

ВИЗНАЧЕННЯ ПЛОЩІ ТОРОВОЇ ПОВЕРХНІ ЗНОСУ

Шляхом геометричної побудови наближених розгортки визначена площа частини тора, відрізаної площиною. На основі отриманого результату розроблено розрахункову модель та програму для обчислення площі поверхні зносу, яка утворюється при заглибленні в плоский виріб обертаючого диска з торовою формою його периферійної частини.

Torus part area cut with a plane is calculated by geometric drawing its approximate involutes. On the basis of obtained results the model and the program are developed for calculation of wear area being made by peripheral part of revolving disk that has torus shape on its deepening into a flat surface.

Ключові слова: диск з периферією торової форми, площа поверхні площадка зносу, розгортка частин тора, програмний модуль.

Вступ

При тривалому і особливо інтенсивному переміщенні твердих тіл відносно інших в місці їх контакту утворюються площадки зносу, співвідношення між елементами яких можна визначити за відповідними формулами, наведеними в різних літературних джерелах, у тому числі, в довіднику [1]. Форма та геометричні розміри площадок залежать, насамперед, від конструктивних характеристик взаємодіючих тіл. Наприклад, при обертанні торця циліндричного тіла відносно твердої плоскої поверхні (рис. 1, а) площадка зносу на ній має форму кола площею $S = \pi R^2$, при його зворотно-поступальному русі відносно тієї ж поверхні (рис. 1, б) – витягнуту прямокутну форму з двома півколами загальною площею $S = r(2l + \pi r)$.

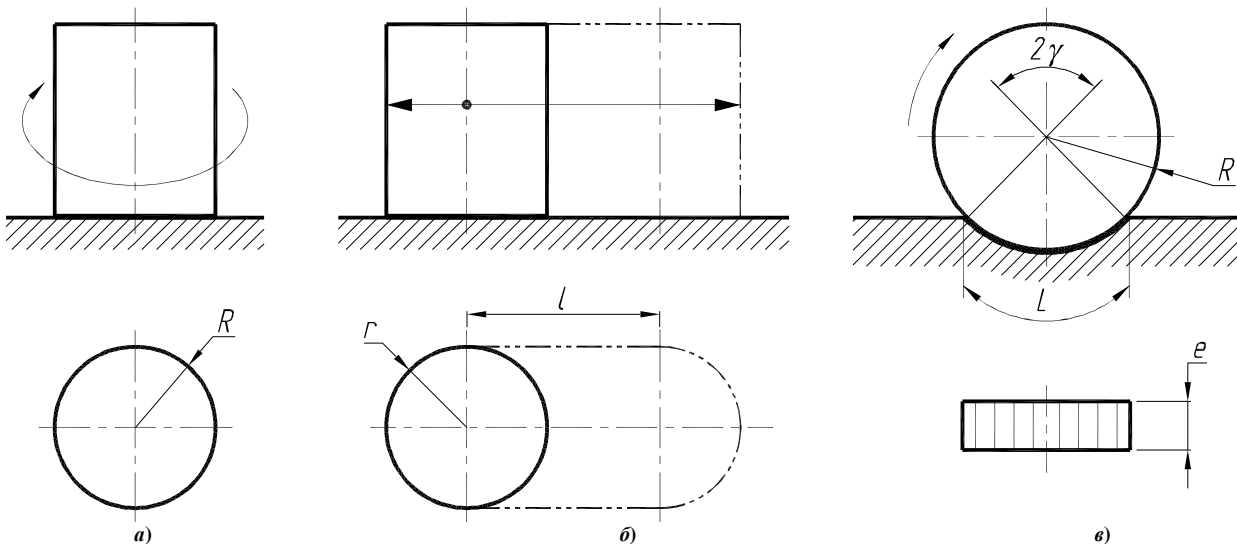


Рис. 1. Схеми контакту (зверху) і площадка зносу (знизу) на плоскій поверхні твердого тіла

При заглибленні обертаючого диска радіусом R , який має циліндричну форму периферійної частини, в плоску поверхню виробу (рис. 1, в) на останній утворюється площадка зносу, площа поверхні якої

$$S = L \cdot e \quad [2],$$

де L – довжина дуги площадки зносу, $L = 2\gamma \cdot R$;

2γ – кут дуги заглиблення, рад.;

e – товщина диска.

Стан проблеми

Знаходження площі торової поверхні зносу (рис. 2, а), яка утворюється на плоскому виробі при його контакті з поверхнею периферійної частини обертаючого диска, округленою радіусом r (рис. 2, б), представляє собою більш складну задачу. Внаслідок цього дослідники під час трибологічних розрахунків, наприклад, значень контактних тисків з боку діючої сили, площу зносу для такої поверхні, зазвичай, замінюють площею еліпсу ($S = \pi ab$) з його півосями a і b (рис. 2, в), яка не зовсім адекватно відображає вказану величину. Фактично вказаний еліпс апроксимує переріз торової поверхні і є плоскою фігурою, площа якої менша ніж площа поверхні тора – площадки зносу (лунки) на виробі.

Відомо, що тор – це геометричне тіло, яке утворюється обертанням кола навколо нерухомої прямої (у даному випадку осі Z), що лежить у площині цього кола. На рис. 3, *a* наведена схема утворення тора-кільця (R – відстань від центра кола до осі обертання Z , r – радіус кола, що обертається навколо осі Z). На рис. 3, *б* показано його комплексне креслення – вид спереду і зверху.

Повну площу поверхні тора S розраховують за формулою [2]:

$$S = 4\pi^2 R \cdot r. \quad (1)$$

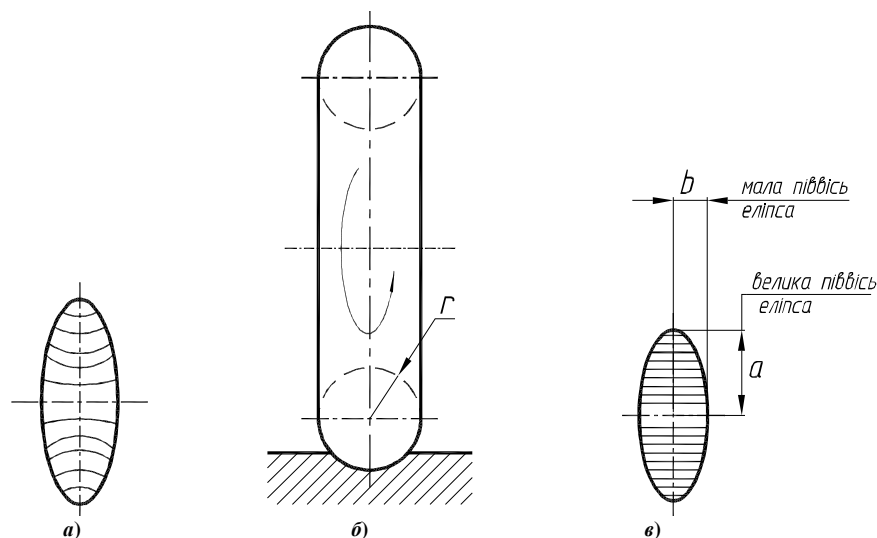


Рис. 2. Дійсна торова та еліпсна площадки зносу

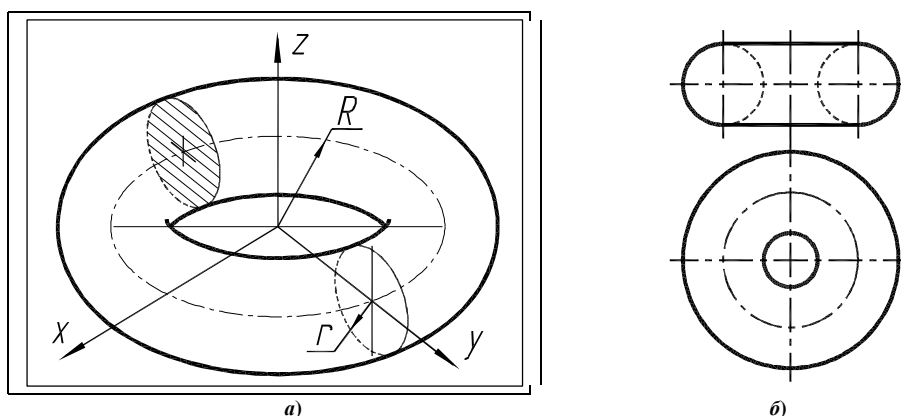


Рис. 3. Схема утворення тора та його креслення

Мета роботи

У даній роботі поставлено завдання вивести адекватну формулу для знаходження площі поверхні зносу, яка утворюється на плоских виробах при заглибленні в них диска з торовою периферійною частиною.

Методика и результати роботи

Чисельне значення площі поверхні будь-якої частини торового кільця може бути визначено через площу розгортки цієї частини. Слід відмітити, що методу точної розгортки частини тора не існує, оскільки всі твірні лінії його поверхні є кривими (поверхню тора відносять до таких, що не розгортаються). Тому на практиці розгортки частин тора можуть мати лише деяку наближену точність. Для побудови таких розгорток окремі частини поверхні тора замінюють частинами поверхонь, що розгортаються, з яких складають наближену до заданої точності розгортку тора.

Один з варіантів наближеної розгортки тора [3] показано на рис. 4. Тор розділено площинами, що проходять через вісь Z , на 8 однакових частин – секцій. Кожна секція тора замінена секцією прямого циліндра, діаметр основи якого дорівнює $2r$ (тут r – радіус кола, що утворює тор), і який зрізано двома площинами під кутом β . Розгортки всіх восьми секцій, у тому числі, однієї з них з відповідними точками побудови (фігура 123456), представлені на рис. 4.

Розглянемо процедури знаходження чисельного значення площі наближеної розгортки всього тора.

Виходячи із геометрії розгортки, наведеної на рис. 4, площа однієї секції 123456 розгортки дорівнює:

$$S_1 = 4r \int_0^{\pi} (r \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + R \cdot \operatorname{tg} \beta) d\alpha, \quad (2)$$

де α – кут повороту поточної точки T , яка визначає лінію розрізу секції циліндра.
Після спрощення:

$$S_1 = 4\pi \cdot r \cdot R \cdot \operatorname{tg} \beta. \quad (3)$$

Сумарна площа всіх секцій розгортки тора дорівнює:

$$S = \sum_{k=1}^m 4\pi \cdot r \cdot R \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{m}, \quad (4)$$

де m – кількість однакових секцій замінюючих циліндрів.
Якщо кількість секцій m прямує до безмежності, то:

$$S_{m \rightarrow \infty} = 4\pi^2 R \cdot r. \quad (5)$$

Як бачимо, вираз (5) площі умовної розгортки тора співпадає з відомою формулою (1).

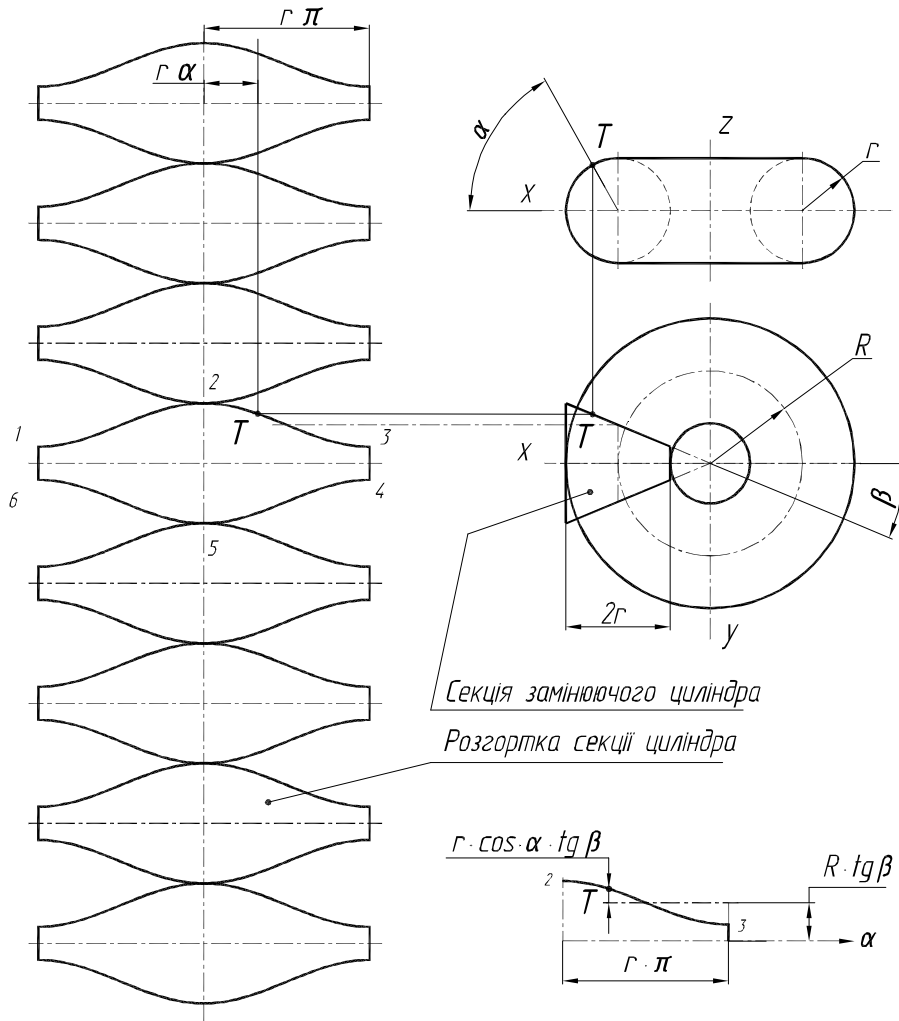
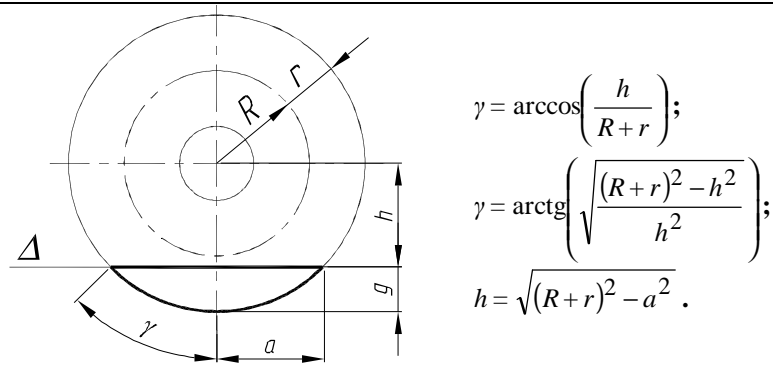


Рис. 4. Наближена розгортка поверхні тора

Розглянемо процедури обчислення значення площі частини поверхні тора, відрізаного площиною Δ , яка розташована на відстані h паралельно до осі Z і не перетинає осьової лінії тора (рис. 5). Кут γ визначає половину кута, що охоплює переріз, відрізок a – половину довжини лунки.



$$\gamma = \arccos\left(\frac{h}{R+r}\right);$$

$$\gamma = \arctg\left(\sqrt{\frac{(R+r)^2 - h^2}{h^2}}\right);$$

$$h = \sqrt{(R+r)^2 - a^2}.$$

Рис. 5. Поверхня тора, яка розрізана площиною

Для складання розрахункової схеми розташуємо тор із січною площиною так, щоб основа одного із замінюючих циліндрів проектувалась на виді зверху креслення (рис. 6) без спотворення. Розгортка кожної секції замінюючого циліндра обмежується фігурою, відзначеною на рисунку штриховкою. Враховуючи, що різницею площ вказаної фігури і фігури ABCD можна знехтувати, на основі рівняння (2) визначимо площу елемента однієї секції:

$$S_k = 4r \int_0^{\alpha_k} (r \cdot \cos\alpha \cdot \text{tg}\beta + R \cdot \text{tg}\beta) \cdot d\alpha; \tag{6}$$

після розв'язку:

$$S_k = 4r^2 \cdot \text{tg}\beta \cdot \sin\alpha_k + 4r \cdot \text{tg}\beta \cdot R \cdot \alpha_k. \tag{7}$$

де α_k – кут, який визначає ширину елемента розгортки (рис. 6).

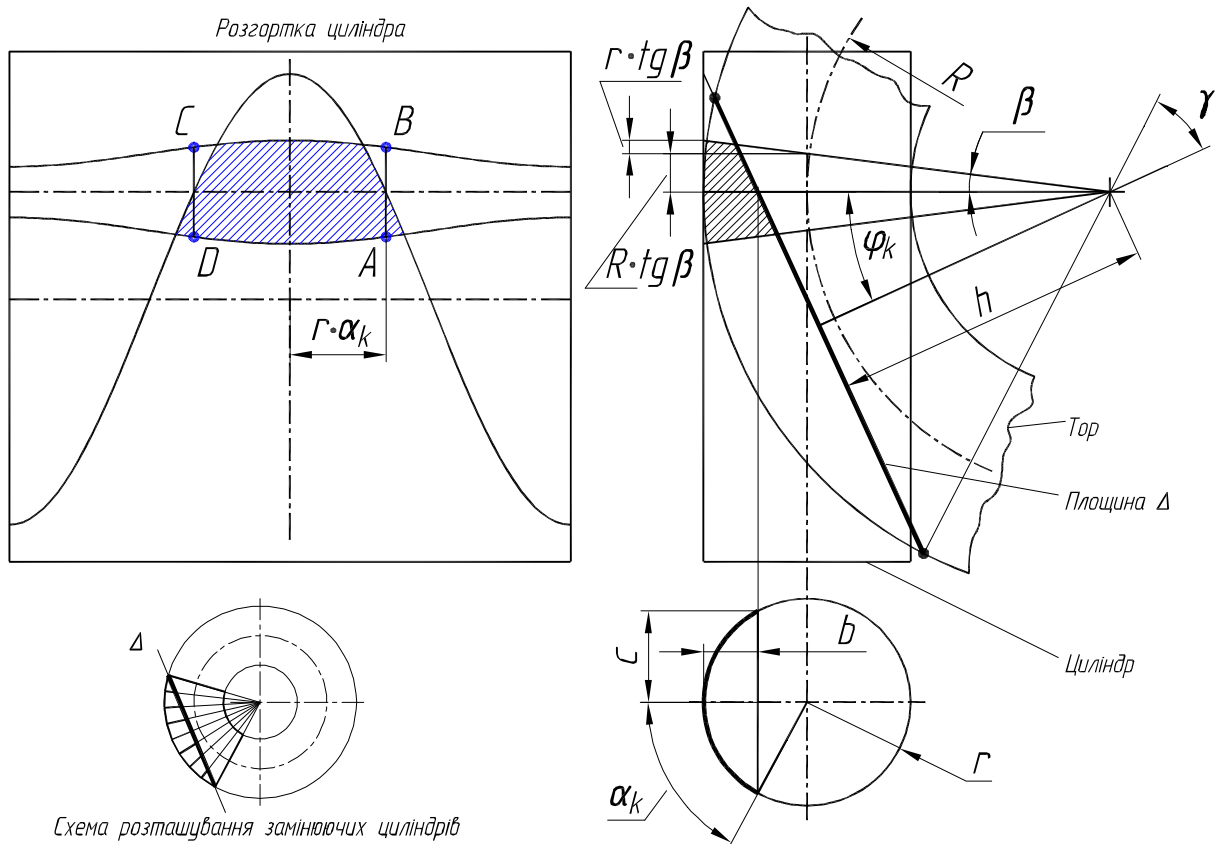


Рис. 6. Геометрія розгортки зрізаної частини тора

Виходячи із геометрії поверхні тора, замінюючого циліндра та січної площини Δ , представлених на рис. 6, визначаємо складові елементи формули (7):

$$b = (R + r) - \frac{h}{\cos \alpha_k}; \quad c = \sqrt{2rb - b^2}; \quad \cos \alpha_k = \left(1 - \frac{b}{r}\right) \quad (8)$$

де h – відстань від центра тора до січної площини Δ ;

α_k – кут нахилу січної площини Δ до осі k -го замінюючого циліндра.

Треба зауважити, що всі подальші розрахунки проводяться для випадку $h \geq R$ і відповідно $\alpha_k \leq \frac{\pi}{2}$.

З урахуванням залежностей (8):

$$\alpha_k = \arccos\left(\frac{h}{r \cdot \cos \alpha_k} - \frac{R}{r}\right); \quad \alpha_k = \arctg \frac{\sqrt{2rb - b^2}}{r - b}. \quad (9)$$

Величини кутів β і α_k (рис. 6) визначаються кількістю $2n$ однакових секцій замінюючих циліндрів,

що розташовані в межах перерізу тора площиною Δ : $\beta = \frac{\gamma}{2n}$; $\alpha_k = 2\beta \cdot \left(k - \frac{1}{2}\right)$.

Після підсумовування всіх елементів замінюючих циліндрів одержуємо кінцеву формулу для визначення площі умовної розгортки зрізаної частини тора:

$$S_{\Delta} = 2 \cdot \sum_{k=1}^n 4r \cdot \tg \beta \cdot (r \cdot \sin \alpha_k + R \cdot \alpha_k), \quad (10)$$

де $2n$ – кількість секцій замінюючих циліндрів.

Розрахунок площі S_{Δ} розгортки зрізаної частини тора може бути проведений програмним модулем "Tor_Z1", розробленим авторами на основі виразу (10).

```
Public Sub Tor_Z1()
  pi = 4 * Atn(1)
  'Вихідні дані
  Rt = 24.4: r = 0.6: a = 5.0: Ni = 50
  h = Sqr((Rt + r) ^ 2 - a ^ 2)
  Gamma = Atn(Sqr((Rt + r) ^ 2 / h ^ 2 - 1))
  Beta = Gamma / (2 * Ni)
  Plo = 0
  For k = 1 To Ni
    Nkat = k
    Fikat = 2 * Beta * (Nkat - 0.5)
    b = Rt + r - h / Cos(Fikat)
    c = Sqr(2 * r * b - b ^ 2)
    'Площа секції циліндру
    Alfa = Atn(Sqr(2 * r * b - b ^ 2) / (r - b))
    Plo_i = 4 * r * Tan(Beta) * (r * Sin(Alfa) + Rt * Alfa)
    Plo = Plo + Plo_i
  Next k
  Plo = Plo * 2
  Debug.Print "Площа зрізаного тора - Plo="; Format(Plo, "0.0000")
End Sub
```

Рис. 7. Програмний модуль "Tor_Z1"

З метою визначення впливу числа n на точність розрахунку модулем "Tor_Z1" площі S_{Δ} зрізаної частини тора проведено обчислення за такими вихідними даними: $R = 24,4$ мм; $r = 0,6$ мм; $h = 24,5$ мм.

Результати обчислень при різних значеннях n показано на рис. 8.

Із графіка функції $S_{\Delta} = f(n)$ можна зробити висновок, що при заданих вище вихідних даних обчислена величина S_{Δ} змінюється незначно вже після $n = 20$.

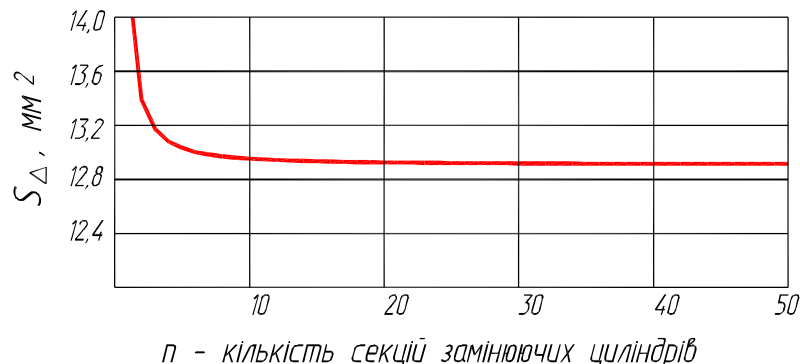


Рис. 8. Залежність площі S_{Δ} від кількості n елементів розгортки

З метою визначення втрати точності при заміні площі дійсної поверхні тора площею еліпса (рис. 2, в) проведено паралельне обчислення площі зрізаної частини тора S_{Δ} і площі еліпса, в якого 4 вершини (кінці осей $2a$ і $2b$) збігаються з відповідними точками перерізу тора. Величини півосей еліпса визначалися за формулами:

$$a = h \cdot \operatorname{tg} \gamma; \quad b = \sqrt{r^2 - (h - R)^2} \quad (11)$$

Обчислення було проведено при різних значеннях величини $2a$ (довжини площадки зносу) за такими вихідними даними: $R = 24,4$ мм; $r = 0,6$ мм; $n = 20$.

Результати обчислень показано на рис. 9.

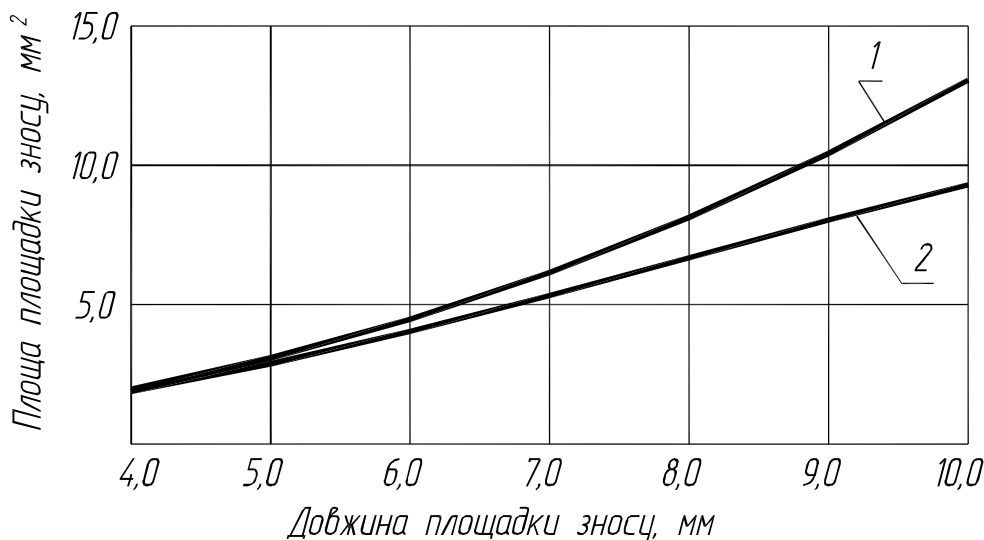


Рис. 9. Залежність площі поверхні зносу від положення січної площини Δ на торі:
1 – площа зрізаної частини тора; 2 – площа еліпса

Висновки

Розроблено розрахункову модель та програмний модуль для визначення площі поверхні зносу, яка утворюється на площині виробу від його контактної взаємодії з торовою периферійною частиною обертаючого диска. Запропонована модель забезпечує отримання більш точних значень площі торової поверхні зносу, ніж формула для визначення площі еліпсу, яка застосовується в трибологічних розрахунках у цьому випадку. Ця різниця становиться помітною при довжині площадки, яка перевищує 5 мм.

Література

1. Краткий справочник металлста / [под ред. П.Н. Орлова, Е.А. Скороходова.]. – 3-е изд. – М.: Машиностроение, 1986. – 960 с.
2. Математический энциклопедический словарь / [ред. Ю.В. Прохоров]. – М.: Советская энциклопедия, 1988. – 847 с.
3. Посвянский А.Д. Краткий курс начертательной геометрии. / Посвянский А.Д. – М.: Высшая школа, 1974. – 192 с.

Надійшла 6.5.2010 р.