

Рис 16. Залежність ширини імпульсів на дисплеї від тривалості імпульсів світла τ , що випускаються лазерним діодом і ширина смуги фотоприймача Δf

ВИСНОВКИ

1. Досліджено особливості визначення рефлекторам волоконних світловодів з допомогою OTDR.
2. Визначено вплив тривалості зондуючі імпульсів на величину сигналу зворотного релеєвського розсіювання при визначенні довжини світловоду та місць пошкоджень.
3. Досліджений вплив тривалості зондуючі імпульсів на динамічний діапазон рефлектометра.
4. Досліджено зміну ширини і форми імпульсів при зміні їх тривалості при визначенні мертвої зони.

Література

1. Листвин А.В., Листвин В.Н. Рефлектометрия оптических волокон. – М.: «ЛЕСАР арт», 2005.
2. Beller J. OTDRs and backscatter measurements. In “Fiber optics test and measurements”, edited by Derickson D., New Jersey, Prentice-Hall, Inc., 1998.

Надійшла 15.2.2010 р.

УДК 621.372.061.

В.В. МАРТИНЮК, В.П. РОЙЗМАН, О.М. САМСОНЮК
Хмельницький національний університет

АНАЛІЗ ТА СИНТЕЗ КІЛ РАДІОТЕХНІЧНИХ ПРИСТРОЇВ ДРОБОВИХ ПОРЯДКІВ

В статті проаналізовано метод синтезу кіл радіотехнічних пристроїв дробових порядків. Наведено аналог елементу дробового порядку та розглянуто форму Фостера як приклад кола дробового порядку.

In the article analyzed the method used for synthesis of the fractional order circuits for radio technical devices. The analog of the fractional order element is presented also proceeded the Foster form as example of the fractional order circuit.

Ключові слова: модель дробового порядку, електричне коло, реактивний елемент.

Вступ

Математичний аналіз з використанням інтегро-дифференційних операторів дробових порядків або дробове числення (Fractional Calculus) має більш ніж трьохвікову історію. Перша згадка про похідні дробового порядку міститься в листуванні Я. Бернуллі і Г. Лейбніца. Останній, зокрема, в листі до Г. Лопітала, датованому 1695 р., обговорюючи можливості диференціалів порядку $1/2$, пророчо заявив, що із цього парадоксу одного дня настануть корисні результати.

В даний час дробове числення знаходиться в процесі бурхливого розвитку і в теоретичному плані і в його застосування. Можна сказати, що цей розділ математичного аналізу перетворився на інструмент математичного моделювання складних динамічних процесів в звичайних і фрактальних середовищах, що дозволяє вирішувати по-новому різні завдання аналізу, синтезу, ідентифікації, діагностики, створення нових систем керування.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Побудова електронних моделей інтегро-диференційних операторів дробових порядків зводиться до проблеми синтезу електронних кіл (двополюсників), зв'язок між струмом і напругою яких визначається похідною або інтегралом дробового порядку (в цьому виразі використовується традиційний для класичного математичного аналізу запис похідної):

$$i_N(t) = G \frac{d^\beta u_N(t)}{dt^\beta}, \quad (1)$$

де β – порядок похідної ($\beta > 0$) або інтеграла ($\beta < 0$).

Еквівалентна схема реактивного елемента зображена на рис. 1.

В операторній і символічній формах вираз (1) має вигляд:

$$\begin{aligned} I(p) &= p^\beta G U(p), \\ \dot{I} &= (j\omega)^\beta G U, \end{aligned} \quad (2)$$

де $I(p)$, \dot{I} – зображення по Лапласу і комплексне зображення струму двополюсника $i_N(t)$ відповідно,

$U(p)$, \dot{U} – те ж для напруги двополюсника $u_N(t)$,

p – оператор Лапласа, j – уявна одиниця, ω – кутова частота.

Неможливо побудувати електричне коло з кінцевою кількістю пасивних елементів, яке б точно реалізувало вирази (1) і (2) для нескінченно великих діапазонів зміни часу і частоти. Тому завдання моделювання інтегро-диференційних операторів дробового порядку полягає в апроксимації в обмеженому діапазоні частот або в скінченному інтервалі часу. Якщо розглядати гіпотетичний елемент електричного кола, що реалізує інтегро-диференційний оператор дробового порядку (його можна також назвати конденсатором або індуктивністю дробового порядку), то його властивості можуть бути визначені наступним чином. Визначимо перехідну провідність гіпотетичного реактивного двополюсника $g(t)$ як струм, що протікає через двополюсник в перехідному режимі при дії на нього одиничного стрибка напруги:

$$i(t) = g(t) \cdot I_u(t), \quad (3)$$

де $I_u(t)$ – одиничний стрибок напруги ($I_u(t) = 1$, якщо $t \geq 0$, $I_u(t) = 0$, якщо $t < 0$).

Обмежившись значеннями порядку диференційного оператора $|\beta| < 1$ введемо вираз для перехідної провідності. Використовуючи визначення дробового інтеграла порядку β у формі Ріманна-Ліув'єля для функції одиничного стрибка, отримуємо:

$$g(t) = G \frac{t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}, \quad (4)$$

де $\Gamma(\omega)$ – гамма-функція.

Таким чином, безліч гіпотетичних індуктивностей породжується при безперервній зміні порядку інтегро-диференційного оператора в межах $-1 \leq \beta < 0$, тоді як зміна β в межах $0 < \beta \leq 1$ породжує гіпотетичні конденсатори дробових порядків. Випадок $\beta = 0$ відповідає омичному опору (резистору). Розглянемо тепер властивості дробового конденсатора в частотній області. Передбачаючи, що конденсатор знаходиться в усталеному режимі під впливом джерела напруги синусоїдальної форми з нульовою початковою фазою і одиничною амплітудою, запишемо вираз для комплексної провідності такого конденсатора:

$$\dot{Y} = G(j\omega)^\beta = G\omega^\beta e^{j\pi\beta/2}. \quad (5)$$

Амплітудно-частотна і фазово-частотна характеристики комплексної провідності дробового конденсатора відповідно (5) мають вигляд:

$$\begin{aligned} |Y|(\omega) &= G\omega^\beta, \\ \varphi(\omega) &= \pi\beta/2. \end{aligned} \quad (6)$$

У логарифмічному масштабі вони мають вигляд прямих:

$$\begin{aligned} \ln \frac{|Y|(\omega)}{G} &= \beta \cdot \ln(\omega), \\ \varphi(\omega) &= \pi\beta/2. \end{aligned} \quad (7)$$

Сімейство частотних характеристик, відповідних різним значенням β , обмежується прямими:

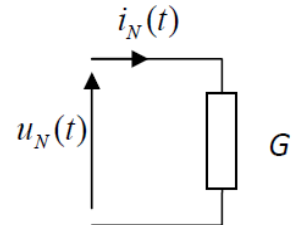


Рис. 1. Гіпотетичний реактивний елемент

$$\ln|Y| = \ln(G), \text{ для } \beta = 0$$

$$\ln|Y| = \ln(G) + \ln(\omega), \text{ для } \beta = 1 \quad (8)$$

Реалізація інтегро-диференційних операторів дробових порядків

Розглянемо модель реактивного елемента дробового порядку. На рис. 2 зображено послідовне з'єднання активного опору R і ємності C.

Вираз, що пов'язує комплекси струму і напруги в цій схемі, має вигляд:

$$I = \frac{1}{(R^2 + (\frac{1}{\omega C})^2)^{1/2}} U e^{j \cdot \arctg \frac{1}{\omega CR}} \quad (9)$$

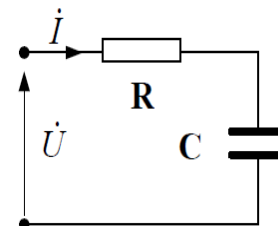


Рис. 2. RC – коло – квазіаналог реактивного елемента дробового порядку

Цей вираз не відповідає рівнянню реактивного елемента дробового порядку. Виведемо умову еквівалентності кола рис. 2, розглядаючи його як квазіаналог реактивного елемента дробового порядку. Для цього досить поставити умову рівності відповідної комплексної провідності і отримати залежності від частоти активного опору і ємності RC-кола рис. 2. Виконавши необхідні перетворення, отримаємо:

$$R(\omega, \beta) = \frac{\cos(\beta\pi/2)}{G\omega^\beta},$$

$$C(\omega, \beta) = \frac{G\omega^{\beta-1}}{\sin(\beta\pi/2)}. \quad (10)$$

Аналізуючи (10) відзначимо, що при зміні β у діапазоні $0 \leq \beta \leq 1$ коло рис. 2 може розглядатися як квазіаналогова модель конденсатора порядку β . Відзначимо також, що при $\beta=0$ отримуємо: $C=\infty$ і $R=1/G=\text{const}$, що відповідає випадку звичайного активного опору, величина якого, як відомо, не залежить від частоти. При $\beta=1$ отримуємо $R=0$, і коло перетворюється на звичайну ємність.

Відомо декілька типових структур кіл, які використовуються для синтезу двополосників, що моделюють інтегро-диференційні оператори дробових порядків. Найбільшого поширення набули RC-кола із зосередженими елементами. Серед них потрібно згадати RC-форму Фостера. Розглянемо детальніше задачу апроксимації диференційних операторів дробового порядку при використанні RC-форми Фостера (рис. 3).

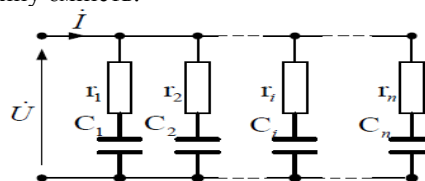


Рис. 3. RC – форма Фостера

Завдання апроксимаційного синтезу може бути сформульоване наступним чином: визначити величини опорів і ємностей форми Фостера за умови, що амплітудно-частотна характеристика кола в середньоквадратичному сенсі найменш відхилялася б від відповідних характеристик реактивного елемента дробового порядку β у заданому діапазоні частот $[\omega, \omega]$.

Запишемо вираз для комплексної провідності i-тої гілки кола (рис. 3):

$$Y_i = \frac{1}{r_i} \cdot \frac{j\omega / \omega_i}{1 + j\omega / \omega_i} = g_i \cdot \frac{j\Omega_i}{1 + j\Omega_i}, \quad (11)$$

Враховуючи, що RC-ланки з'єднані паралельно, повна комплексна провідність кола визначиться за формулою:

$$Y = \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{j\Omega_i}{1 + j\Omega_i}, \quad (12)$$

де $\omega_i = \frac{1}{r_i C_i}$,

$\Omega_i = \frac{\omega}{\omega_i}$ – нормалізована кутова частота.

Повна комплексна провідність конденсатора дробового порядку β визначається виразом:

$$Y_\beta = Y_0 \cdot (j\omega / \omega_0)^\beta. \quad (13)$$

Запишемо похибку апроксимації як функцію частоти ω :

$$\varepsilon(\omega) = Y_0 \cdot (j\omega / \omega_0)^\beta - \sum_{i=1}^n g_i \cdot \frac{j\omega / \omega_i}{1 + j\omega / \omega_i} \quad (14)$$

Задача синтезу може бути істотно спрощена, якщо використовувати теорію фрактальних структур. Як відомо, вхідний імпеданс електролітичного двополюсника з електродами пористої структури визначається виразом:

$$Z(j\omega) = R + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{aR + \frac{1}{j\omega C + \frac{2}{a^2 R + \dots}}}} \quad (15)$$

Такому імпедансу відповідає RC – коло, зображене на рис. 4.

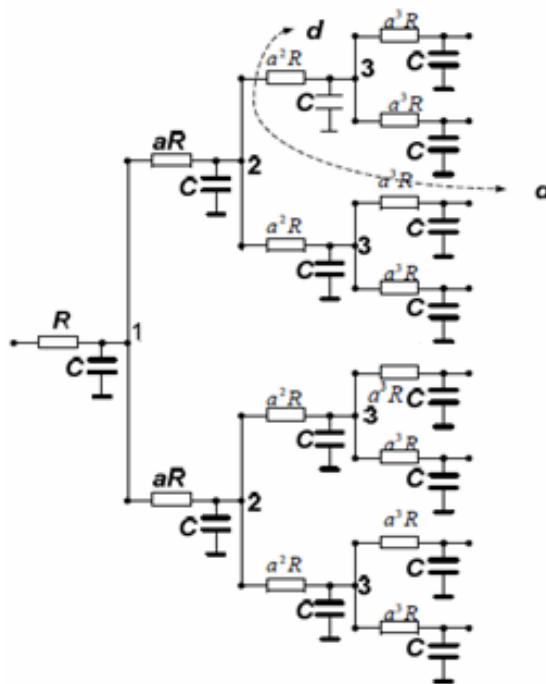


Рис. 4. RC-коло фрактальної структури

Висновки

Розглянуті математичні моделі кіл дробових порядків у вигляді гіпотетичного реактивного елемента та RC-кола, яке є виступає квазіаналогом реактивного елемента дробового порядку. Встановлено, що найбільш оптимальною з точки зору аналізу та синтезу в якості кола дробового порядку, виступає RC-форма Фостера. Визначено вираз повної комплексної провідності RC-форма Фостера та встановлено вираз похибки апроксимації як функції частоти по відношенню до повної комплексної провідності конденсатора дробового порядку. Алгоритм розв'язку задачі апроксимації, пов'язаний з мінімізацією функції похибки, залежить від форми запису функції комплексного аргументу.

Література

1. Нигматуллин Р.Ш., Белавин В.А. Электролитический дробно-дифференцирующий и интегрирующий двухполюсник // Труды Казанского авиац. ин-та: Вып. 82. Радиотехника и электроника. – Казань, 1964. – С. 58 – 67.
2. Пухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. – К.: Наук. Думка, 1967. – 568 с.
3. Симак Л.А. Анализ неоднородных RC-цепей с распределенными параметрами и аппроксимация проводимостей с заданной частотной характеристикой // Матер. 3 Всесоюзной науч. – техн. конф. "Проблемы нелинейной электротехники". – К.: Наук. думка, 1988. – С. 90 – 93.
4. Симак Л.А. Аппроксимационный синтез электронных цепей, моделирующих интегро-дифференциальные операторы нецелых порядков // Електроніка та системи управління. – 2005. – № 1. – С. 140-151.
5. Симак Л.А. Математические модели реактивных элементов дробного порядка электрических цепей переменного синусоидального тока // Электрон. моделирование. – 1986. – 8, № 1. – С. 95 – 97.

Надійшла 15.2.2010 р.