сигналу на початку і в кінці лінії. Ці сплески сигналу викликані відбиттям імпульсів світла від оптичного роз'єму рефлектометра і від торця волокна і є по суті осцилограми відбитих імпульсів. Причому передній фронт відбитих імпульсів відображується ближчим на початок рефлектограми, оскільки він приходить на фотоприймач раніше, ніж його задній фронт.

Довжину волокна знаходили по відстані між передніми фронтами імпульсів, відбитих від оптичного роз'єму рефлектометра і від заднього торця волокна. Ця відстань, як видно з рис. 11, не залежить від ширини імпульсу. Точність, з якою визначається положення початку і кінця волокна тим вище, чим більше крутість переднього фронту імпульсу.

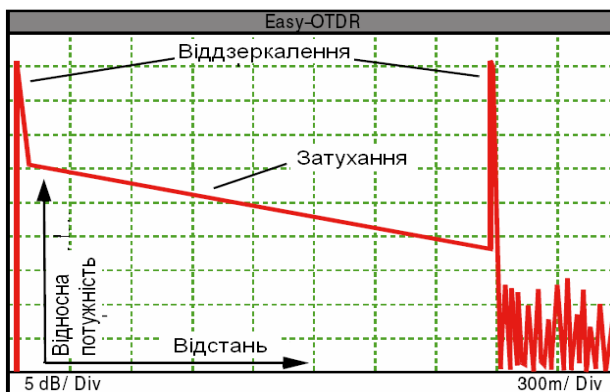


Рис. 4. Рефлектограма одномодового оптоволокна

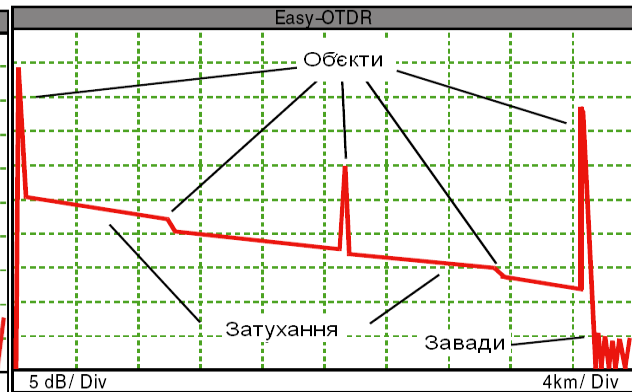


Рис. 5. Рефлектограма повного з'єднання

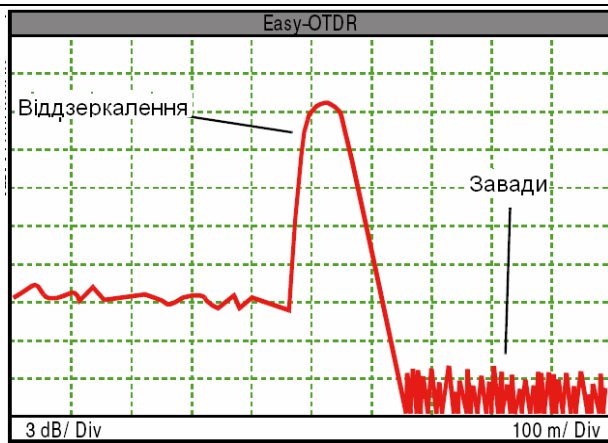


Рис. 6. Рефлектограма, початок оптоволоконна

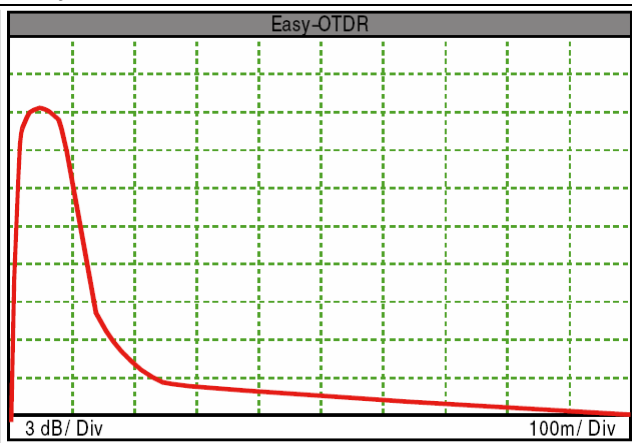


Рис. 7. Рефлектограма, кінець оптоволоконна

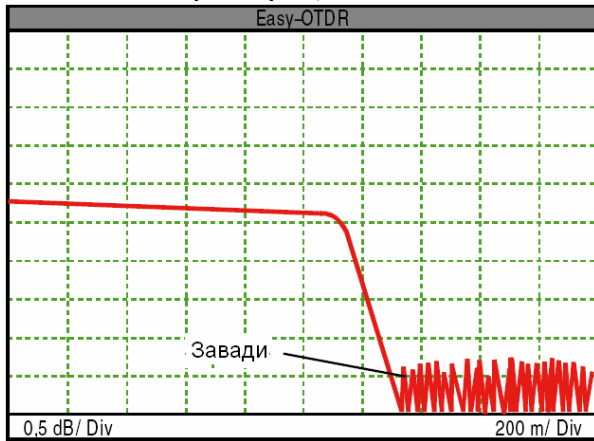


Рис. 8. Рефлектограма, обрив оптоволоконна



Рис. 9. Рефлектограма, тріщина

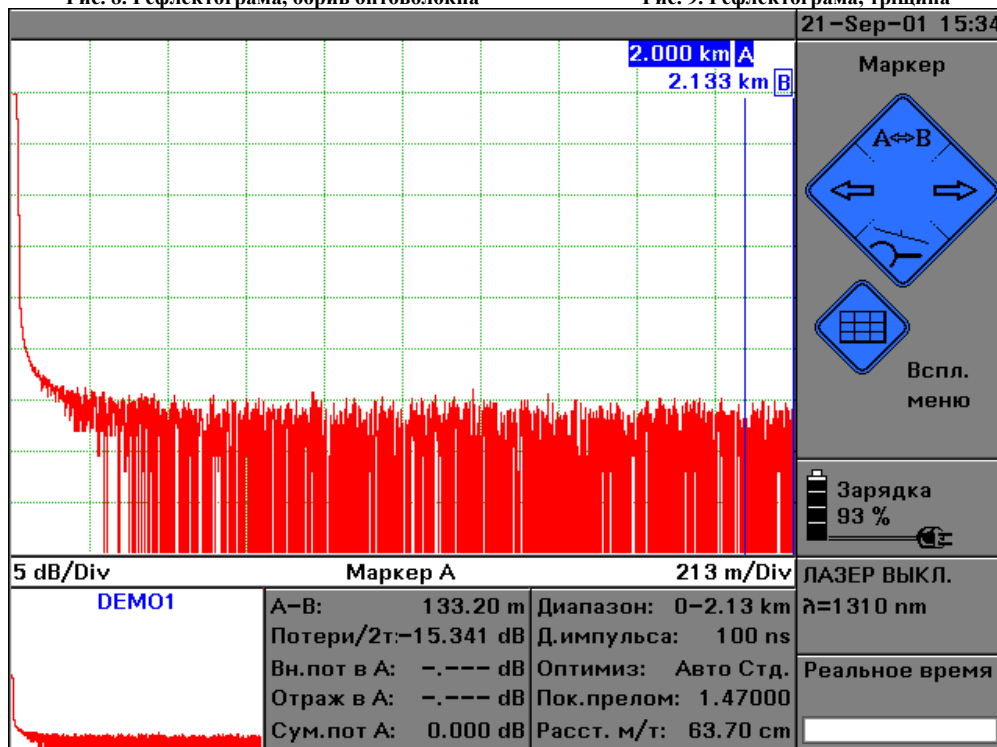


Рис. 10. Екран рефлектометра Agilent E6003C

Тривалість імпульсів визначає величину сигналу зворотного релеевського розсіювання світла у волокні і ширину мертвої зони на початку рефлектограм. При великій тривалості імпульсу (1 мкс) сигнал зворотного релеевського розсіювання помітно перевершує рівень шумів рис. 12 в кінці рефлектограми, але при цьому мертва зона робить недоступним для вимірювання велику ділянку на початку волокна (~ 0.5 км.). При зменшенні тривалості імпульсу до 100 нс рис. 11 ширина мертвої зони зменшується приблизно в 10 разів. При цьому рівень сигналу зворотного релеевського розсіювання зменшується на 5 дБ, і вклад шумів може вже стати помітним.

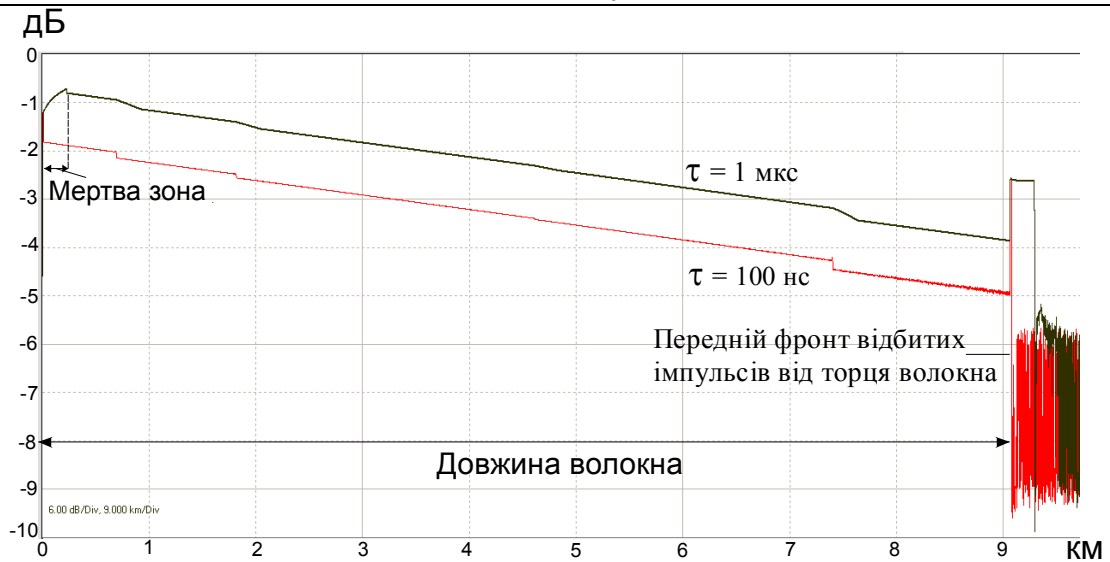


Рис. 11. Рефлектограма вимірювання довжини волокна по сигналу відбиття від кінця волокна

Величина динамічного діапазону залежить від параметрів, що встановлюються користувачем: тривалості імпульсів, часу усереднення сигналу і діапазону вимірювальних довжин. Так, наприклад, при збільшенні тривалості імпульсу в 1000 разів (від $\tau_1 = 10$ нс до $\tau_2 = 10$ мкс) коефіцієнт зворотного релеєвського розсіювання збільшується (за шкалою рефлектометра) на $5 \log\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = 15$ дБ. Оскільки рівень шумів (у відсутності сигналу) при цьому не міняється, то динамічний діапазон теж збільшується на $5 \log\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right) = 15$ дБ. (рис. 13).

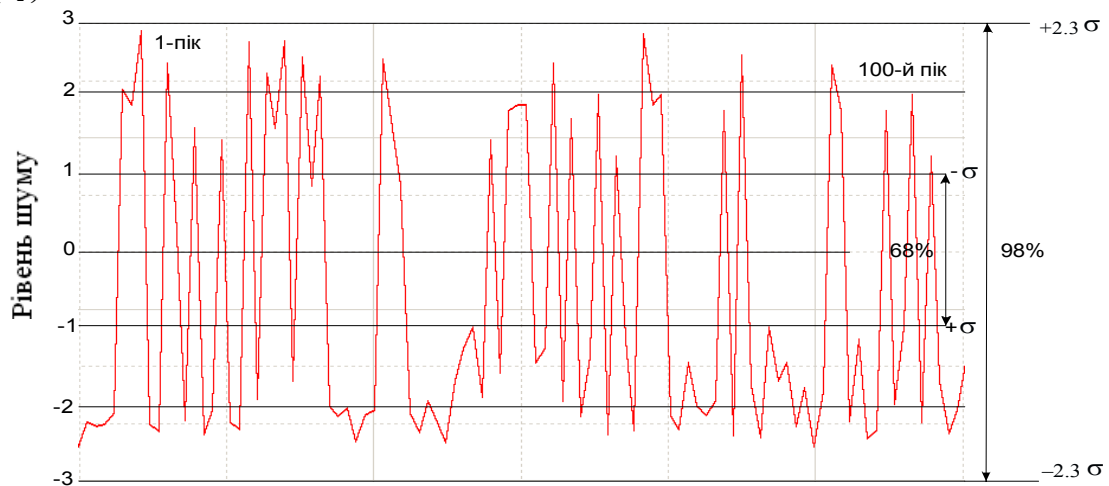


Рис. 12. Рівень шуму в лінійному масштабі

При збільшенні часу усереднення коефіцієнт релеєвського розсіювання не міняється, але зменшується середньоквадратичне значення шуму. Оскільки в першому наближенні шум можна вважати білим (гаусовим), то його середньоквадратичне значення змінюється обернено пропорційно до квадратного корня з часу усереднення сигналу. Це означає, що при збільшенні часу усереднення від t_1 до t_2 рівень шуму зменшиться (а динамічний діапазон збільшиться) за шкалою рефлектометра всього лише на $2,5 \log\left(\frac{t_2}{t_1}\right)$. Наприклад, при збільшенні часу усереднення в 100 разів (від $t_1 = 1$ с до $t_2 = 100$ с) динамічний діапазон збільшується на $2,5 \log\left(\frac{t_1}{t_2}\right) = 5$ дБ (рис. 12). Для порівняння, при збільшенні тривалості імпульсів від τ_1 до τ_2 динамічний діапазон зростає на в два рази більшу величину: $5 \log\left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)$.

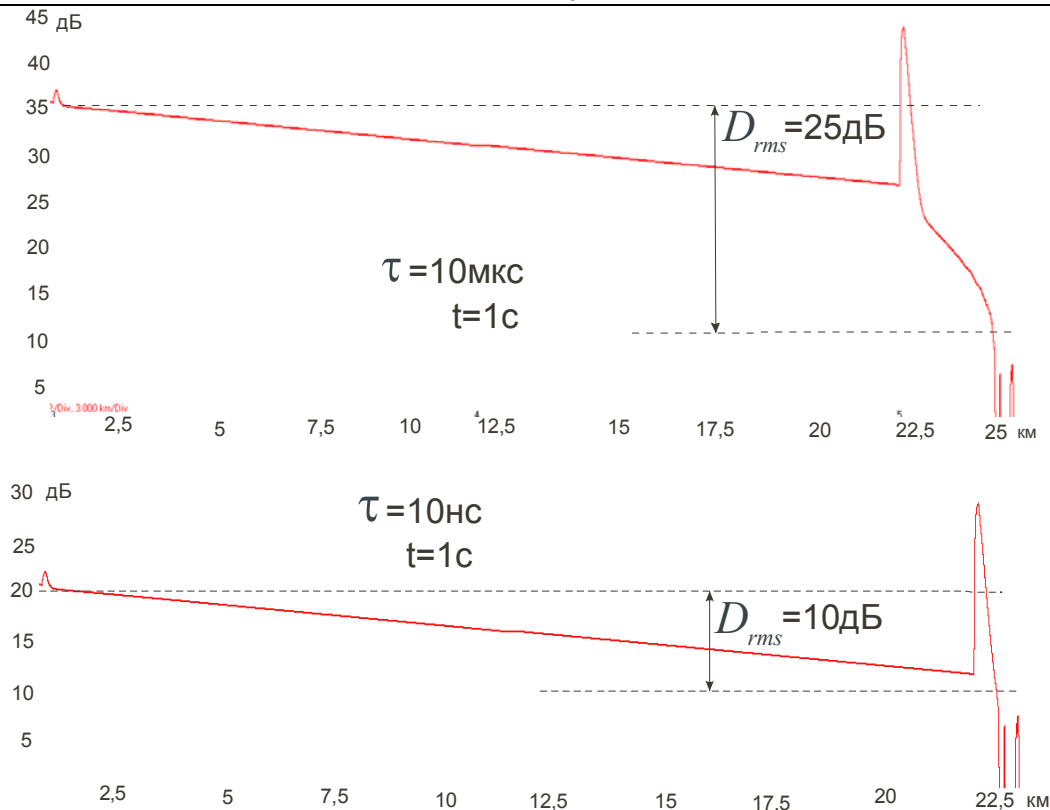


Рис. 13. Рефлектограми при збільшенні тривалості імпульсів в 1000 разів

(від $\tau_1 = 10 \text{ нс}$ до $\tau_2 = 10 \text{ мкс}$) динамічний діапазон збільшується на $5 \log \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = 15 \text{ дБ}$

На сьогоднішній день динамічний діапазон є основним параметром, по якому проводиться порівняння різних моделей OTDR. Оскільки його величина збільшується із збільшенням тривалості імпульсів τ і часу усереднення сигналу t , то звичайне значення динамічного діапазону наводять при максимальних для даного приладу значеннях τ і t . Проте ці значення у різних виробників рефлектометрів можуть відрізнятися. Для того, щоб усунути цю неоднозначність, МЕК рекомендує при порівнянні динамічних діапазонів рефлектометрів використовувати наступні величини: $\tau = 10 \text{ мкс}$ і $t = 3 \text{ хв}$. В той же час виробники рефлектометрів в своїх специфікаціях максимальне значення динамічного діапазону наводять, зазвичай, при $\tau = 20 \text{ мкс}$.

Таким чином, для оцінки величини динамічного діапазону треба знати не лише час усереднення імпульсів t , але і період їх дотримання T . Період дотримання імпульсів можна оцінити, використовуючи той факт, що при вимірюванні величини динамічного діапазону OTDR розробники рекомендують підключати до нього волокно завдовжки 25 км (рис. 14).

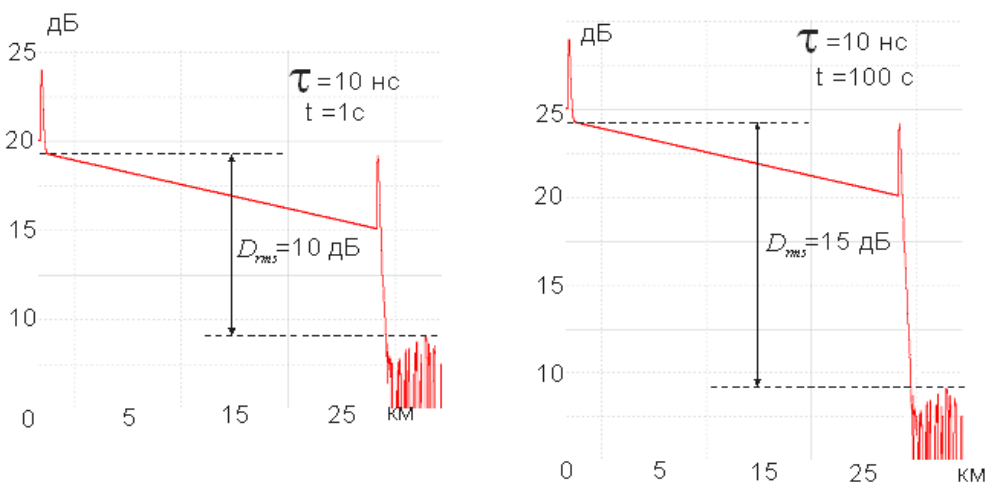


Рис. 14. При збільшенні часу усереднення в 100 разів

(від $t_1 = 1 \text{ с}$ до $t_2 = 100 \text{ с}$) динамічний діапазон збільшується на $2,5 \log \left(\frac{\tau_1}{\tau_2} \right) = 5 \text{ дБ}$

Можливість виявлення малої неоднорідності обмежується мертвою зоною на початку рефлектограми і шумами фотоприймача в кінці рефлектограми. Ширину мертвої зони по віддзеркаленню вважають рівною ширині сплеску на рефлектограмі (ширині імпульсу світла (на дисплеї)) по половинному рівні (FWHM – full-width at half-maximum).

Визначимо від чого залежить ширина і форма імпульсу на дисплеї. Процес дослідження показав, що ширина і форма імпульсу на дисплеї залежить не лише від тривалості імпульсів світла τ , що випускаються лазерним діодом, але і від ширини смуги фотоприймача Δf рис. 15.

Як видно з рис. 15, коли тривалість імпульсів τ більше часу встановлення відгуку $\left(\frac{0,35}{\Delta f} \cong 10\text{нс}\right)$ форма імпульсу близька до прямокутної. В цьому випадку ширина імпульсу однозначно визначається тривалістю імпульсу і приблизно рівна $\tau \cdot \frac{V_r}{2}$ (наприклад ~ 10 м при $\tau = 100$ нс), де $V_r = 2 \cdot 10^5$ км/с = 0.2 м/нс – групова швидкість світла у волокні. Коли тривалість імпульсу менше часу встановлення відгуку, ширина імпульсу обмежується шириною смуги фотоприймача. Наприклад, при $\tau = 1$ нс ширина імпульсу (~ 1 м) виходить на порядок більше, чим це повинно бути, якби вона визначалася тривалістю імпульсу $\tau \cdot \frac{V_r}{2} = 1$ нс $\cdot 0.1$ м/нс = 0,1 м.

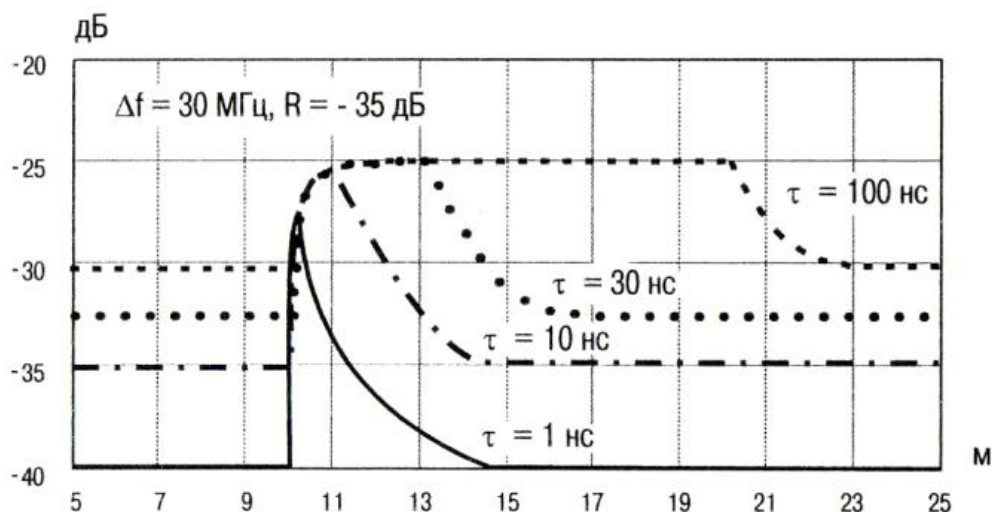


Рис. 15. Зміна ширини і форми імпульсів при зміні їх тривалості при визначенні мертвої зони

Тривалість імпульсів на вході τ і на виході фотоприймача Δt зв'язані між собою співвідношенням (8):

$$\Delta t = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{0,35}{\Delta f}\right)^2}, \quad (8)$$

Звідси отримуємо вираз (9) для ширини імпульсу:

$$u = \Delta t \cdot \frac{V_r}{2} = \sqrt{\tau^2 + \left(\frac{0,35}{\Delta f}\right)^2} \cdot \frac{V_r}{2}, \quad (9)$$

Ця залежність зображена на рисунку 16.

Як видно з рис. 16, при $\tau > 300$ нс ширина імпульсу пропорційна τ : $u = \tau \cdot 0.1$ м/нс. При τ менше 10 нс ширина імпульсу u не залежить від τ і визначається шириною смуги фотоприймача Δf . У стандартному режимі ($\Delta f \sim 10$ МГц) і $\tau < 10$ нс ширина імпульсу приблизно 2.5 м. У режимі максимального розрізнення ($\Delta f \sim 30$ МГц) і $\tau < 10$ нс ширина імпульсу трохи більше 1 м. У режимі максимального динамічного діапазону ($\Delta f \sim 3$ МГц) і $\tau < 10$ нс ширина імпульсу приблизно 10 м. У специфікаціях на рефлектометр ширину мертвої зони, зазвичай, наводять для найкоротшого імпульсу і максимально широкій смугі фотоприймача (режим максимального дозволу). Наприклад, в рефлектометрі E6000C ширина мертвої зони рівна 3 м, а тривалість найкоротшого імпульсу рівна 10 нс. Як видно з рис. 16, така ширина мертвої зони виходить при ширині смуги фотоприймача приблизно 10 МГц.

Дослідження ширини мертвої зони по затуханню при $\tau > 1$ мкс показали, що вона близька до повної ширини імпульсу по половинному рівню і однозначно визначається тривалістю імпульсу. При $\tau < 20$ нс ширина мертвої зони по затуханню залежить від ширини смуги фотоприймача і від величини коефіцієнта відбиття від неоднорідності і приблизно в 3...5 разів більше ширини імпульсу.

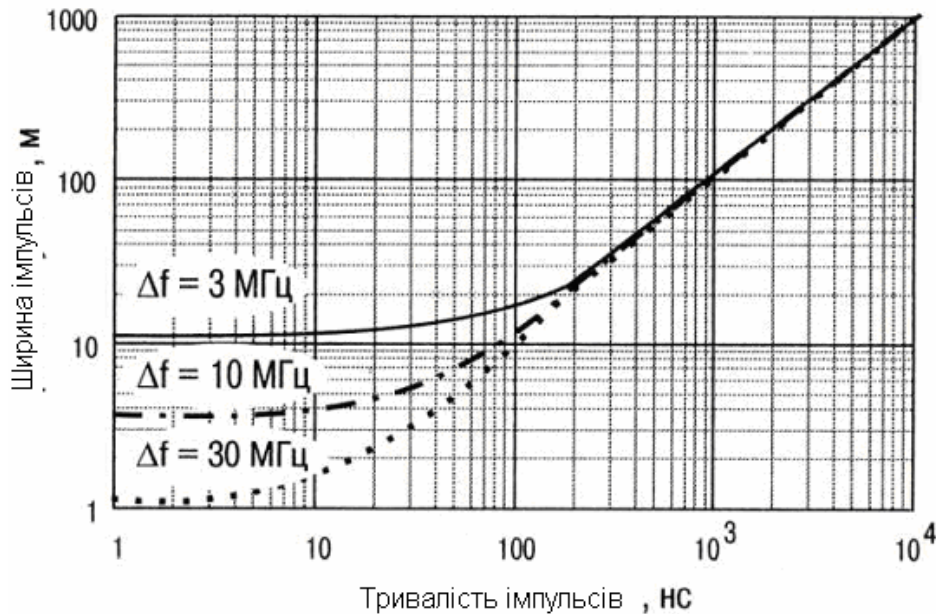


Рис 16. Залежність ширини імпульсів на дисплеї від тривалості імпульсів світла τ , що випускаються лазерним діодом і ширина смуги фотоприймача Δf

ВИСНОВКИ

1. Досліджено особливості визначення рефлекторам волоконних світловодів з допомогою OTDR.
2. Визначено вплив тривалості зондуєчи імпульсів на величину сигналу зворотного релеєвського розсіювання при визначенні довжини світловоду та місць пошкоджень.
3. Досліджений вплив тривалості зондуєчи імпульсів на динамічний діапазон рефлектометра.
4. Досліджено зміну ширини і форми імпульсів при зміні їх тривалості при визначенні мертвої зони.

Література

1. Листвин А.В., Листвин В.Н. Рефлектометрия оптических волокон. – М.: «ЛЕСАР арт», 2005.
2. Beller J. OTDRs and backscatter measurements. In “Fiber optics test and measurements”, edited by Derickson D., New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1998.

Надійшла 15.2.2010 р.

УДК 621.372.061.

В.В. МАРТИНЮК, В.П. РОЙЗМАН, О.М. САМСОНЮК
Хмельницький національний університет

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ КІЛ РАДІОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ

В статті проаналізовано метод синтезу кіл радіотехнічних пристроїв дробових порядків. Наведено аналог елемента дробового порядку та розглянуто форму Фостера як приклад кола дробового порядку.

In the article analyzed the method used for synthesis of the fractional order circuits for radio technical devices. The analog of the fractional order element is presented also proceeded the Foster form as example of the fractional order circuit.

Ключові слова: модель дробового порядку, електричне коло, реактивний елемент.

Вступ

Математичний аналіз з використанням інтегро-дифференціальних операторів дробових порядків або дробове числення (Fractional Calculus) має більш ніж трьохвікову історію. Перша згадка про похідні дробового порядку міститься в листуванні Я. Бернуллі і Г. Лейбніца. Останній, зокрема, в листі до Г. Лопітала, датованому 1695 р., обговорюючи можливості диференціалів порядку $1/2$, пророчо заявив, що із цього парадоксу одного дня настануть корисні результати.

В даний час дробове числення знаходиться в процесі бурхливого розвитку і в теоретичному плані і в його застосування. Можна сказати, що цей розділ математичного аналізу перетворився на інструмент математичного моделювання складних динамічних процесів в звичайних і фрактальних середовищах, що дозволяє вирішувати по-новому різні завдання аналізу, синтезу, ідентифікації, діагностики, створення нових систем керування.