Література

1. Франц В.Я. Оборудование швейного производства. – М.: Издательский центр «Академия». – 2002. – 48 с.
2. Рябчиков Н.Л. Теоретичне обгрунтування і експериментальна перевірка утворення однониточного човникового стібка // Вісник Східноукраїнського національного університету. № 1 [107]. – 2007. – С. 360-364
3. Рябчиков М.Л. Дейнека І.Г., Сапронова С.Ю. Розрахунок і конструювання машин легкої промисловості. Курсове проектування // Харків-Луганськ: МОН України. УІПА, СНУ ім.Даля. – 2005. – 116 с.
4. Голованов А.И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. М.: Физматлит – 2006. – 392 с.
5. Крылов О. В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах М.: Радио и связь. – 2002. – 104 с.
6. Рябчиков М.Л., Пащенко А.М. Підвищення навантажувальної здібності зубчастих передач методами гідродинамічного регулювання несучими валами // Вестник национального технического университета “ХПИ”. Харьков: НТУ “ХПИ”. – 2004. – № 44. – С.56-61

Надійшла 4.5.2010 р.

УДК 620.178.1

В.С. ПАВЛОВ
Хмельницький національний університет
В.І. ЄВДОКИМЕНКО
Хмельницький університет економіки і підприємництва

ВИДИ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ

Запропоновано поняття "віртуальний" і "дійсний" напружені стани. Встановлено залежності між їх параметрами.

A concept is offered the "virtual" and "actual" is tense the states. Dependences are set between their parameters.

Ключові слова: напруження, напружений стан, тензор напружень.

Вступ

При розрахунку деталей на міцність використовують поняття "напруження" і "напружений стан". *Напруження* – це міра інтенсивності внутрішніх сил, що виникають під дією зовнішніх впливів [1, с.324].

<u>Примітка.</u> Одиниця напруження в системі СІ – "паскаль" (Па). 1 Па = 1 Н/м^2. В техніці використовують одиницю напруження "мегапаскаль" (МПа). 1 МПа =10^{6}Па = 1Н/мм^2.

Повне напруження ρ, що діє по елементарній площинці, виділеній в околі деякої точки, можна розкласти на складові: нормальне напруження σ і дотичне τ.

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} .$$

Сукупність напружень, що діють в усіх площинках, проведених через точку, називається *напруженим станом.*

Напружений стан в точці повністю визначається напруженнями по трьох взаємно перпендикулярних площинках. Тобто за цими напруженнями можна визначити напруження в будь-якій площинці, проведеній через цю точку [2, с.169].

По кожній з трьох взаємно перпендикулярних площинок діють три напруження: нормальне і дві складові дотичного напруження, паралельних відповідним координатним осям. Ці дев’ять напружень, записані у вигляді квадратної матриці (у кожному рядку – напруження по одній з площинок, у кожному стовпчику – напруження, що діють паралельно одній з координатних осей) називаються *тензором напружень.*

В околі довільної точки деталі при довільному навантаженні можна виділити, принаймні, один елемент у вигляді прямокутного паралелепіпеда, гранями якого є площинки, де відсутні дотичні напруження [2, с.154].

Такі площинки називаються *головними*, а нормальні напруження в цих площинках – *головними напруженнями.*

Головні напруження мають властивість екстремальності. Одне з них є найбільшим (в алгебраїчному розумінні) напруженням з усіх можливих, друге – проміжним, третє – найменшим.

Найбільше головне напруження має індекс "1", найменше – "3".

$$s_1{}^3 s_2{}^3 s_3. \tag{1}$$

Наприклад, якщо головні напруження дорівнюють 200 МПа, 100 МПа і 0, то згідно із (1) їх слід позначити:

$s_1 = 100$ МПа; $s_2 = 0$; $s_3 = -200$ МПа.

Види напруженого стану. Якщо жодне з головних напружень не дорівнює нулю, то напружений стан називають *об'ємним*, якщо одне з них дорівнює нулю – *плоским*, якщо два – *лінійним*.

Графічне зображення об'ємного напруженого стану показано на рис. 1.

В розрахунках використовують головні напруження, які в результаті зовнішніх впливів *сприймає* матеріал в небезпечній (найбільш напруженій) точці деталі.

Назвемо напружений стан, компонентами якого є такі головні напруження, *віртуальним*. Він можливий за абсолютної жорсткості матеріалу, тобто його недеформівності.

Дійсний стан реального матеріалу напружено-деформований.

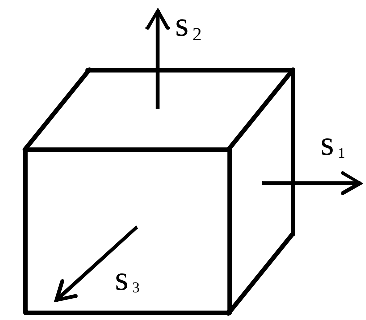

Рис. 1. Елемент, по гранях якого діють головні додатні напруження

Мета роботи: встановлення співвідношень між параметрами віртуального і дійсного напружених станів.

Основний розділ

Основні поняття і вихідні положення

1) Поняття "напружений стан" і "віртуальний напружений стан" рівнозначні.

2) Віртуальний напружений стан (надалі "ВНС") в деякій точці деталі характеризується напруженнями, які визначають без врахування деформування матеріалу.

3) Дійсний напружений стан (надалі "ДНС") характеризується реальними напруженнями, що виникають в точці деталі з конкретного деформівного матеріалу.

4) Параметри ДНС відрізняються наявністю позначки (*).

5) Між відносною лінійною деформацією e ізотропного матеріалу і дійсним нормальним напруженням s^* в межах пружності, згідно із законом Гука, завжди існує лінійна залежність

$$\sigma = \varepsilon E\,, \qquad (2)$$

де E – модуль поздовжньої пружності.

Методика

Було досліджено три види (об'ємний, плоский та лінійний) віртуального і відповідних їм можливих видів дійсних напружених станів.

Особливості кожного виду ВНС і відповідних йому видів ДНС визначались шляхом порівняння параметрів цих станів. Такими параметрами були:

1) головні напруження;

2) перший (лінійний) інваріант тензора напружень, виражений через головні напруження;

3) максимальне дотичне напруження.

Головні напруження ВНС вважались відомими.

Дослідження і його результати

Спочатку було досліджено об'ємний напружений стан. Надалі це дозволило розглядати плоский і лінійний напружені стани як часткові випадки об'ємного, що спростило викладки.

Об'ємний напружений стан

1) *Головні напруження*

ВНС. Згідно із (1) $s_1{}^3 s_2{}^3 s_3$.

ДНС. Дійсні головні напруження обчислювались за формулою:

$s_i^* = e_i E \quad (i = 1,2,3)$, (3)

де e_i – головна деформація в напрямку дії головного напруження s_i.

Головні деформації визначали за узагальненим законом Гука:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3))/E; \\ \varepsilon_2 &= (\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1))/E; \\ \varepsilon_3 &= (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2))/E, \end{aligned} \qquad (4)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Відповідно до (3) і (4) отримаємо:

$$\sigma_1 = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3);$$
$$\sigma_2 = \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1); \qquad (5)$$
$$\sigma_3 = \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Оскільки для ізотропних матеріалів значення коефіцієнта m перебуває в межах 0…0,5 [2, с.85], то, згідно із (5), величина s_1^* завжди буде найбільшою (в алгебраїчному розумінні), а s_3^* – найменшою серед величин s_i^*.

Із співвідношень (5) видно, що у вираз *кожного* дійсного напруження s_i^* входять значення *всіх* віртуальних головних напружень. Тобто при довільному виді ВНС, зазвичай, ДНС буде об'ємним.

Тому для кожного виду ВНС необхідно додатково з'ясувати можливість і умови існування інших видів ДНС, крім об'ємного.

Можливість реалізації плоского і лінійного ДНС

Плоским ДНС може бути за умови рівності нулю одного з головних напружень s_i^*.

Розглянемо ці варіанти, використавши формули (5).

$$I.\ \sigma_1 = 0 \Rightarrow \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3);$$
$$II.\ \sigma_2 = 0 \Rightarrow \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1); \qquad (6)$$
$$III.\ \sigma_3 = 0 \Rightarrow \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2).$$

Як видно із формул (6), плоский ДНС можливий за певного співвідношення головних напружень об'ємного ВНС і коефіцієнта Пуассона m.

Випадковість або необхідність в реалізації хоча б одного із варіантів мало ймовірна.

Лінійним ДНС не може бути навіть теоретично. Адже це означало би, що лише одне з дійсних головних напружень є значащим (не рівним нулю), s_1^* або s_3^*, а два інших дорівнюють нулю, $s_2^* = s_3^* = 0$ або $s_1^* = s_2^* = 0$ відповідно.

Розглянемо можливість виконання умови

$$s_2^* = s_3^* = 0. \qquad (7)$$

Із (5) і (7) випливає:

$s_2 - m(s_3 + s_1) = s_3 - m(s_1 + s_2) \Rightarrow s_2 - s_3 = -m(s_2 - s_3)$, що неможливо. Тобто умова (7) не може реалізуватись.

Аналогічний результат отримаємо, розглянувши можливість виконання умови $s_1^* = s_2^* = 0$.

2) Перший інваріант тензора напружень

ВНС. Згідно із [2, с.171] перший інваріант тензора віртуальних напружень, виражений через головні напруження,

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3. \qquad (8)$$

ДНС. Відповідно до (8) перший інваріант тензора дійсних напружень

$$I_1^* = s_1^* + s_2^* + s_3^*. \qquad (8а)$$

Згідно із (5) і (8а)

$$I_1^* = (1 - 2m)(s_1 + s_2 + s_3). \qquad (9)$$

Із (8) і (9) випливає, що між I_1^* і I_1 існує лінійна залежність:

$$I_1^* = (1 - 2m)I_1. \qquad (10)$$

Лінійна залежність існує також між I_1^* і відносною об'ємною деформацією e_v:

$$I_1^* = e_v E, \qquad (11)$$

де $e_v = (1 - 2m)(s_1 + s_2 + s_3)/E$ [2, с.176].

Розглянемо випадок, коли $I_1 = 0$.

а) Згідно із (10) перший інваріант тензора дійсних напружень також дорівнює нулю: $I_1^* = 0$.

б) Із (8) випливає, що $I_1 = 0$ за умови:

$$s_1 = -(s_2 + s_3) \text{ або } s_3 = -(s_1 + s_2). \qquad (12)$$

В цьому разі об'єм матеріалу не зміниться незалежно від значення коефіцієнта m. А дійсні головні напруження, згідно із (5) і (12), дорівнюватимуть:

$$s_i^* = (1 + m)s_i \quad (i = 1,2,3) \qquad (13)$$

3) Максимальне дотичне напруження

ВНС. Згідно із [2, с.173] при будь-якому об'ємному напруженому стані

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (14)$$

ДНС. Відповідно до (5) і (14) отримаємо: $\tau^*_{\max} = (1+\mu)\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow$

$$\tau^*_{\max} = (1+\mu)\tau_{\max}. \qquad (15)$$

Плоский напружений стан

1) Головні напруження

ВНС. Оскільки одне з трьох головних напружень (σ_1, σ_2 або σ_3) дорівнює нулю, є три варіанти запису співвідношення (1).

$$\begin{aligned} &I.\, \sigma_1 = 0: \quad 0 > \sigma_2 \ge \sigma_3; \\ &II.\, \sigma_2 = 0: \quad \sigma_1 > 0 > \sigma_3; \\ &III.\, \sigma_3 = 0: \quad \sigma_1 \ge \sigma_2 > 0. \end{aligned} \qquad (16)$$

За умови $\sigma_1 = 0$ значащі головні напруження від'ємні, при $\sigma_3 = 0$ – додатні, а за умови $\sigma_2 = 0$ – різних знаків: $\sigma_1 > 0,\ \sigma_3 < 0$.

ДНС. Як уже відмічалось, ДНС є, зазвичай, об'ємним за довільного виду ВНС.

Плоским ДНС може бути за тих же умов, що і при об'ємному ВНС. Практична реалізація цих умов мало ймовірна.

Крім того, *плоский* ДНС реалізується за умови віртуального чистого зсуву: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma;\ \sigma_2 = 0$.

В цьому разі головні напруження ДНС, згідно із (5), будуть дорівнювати:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = \sigma - \mu(0 - \sigma); \\ \sigma_2 &= \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1) = 0 - \mu(-\sigma + \sigma); \\ \sigma_3 &= \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2) = -\sigma - \mu(\sigma + 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (1+\mu)\sigma; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= -(1+\mu)\sigma. \end{aligned} \qquad (17)$$

Як видно із (17), ДНС також буде чистим зсувом:

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = (1+\mu)\sigma. \qquad (18)$$

Лінійний ДНС за плоского ВНС теоретично неможливий. Як і при об'ємному ВНС, умова (7) нездійсненна.

2) Перший інваріант тензора напружень

Перший інваріант I_1 тензора віртуальних напружень складається з двох доданків, а I_1^* дійсних напружень – з трьох. Проте залежність (10) $I_1^* = (1 - 2\mu)I_1$ завжди виконується.

Наприклад, розглянемо варіант I : $0 < \sigma_2 \ge \sigma_3$.

$I_1 = \sigma_2 + \sigma_3$.

Згідно із (5) дійсні головні напруження дорівнюють:

$\sigma_1^* = 0 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = -\mu\sigma_2 - \mu\sigma_3;$

$\sigma_2^* = \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + 0) = \sigma_2 - \mu\sigma_3;$

$\sigma_3^* = \sigma_3 - \mu(0 + \sigma_2) = \sigma_3 - \mu\sigma_2.$

$I_1^* = \sigma_1^* + \sigma_2^* + \sigma_3^* \Rightarrow I_1^* = (1 - 2\mu)(\sigma_2 + \sigma_3) \Rightarrow$

$I_1^* = (1 - 2\mu)I_1.$

Тобто ми отримали формулу (10).

Той же результат отримаємо і за варіантів II і III .

Розглянемо випадок, коли $I_1 = 0$.

Це можливо за варіанту II плоского ВНС і відповідає віртуальному чистому зсуву: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma$; $\sigma_2 = 0$.

Ця ситуація розглянута вище: ДНС також буде чистим зсувом. Згідно із (18)

$$\sigma_1^* = -\sigma_3^* = (1+\mu)\sigma$$

3) Максимальне дотичне напруження

ВНС. Як і при об'ємному ВНС, максимальне дотичне напруження обчислюють за формулою (14):

$$t_{\max} = \frac{s_1 - s_3}{2}.$$

При чистому зсуві, підставивши у (14) значення $s_1 = -s_3 = s$, отримаємо:

$$t_{\max} = s. \qquad (19)$$

ДНС. Згідно із (15)

$$t^*_{\max} = (1+m)t_{\max}.$$

При чистому зсуві відповідно до (15) і (19)

$$t^*_{\max} = (1+m)s. \qquad (20)$$

Лінійний напружений стан

1) Головні напруження

ВНС. Залежно від знаку головного значущого напруження можливі два варіанти лінійного ВНС.

Варіант I : $s_1 = s > 0; \quad s_2 = s_3 = 0$. (21)

Варіант II : $s_1 = s_2 = 0;; \quad s_3 = -s < 0$. (22)

ДНС. Дійсні головні напруження визначають за формулою (3):

$$s^*_i = e_i E \quad (i = 1,2,3).$$

Головні деформації e_i обчислюють згідно із (4):

$$e_1 = \left(s_1 - m(s_2 + s_3)\right)/E;$$
$$e_2 = \left(s_2 - m(s_3 + s_1)\right)/E;$$
$$e_3 = \left(s_3 - m(s_1 + s_2)\right)/E.$$

Значення дійсних головних напружень відповідно до (3), (4), (21) і (22) наведено нижче.

Варіант I : $s^*_1 = s; \quad s^*_2 = s^*_3 = -ms$. (23)

Варіант II : $s^*_1 = s^*_2 = ms; \quad s^*_3 = -s$. (24)

Таким чином, можна відмітити наступне:

1) лінійному ВНС відповідним ДНС *завжди* є лише об’ємний;

2) найбільші за абсолютною величиною головні напруження лінійного ВНС і відповідного об’ємного ДНС однакові:

$s_1 = s^*_1 = s$ або $s_3 = s^*_3 = -s$.

2) Перший інваріант тензора напружень

ВНС. Згідно із (8), (21), (22)

$$I_1 = s. \qquad (25)$$

або

$$I_1 = -s. \qquad (26)$$

ДНС. Відповідно до (8а), (23), (24) отримаємо:

$$I^*_1 = (1-2m)s. \qquad (27)$$

або

$$I^*_1 = (1-2m)(-s). \qquad (28)$$

Тобто в обох випадках справедлива формула (10): $I^*_1 = (1-2m)I_1$.

Із (25) і (26) видно, що при лінійному ВНС I_1 не може дорівнювати нулю.

Перший інваріант I^*_1 тензора дійсних напружень, згідно із (27) і (28) може дорівнювати нулю за умови $m = 0{,}5$.

3) Максимальне дотичне напруження

ВНС. Згідно із (14) і (21) або (22) отримаємо:

$$t_{\max} = s/2. \qquad (29)$$

ДНС. Відповідно до (14) і (23) або (24) будемо мати:

$$t^*_{\max} = (1+m)s/2. \qquad (30)$$

Або, враховуючи (29) і (30), отримаємо формулу (15):

$$t^*_{\max} = (1+m)t_{\max}.$$

Обговорення результатів дослідження

Важливим результатом дослідження, на наш погляд, є встановлення того факту, що дійсний напружений стан може суттєво відрізнятись від віртуального (можливого).

Віртуальний напружений стан (ВНС) відображає лише особливості та інтенсивність зовнішніх впливів. Його параметри (головні напруження, перший інваріант тензора напружень, максимальне дотичне напруження) не залежать від деформівних властивостей матеріалу.

Дійсний напружений стан (ДНС) залежить не лише від характеру та інтенсивності зовнішніх впливів, а й від здатності матеріалу пружно деформуватись, тобто від модулів пружності E і G та коефіцієнта Пуассона m .

Дуже важливим також є доведення того, що лінійний ДНС не може бути реалізований навіть теоретично, що при розтязі (чи стиску) або чистому згині матеріал деталі перебуває в об'ємному напруженому стані. Нерозуміння цього призводить до того, що навіть в підручнику з опору матеріалів можна прочитати, що матеріал руйнується по площині, де відсутнє напруження [3, с.163].Тобто деформація є, а напруження нема.

У зв'язку з тим, що параметри ВНС і ДНС різні, виникла нагальна проблема визначення потреби в коригуванні методик розрахунків на міцність і обчислення коефіцієнта запасу міцності.

Результати дослідження цієї проблеми будуть опубліковані в окремій роботі.

Висновки

1) Важливо розрізняти віртуальний (можливий) і дійсний напружені стани.

2) Віртуальний напружений стан (ВНС) не залежить від механічних властивостей матеріалу. Він відображає особливості та інтенсивність зовнішніх впливів.

3) Дійсний напружений стан (ДНС) відображає стан матеріалу, деформованого зовнішніми впливами. Він залежить від зовнішніх впливів і пружних характеристик матеріалу: модулів пружності E і G та коефіцієнта Пуассона m .

4) Об'ємному, плоскому і лінійному ВНС зазвичай відповідає об'ємний ДНС.

5) Плоский ДНС реалізується за віртуального чистого зсуву (і є також чистим зсувом) або шляхом підбору компонентів віртуальних плоского чи об'ємного напружених станів.

6) Лінійний ДНС не можливий теоретично.

7) Напрямки екстремальних головних напружень ВНС і ДНС збігаються з напрямками екстремальних головних деформацій.

8) За лінійного ВНС і відповідного йому об'ємного ДНС найбільші за абсолютною величиною головні напруження однакові.

9) Між першими інваріантами тензорів дійсних і віртуальних напружень існує лінійна залежність:

$$I_1^* = (1 - 2m)I_1.$$

10) Якщо $I_1^* = I_1 = 0$, то між головними напруженнями ДНС і ВНС існує залежність:

$$s_i^* = (1 + m)s_i \quad (i = 1,2,3).$$

11) Між максимальними дотичними напруженнями ДНС і ВНС *завжди* існує залежність у вигляді:

$$t_{\max}^* = (1 + m)t_{\max} .$$

Література

1. Ишлинский А. Ю. Политехнический словарь / Ишлинский А.Ю. – М.: Советская энциклопедия, 1989. – 656 с.

2. Писаренко Г. С. Опір матеріалів: [підручник] / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський. – К.: Вища школа, 1993 – 655 с.

3. Корнілов О. А. Опір матеріалів: [підручник] / Корнілов О.А. – К.: ЛОГОС, 2002. – 562 с.

Надійшла 10.5.2010 р.