```
IMPORTANCE MEASURES REPORT (ALTERNATE CUT SETS)
Family: ANDREY Analysis: RANDOM
System: ELSTRUM Case : ALTERNATE
(Sorted by Fussell-Vesely Importance)
Num. Probability Fussell- Risk Risk
of of Vesely Reduction Increase
Event Name Occ. Failure Importance Ratio Ratio
---------------- ---- ---------- ---------- ---------- ----------
EL5 20 5.000E-002 1.000E+000 2.107E+012 1.996E+001
EL3 10 1.000E-001 8.333E-001 5.999E+000 8.493E+000
EL2 10 4.000E-002 6.666E-001 3.000E+000 1.697E+001
EL1 10 2.000E-002 3.333E-001 1.500E+000 1.731E+001
EL9 4 2.000E-001 3.077E-001 1.444E+000 2.231E+000
EL7 4 1.500E-001 2.307E-001 1.300E+000 2.307E+000
EL6 4 1.200E-001 1.846E-001 1.226E+000 2.354E+000
EL4 10 2.000E-002 1.666E-001 1.200E+000 9.159E+000
EL8 4 1.000E-001 1.538E-001 1.182E+000 2.384E+000
EL10 4 8.000E-002 1.231E-001 1.140E+000 2.415E+000
```

Висновок:

Використання програми “IRRAS” для розрахунку ризику виникнення травми під час виконання роботи на пресі дозволяє визначити шляхи управління ризиком значимість подій, які впливають на реалізацію небезпечних факторів.

Було досліджено усі операції по технологічному процесу і виявлено найвагоміші фактори, які впливають на травматизм працівників при виготовленні труби в теплообмінник на заводі «АТОНМАШ».

Література

1. Бєгун В.В. Безпека життєдіяльності: [навч. – метод. посібник]. / Бєгун В.В., Науменко І.М. – К., 2004. – 327 с.

2. Охорона праці. Терміни та визначення основних понять: ДСТУ 2293- 99. – К.: Держстандарт України. – 16 с.

3. Основи охорони праці: [підручник]. – / Ткачук К.Н., Халімовський М.О., Зацарний В.М. та ін. – [2-е вид., доп. та перероб.]. – К.: Основа, 2006. – 448 с.

УДК 519.832.3

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

МІНІМАКСНИЙ ПІДХІД У РЕАЛІЗАЦІЇ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАМЕТРА З НЕВІДОМИМ ІМОВІРНІСНИМ РОЗПОДІЛОМ НА ІНТЕРВАЛІ НЕНУЛЬОВОЇ МІРИ

У формі антагоністичної гри представлено модель практичної реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри. Доведено теореми про нижнє і верхнє значення антагоністичної гри для випадків з континуальним ядром та з матричним ядром. Представлено розроблений програмний MATLAB-модуль «stochparamrealize» для знаходження оптимальної стратегії як варіанту шуканого імовірнісного розподілу, що може бути використаний у задачах моделювання шорсткостей поверхонь.

In the form of the antagonistic game there has been represented a model of the practical realization of the stochastic parameter with the unknown probabilistic distribution on the nonzero measure interval. There have been proved the theorems on the low and upper value of the antagonistic game for the cases with the continual kernel and with the matrix kernel. There has been represented the developed program MATLAB-module «stochparamrealize» for finding the optimal strategy as the variant of the sought probabilistic distribution, that may be used in problems of modeling the surface roughness.

Ключові слова: стохастичний параметр, антагоністична гра, MATLAB-модуль.

Постановка проблеми у загальному виді

Оцінювання параметрів математичних моделей є характерним чи не для кожного об’єкта моделювання. Інтервальна оцінка невідомого параметра є, звичайно ж, більш інформативною, ніж оцінювання лише його математичного сподівання. Тим більше, що у природі не існує об’єктів зі сталими у часі параметрами. Інтервальна оцінка стохастичного параметра вимагає ще й знання імовірнісного розподілу, за який зазвичай приймають нормальний розподіл. Але тут, знову ж таки, доводиться оцінювати вже невідому дисперсію цього розподілу. Крім того, навіть якщо інтервал ненульової міри, у якому знаходяться значення стохастичного параметра, визначено (оцінено), цей інтервал значень необхідно ще реалізувати практично, адже кожне значення з цього інтервалу має “право на існування” (і має бути враховане у досліджуваній математичній моделі об'єкта моделювання).

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Питання інтервального оцінювання даних досить глибоко висвітлено в [1, 2]. У [3, 4] розглянуто проблему коректної "підстановки" інтервальних оцінок у відповідну математичну модель. Проте за невідомого імовірнісного розподілу відкритим залишається питання про те, як обирати значення з оціненого інтервалу для того, щоб підставити (використати) його у детерміновану математичну модель. Подібні проблеми виникають як у задачах моделювання шорсткостей поверхонь, так і в задачах хімічної промисловості й екологічного моделювання.

Формулювання мети і постановка завдань статті

Нехай α є значенням невідомого стохастичного параметра, усі можливі значення якого укладені в інтервалі $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$, звичайна лебегівська $\mathbb{R}$-міра якого $\mu_{\mathbb{R}}\{(\alpha_{\min};\alpha_{\max})\}\neq 0$. Необхідно знайти метод практичної реалізації цього параметра у детермінованій математичній моделі за умови, якщо нічого невідомо про тип імовірнісного розподілу на інтервалі $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$. Для цього використаймо принцип мінімаксу з теорії ігор [5], де спочатку побудуємо відповідну антагоністичну гру з її ядром на відкритому квадраті

$$(\alpha_{\min};\alpha_{\max})\times(\alpha_{\min};\alpha_{\max})\subset\mathbb{R}^2. \qquad (1)$$

Визначення ядра антагоністичної гри

Побудуємо антагоністичну гру на відкритому квадраті (1), у якій одним з гравців будемо ми, зацікавлені у такому виборі значень стохастичного параметра α з інтервалу $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$, який призведе до найменших втрат, котрі зумовлюються відхиленням прийнятого у даний момент значення α від реального (і достеменно невідомого). Очевидно, що тут ми виступатимемо у ролі другого гравця, а першого гравця будуть "персоніфікувати" різні випадкові обставини, завдяки чому досліджуваний параметр і є стохастичним. Позначимо через x та y чисті стратегії першого і другого гравців відповідно. Тоді ядро $K(x, y)$ антагоністичної гри, яка будується, у точці $[x \quad y]$ буде пропорційним модулю різниці $x-y$. У найпростішому випадку

$$K(x, y)=|x-y| \text{ при } x\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}) \text{ та } y\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}). \qquad (2)$$

Але, взагалі кажучи, значення ядра (2) у точці $[x \quad y]$ необхідно множити на деяку монотонно неспадну функцію змінної x при $x<y$ і на симетричну монотонно незростаючу функцію змінної x при $x>y$ для того, щоб виділити нерівноцінність негативних наслідків у різних точках відкритого квадрату (1), для яких значення ядра (2) є однаковими. Цю масштабуючу функцію позначимо $s(z)$, поклавши її монотонно неспадною і невід'ємною на інтервалі $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$, а також ненульовою, тобто

$$s(z)>0 \ \ \forall\, z\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}),\ s(z_1)\leqslant s(z_2) \text{ при } z_1<z_2 \ \ \forall\, z_1\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}) \text{ та } \forall\, z_2\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}). \qquad (3)$$

Тоді ядро антагоністичної гри, у якій другий гравець має визначити свою оптимальну стратегію як імовірнісну міру на інтервалі $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$ значень стохастичного параметра, представиться у такому виді:

$$K(x, y)=|x-y|\,s(|x-y|) \text{ при } x\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}) \text{ та } y\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}). \qquad (4)$$

Зауважимо, що завдяки модулям представлені ядра (2) і (4) є симетричними: $K(x, y)=K(y, x)$.

Теорема про нижнє і верхнє значення антагоністичної гри з ядром (2)

Якщо у якості моделі реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри брати антагоністичну гру з ядром (2), то це буде найбільш елементарна модель з функцією $s(z)=1 \ \ \forall\, z\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$. Має місце таке очевидне твердження.

Теорема 1. В антагоністичній грі з ядром (2) нижнє значення гри $v_*=0$ та верхнє значення гри $v^*=\dfrac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}$.

Доведення. Очевидно, що на тій діагоналі квадрата (1), де $x=y$, ядро (2) набуває нульових значень:

$$K(x, x)=0 \ \ \forall\, x\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max}). \qquad (5)$$

Тому нижнє значення гри

$$v_*=\sup_{x\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})}\left\{\inf_{y\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})}K(x, y)\right\}=\sup_{x\in(\alpha_{\min};\alpha_{\max})}K(x, x)=0. \qquad (6)$$

Рівність $K(x, y) = 0$ виконується при кожному фіксованому x лише в одній точці y такій, що $y = x$. Тому $K(x, y) > 0 \quad \forall\ y \neq x$, звідки верхнє значення гри

$$v^* = \inf_{y \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} \left\{ \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) \right\} > 0 \tag{7}$$

і гра не має сідлових точок у чистих стратегіях. Враховуючи, що серединою інтервалу $(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})$ є точка $\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2}$, знаходимо внутрішній екстремум у нерівності (7):

$$\sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) = \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} |x - y| = K(\alpha_{\max}, y) = |\alpha_{\max} - y| = \alpha_{\max} - y \ \text{ при } \ y \in \left(\alpha_{\min}; \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right] \tag{8}$$

та

$$\sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) = \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} |x - y| = K(\alpha_{\min}, y) = |\alpha_{\min} - y| = y - \alpha_{\min} \ \text{ при } \ y \in \left[\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2}; \alpha_{\max} \right) \tag{9}$$

для ядра (2). Звідси верхнє значення гри

$$\begin{aligned} v^* &= \inf_{y \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} \left\{ \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) \right\} = \\ &= \min\left\{ \inf_{y \in \left(\alpha_{\min}; \frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2} \right]} K(\alpha_{\max}, y),\ \inf_{y \in \left[\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}; \alpha_{\max} \right)} K(\alpha_{\min}, y) \right\} = \\ &= \min\left\{ \inf_{y \in \left(\alpha_{\min}; \frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2} \right]} (\alpha_{\max} - y),\ \inf_{y \in \left[\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}; \alpha_{\max} \right)} (y - \alpha_{\min}) \right\} = \\ &= \min\left\{ \left(\alpha_{\max} - \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right), \left(\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} - \alpha_{\min} \right) \right\} = \\ &= \min\left\{ \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right), \left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right) \right\} = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2}. \end{aligned} \tag{10}$$

Теорему доведено.

Теорема про нижнє і верхнє значення антагоністичної гри з ядром (4)

Антагоністична гра з ядром (4) є узагальненою математичною моделлю для реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри. Наступна теорема, зрозуміло, є більш загальною і, власне, узагальнює теорему 1.

Теорема 2. В антагоністичній грі з ядром (4) нижнє значення гри $v_* = 0$ та верхнє значення гри

$$v^* = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} s\left(\frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{2} \right). \tag{11}$$

Доведення. Очевидно, що на тій діагоналі квадрата (1), де $x = y$, ядро (4) набуває нульових значень, і мають місце (5) та (6), звідки нижнє значення такої гри $v_* = 0$. Також цілком очевидно, що й нерівність (7) залишається справедливою, і дана антагоністична гра не має сідлових точок у чистих стратегіях.

Враховуючи, що серединою інтервалу $(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})$ є точка $\frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2}$, знаходимо внутрішній екстремум у нерівності (7):

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) = \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} |x - y| s(|x - y|) = K(\alpha_{\max}, y) = \\ &= |\alpha_{\max} - y| s(|\alpha_{\max} - y|) = (\alpha_{\max} - y) s(\alpha_{\max} - y) \ \text{ при } \ y \in \left(\alpha_{\min}; \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2} \right] \end{aligned} \tag{12}$$

та

$$\sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} K(x, y) = \sup_{x \in (\alpha_{\min};\, \alpha_{\max})} |x - y| s(|x - y|) = K(\alpha_{\min}, y) =$$

$$=|\alpha_{\min}-y|s(|\alpha_{\min}-y|)=(y-\alpha_{\min})s(y-\alpha_{\min}) \text{ при } y\in\left[\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2};\,\alpha_{\max}\right) \quad (13)$$

для ядра (4), де використана також і монотонність функції $s(z)$. Звідси верхнє значення гри

$$v^*=\inf_{y\in(\alpha_{\min};\,\alpha_{\max})}\left\{\sup_{x\in(\alpha_{\min};\,\alpha_{\max})}K(x,\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\inf_{y\in\left(\alpha_{\min};\,\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}\right]}K(\alpha_{\max},\,y),\ \inf_{y\in\left[\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2};\,\alpha_{\max}\right)}K(\alpha_{\min},\,y)\right\}=$$

$$=\min\left\{\inf_{y\in\left(\alpha_{\min};\,\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}\right]}(\alpha_{\max}-y)s(\alpha_{\max}-y),\ \inf_{y\in\left[\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2};\,\alpha_{\max}\right)}(y-\alpha_{\min})s(y-\alpha_{\min})\right\}=$$

$$=\min\left\{\left(\alpha_{\max}-\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}\right)s\left(\alpha_{\max}-\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}\right),\left(\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}-\alpha_{\min}\right)s\left(\frac{\alpha_{\max}+\alpha_{\min}}{2}-\alpha_{\min}\right)\right\}=$$

$$=\min\left\{\left(\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}\right)s\left(\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}\right),\left(\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}\right)s\left(\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}\right)\right\}=\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}s\left(\frac{\alpha_{\max}-\alpha_{\min}}{2}\right). \quad (14)$$

Теорему доведено.

Модель у формі антагоністичної гри з ядром (4) при обмеженій кількості спостережень параметра α

Антагоністична гра з ядром (4) є дещо ідеалізованою моделлю для практичної реалізації стохастичного параметра, котра має місце тільки при точному знанні того, що стохастичний параметр α набуває значень лише у межах інтервалу $(\alpha_{\min};\alpha_{\max})$. На практиці неможливо у процесі спостережень (непрямих обчислень або вимірювань) зафіксувати нескінченно багато значень стохастичного параметра. Тому розглянемо випадок, коли з'ясовано, що стохастичний параметр набуває N значень $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ при $\alpha_j<\alpha_{j+1}\ \forall\ j=\overline{1,\,N-1}$. Варто зауважити, що, як ми припускаємо, кожне з цих N значень $\{\alpha_j\}_{j=1}^N$ випало (або було зафіксовано) один і тільки один раз (саме тому тут ми не можемо стверджувати навіть про рівноімовірний характер розподілу цих значень). Тоді замість поверхні (4) матимемо матрицю $\mathbf{K}=(k_{ij})_{N\times N}$ з елементами

$$k_{ij}=|\alpha_i-\alpha_j|s(|\alpha_i-\alpha_j|) \text{ при } i=\overline{1,\,N} \text{ та } j=\overline{1,\,N} \quad (15)$$

відповідної матричної $N\times N$-гри. Головна діагональ цієї матриці є, очевидно, нульовою, звідки нижнє значення такої $N\times N$-гри $v_*=0$. Щодо верхнього значення $\mathbf{K}=(k_{ij})_{N\times N}$-гри з елементами (15) має місце така теорема.

Теорема 3. В матричній $N\times N$-грі з матрицею $\mathbf{K}=(k_{ij})_{N\times N}$ з елементами (15) верхнє значення гри

$$v^*=\min\left\{k_{N,\,j_*},\,k_{1,\,j^*}\right\} \quad (16)$$

при

$$j_*=\arg\max_{j=\overline{1,\,N}}\left\{\left[\alpha_1;\,\frac{\alpha_N+\alpha_1}{2}\right]\mathbf{I}\,\{\alpha_j\}_{j=1}^N\right\} \quad (17)$$

та

$$j^*=\arg\min_{j=\overline{1,\,N}}\left\{\left[\frac{\alpha_N+\alpha_1}{2};\,\alpha_N\right]\mathbf{I}\,\{\alpha_j\}_{j=1}^N\right\}. \quad (18)$$

Доведення. Очевидно, що $N\times N$-гра з матрицею $\mathbf{K}=(k_{ij})_{N\times N}$ з елементами (15) не має сідлових точок у чистих стратегіях. Маємо:

$$\max_{i=\overline{1,\,N}}k_{ij}=\max_{i=\overline{1,\,N}}\left\{|\alpha_i-\alpha_j|s(|\alpha_i-\alpha_j|)\right\}=k_{N,\,j}=|\alpha_N-\alpha_j|s(|\alpha_N-\alpha_j|)=$$

$$=(\alpha_N-\alpha_j)s(\alpha_N-\alpha_j) \text{ при } \alpha_j\in\left[\alpha_1;\,\frac{\alpha_N+\alpha_1}{2}\right] \quad (19)$$

та

$$\max_{i=\overline{1,\,N}} k_{ij} = \max_{i=\overline{1,\,N}} \left\{ \left|\alpha_i - \alpha_j\right| s\left(\left|\alpha_i - \alpha_j\right|\right) \right\} = k_{1,j} = \left|\alpha_1 - \alpha_j\right| s\left(\left|\alpha_1 - \alpha_j\right|\right) =$$

$$= \left(\alpha_j - \alpha_1\right) s\left(\alpha_j - \alpha_1\right) \text{ при } \alpha_j \in \left[\frac{\alpha_N + \alpha_1}{2};\, \alpha_N\right] \tag{20}$$

для матриці $\mathbf{K} = \left(k_{ij}\right)_{N \times N}$. Значення $\frac{\alpha_N + \alpha_1}{2}$ ділить сегмент $\left[\alpha_1;\, \alpha_N\right]$ навпіл. Умові $\alpha \leqslant \frac{\alpha_N + \alpha_1}{2}$ відповідає стовпчик з номером (17), а умові $\alpha \geqslant \frac{\alpha_N + \alpha_1}{2}$ відповідає стовпчик з номером (18). Тоді для верхнього значення даної гри отримуємо:

$$v^* = \min_{j=\overline{1,\,N}} \left\{ \max_{i=\overline{1,\,N}} k_{ij} \right\} = \min \left\{ \min_{\alpha_j \in \left[\alpha_1;\, \frac{\alpha_N + \alpha_1}{2}\right]} \left(k_{N,j}\right),\ \min_{\alpha_j \in \left[\frac{\alpha_N + \alpha_1}{2};\, \alpha_N\right]} \left(k_{1,j}\right) \right\} =$$

$$= \min \left\{ \min_{\alpha_j \in \left[\alpha_1;\, \frac{\alpha_N + \alpha_1}{2}\right]} \left\{ \left(\alpha_N - \alpha_j\right) s\left(\alpha_N - \alpha_j\right) \right\},\ \min_{\alpha_j \in \left[\frac{\alpha_N + \alpha_1}{2};\, \alpha_N\right]} \left\{ \left(\alpha_j - \alpha_1\right) s\left(\alpha_j - \alpha_1\right) \right\} \right\} =$$

$$= \min \left\{ \left(\alpha_N - \alpha_{j_*}\right) s\left(\alpha_N - \alpha_{j_*}\right),\ \left(\alpha_{j^*} - \alpha_1\right) s\left(\alpha_{j^*} - \alpha_1\right) \right\} = \min \left\{ k_{N,j_*},\ k_{1,j^*} \right\}. \tag{21}$$

Теорему доведено.

Мінімаксні стратегії та використання оптимальних стратегій

Три доведені теореми дозволяють оцінювати верхнє значення відповідної антагоністичної гри, тобто максимальні втрати, зумовлені відхиленням прийнятого у даний момент значення α від реального значення стохастичного параметра, за умови дотримання другим гравцем мінімаксної стратегії. Для неперервної антагоністичної гри з узагальненим ядром (4) цією стратегією є

$$y_{\min\max} = \frac{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}}{2}, \tag{22}$$

а для матричної $N \times N$-гри з матрицею $\mathbf{K} = \left(k_{ij}\right)_{N \times N}$ з множиною $\left\{y_j\right\}_{j=1}^{N}$ усіх чистих стратегій другого гравця його мінімаксна стратегія

$$y_{\min\max} = y_{j_{\min\max}},\ \ j_{\min\max} \in \arg\min_{\left\{j_*,\, j^*\right\}} \left\{ k_{N,j_*},\ k_{1,j^*} \right\}. \tag{23}$$

У грі з ядром (4) оптимальне значення v_{opt} гри досягатиметься на оптимальній стратегії $\rho_{\text{opt}}\left(y\right)$ другого гравця, де $\rho_{\text{opt}}\left(y\right)$ є деякою імовірнісною мірою на інтервалі $\left(\alpha_{\min};\, \alpha_{\max}\right)$. Втілення $\rho_{\text{opt}}\left(y\right)$ на практиці й означатиме реалізацію стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі $\left(\alpha_{\min};\, \alpha_{\max}\right)$. Але використання $\rho_{\text{opt}}\left(y\right)$ неможливе без відповідної дискретизації значень з цього інтервалу. Тому, так чи інакше, доводиться переходити від неперервної моделі з ядром (4) до матричної $N \times N$-гри з матрицею $\mathbf{K} = \left(k_{ij}\right)_{N \times N}$ з елементами (15). Її оптимальне значення v_{opt} досягатиметься на оптимальній стратегії

$$\mathbf{Q}_{\text{opt}} = \left[\ddot{q}_1\ \ \ddot{q}_2\ \ \ldots\ \ \ddot{q}_{N-1}\ \ \ddot{q}_N\right] \subset \left\{ \mathbf{Q} = \left[q_1\ \ q_2\ \ \ldots\ \ q_{N-1}\ \ q_N\right] \subset \mathbb{R}^N : q_j \subset [0;\, 1]\ \forall\ j = \overline{1,\, N},\ \sum_{j=1}^{N} q_j = 1 \right\} \tag{24}$$

другого гравця. Знайти вектор (24) можна за допомогою спеціально розробленого програмного MATLAB-модуля «stochparamrealize» (рис. 1). Вхідним параметром цього модуля є вектор зі значеннями $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{N}$ та вектор з відповідними масштабуючими коефіцієнтами як значеннями функції $s\left(z\right)$ з властивостями (3). У разі необхідності (непослідовного чи некоректного уведення даних) вхідні параметри будуть просортовані. Також можна уводити лише вектор зі значеннями $\left\{\alpha_j\right\}_{j=1}^{N}$, оскільки за замовчуванням функція $s\left(z\right)$ покладається рівною одиниці.

Модуль «stochparamrealize» повертає вектор (24), нижнє v_* та верхнє значення гри v^*, а також оптимальне значення v_{opt}. У командне MATLAB-вікно окремо виводиться матриця $\mathbf{K} = \left(k_{ij}\right)_{N \times N}$ та вектор

(24). Тоді, знаючи (24), де $\breve{q}_j$ є імовірністю (необхідного) обирання стохастичного параметра зі значенням α_j у досліджуваній математичній моделі об'єкта моделювання, можна використати метод реалізації оптимальної змішаної стратегії у матричній грі [6 — 8]. Реалізація змішаної стратегії (24) на практиці означатиме реалізацію стохастичного параметра з його N зафіксованими значеннями $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N}$. При цьому очікувані негативні наслідки будуть відповідати значенню v_{opt}.

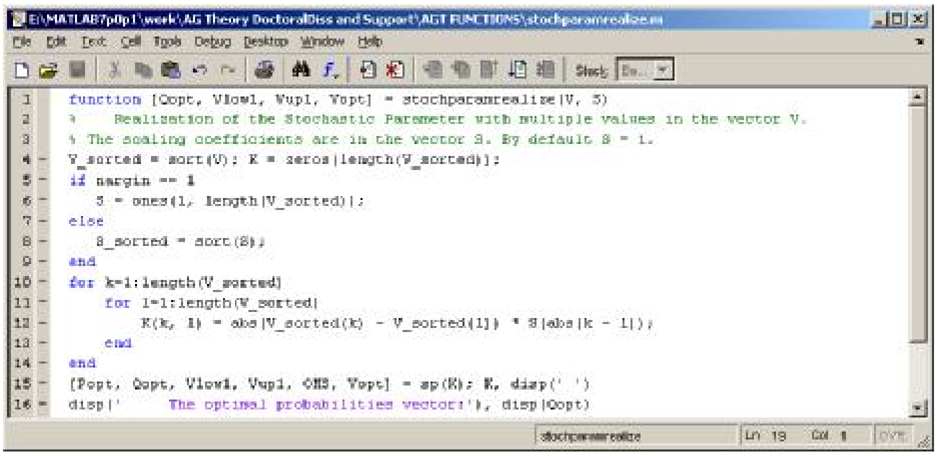

Рис. 1. Код програмного MATLAB-модуля «stochparamrealize»

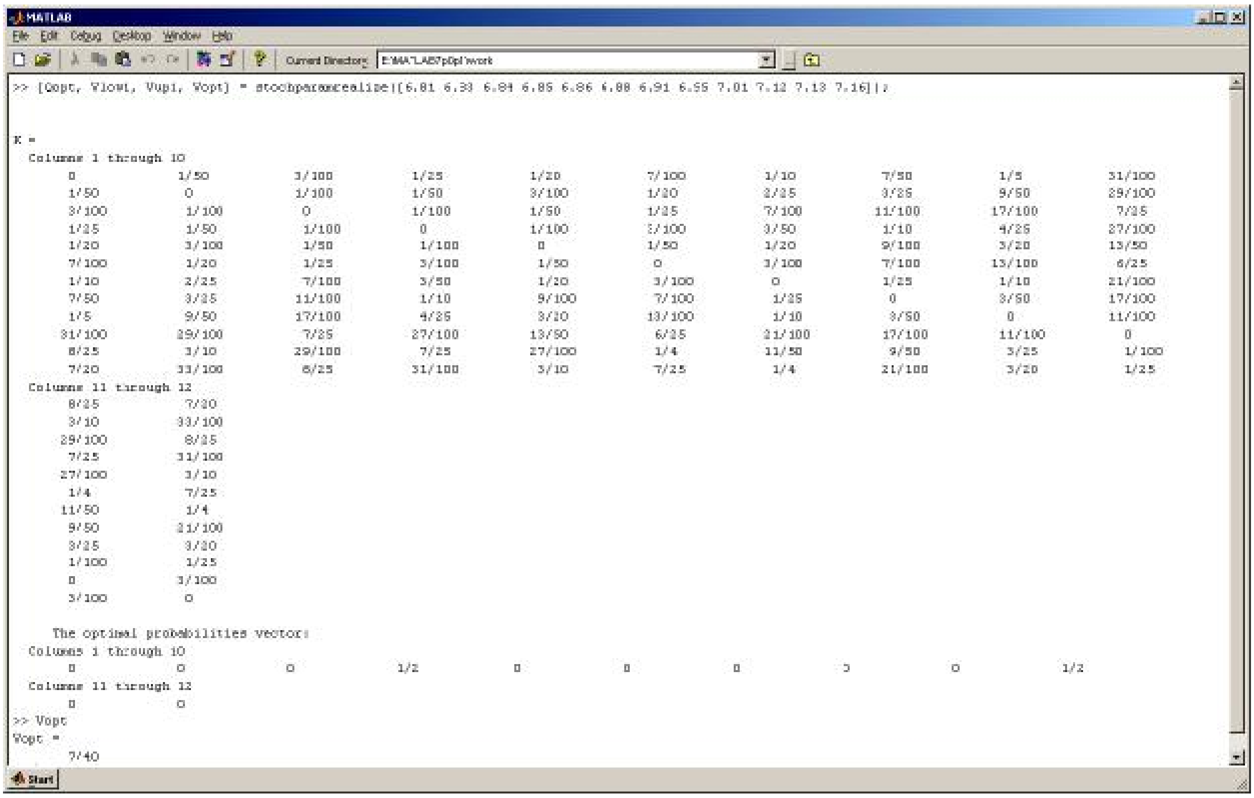

Рис. 2. Оптимальна стратегія (24) у реалізації стохастичного параметра зі значеннями (25) без масштабування

Якщо, скажімо, у нас досліджується деякий об'єкт зі стохастичним параметром, значення

$$\{\alpha_j\}_{j=1}^{12} = \{6.81,\ 6.83,\ 6.84,\ 6.85,\ 6.86,\ 6.88,\ 6.91,\ 6.95,\ 7.01,\ 7.12,\ 7.13,\ 7.16\} \tag{25}$$

якого зафіксовані у процесі $N = 12$ спостережень, то у випадку без масштабування отримаємо такі результати (рис. 2): $\breve{q}_4 = \breve{q}_{10} = \frac{1}{2}$, $\breve{q}_j = 0 \quad \forall\ j \in \{\overline{1, 12}\} \setminus \{4, 10\}$, $v_{\text{opt}} = \frac{7}{40} = 0.175$. Це означає, що при подальшому дослідженні об'єкта моделювання необхідно рівноімовірно використовувати значення $\alpha_4 = 6.85$ та $\alpha_{10} = 7.12$ його стохастичного параметру, і тоді очікуване відхилення від невідомого реального значення цього параметру складе $v_{\text{opt}} = 0.175$. Цього можна було досягти, здавалося б, і при використанні значення $\frac{\alpha_1 + \alpha_{12}}{2} = 6.985$, але його немає у множині (25) і, можливо, таке значення є недопустимим (коли, наприклад, якась функція у досліджуваній математичній моделі при підстановці у неї значення $\frac{\alpha_1 + \alpha_{12}}{2} = 6.985$ терпить розрив).

Висновок та перспектива подальшого дослідження

Якщо у деяку детерміновану математичну модель необхідно підставити стохастичний параметр, математичне сподівання якого невідоме, але усі можливі значення цього параметру укладені в інтервалі $(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})$, звичайна лебегівська $\mathbb{R}$-міра якого $\mu_{\mathbb{R}}\{(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})\} \neq 0$, то для цього можна використати принцип мінімаксу, реалізувавши на практиці оптимальну змішану стратегію $\rho_{\mathrm{opt}}(y)$ другого гравця у грі з ядром (4) на відкритому квадраті (1) при (3). Проте таке "континуальне" трактування є надто узагальненим, де, так чи інакше, при реалізації імовірнісної міри $\rho_{\mathrm{opt}}(y)$ треба буде вибирати скінченну кількість точок з інтервалу $(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})$. Тому дискретним аналогом моделі практичної реалізації стохастичного параметра є матрична $N \times N$-гра з матрицею $\mathbf{K} = (k_{ij})_{N \times N}$ з елементами (15), де є N значень $\{\alpha_j\}_{j=1}^{N}$ при $\alpha_j < \alpha_{j+1}$ $\forall\ j = \overline{1, N-1}$ і на практиці необхідно реалізовувати вже оптимальну змішану стратегію (24). Подальші дослідження слід спрямувати на теоретичне обґрунтування методу реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри, де простір можливих імовірнісних розподілів $\mu(\alpha)$ є підпростором границі одиничної кулі простору $L_1(\alpha_{\min}; \alpha_{\max})$ з центром у нулі [9 — 15].

Література

1. Большаков А. А., Каримов Р. Н. Методы обработки многомерных данных и временных рядов: Учебное пособие для вузов. — М.: Горячая линия — Телеком, 2007. — 520 с.: ил.
2. Caprani O., Madsen K., Nielsen H. B. Introduction to Interval Analysis. — IMM, DTU. — 2002. — 82 p.
3. Дивак М. П., Пукас А. В., Дивак Т. М. Ідентифікація параметрів різницевого оператора в задачах моделювання процесів поширення забруднень методами аналізу інтервальних даних // Збірник наукових праць ДонНТУ серії "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". — 2009. — Вип. 10 (153). — С. 224 — 229.
4. Дивак М. П., Франко Ю. П. Оцінка можливостей МГЕС «Топольки» методами аналізу інтервальних даних // Збірник наукових праць ДонНТУ серії "Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка". — 2009. — Вип. 10 (153). — С. 274 — 277.
5. Теория игр: Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М.: Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. — 304 с.: ил.
6. Романюк В. В. Метод реалізації принципу оптимальності у матричних іграх без сідлової точки // Вісник НТУ "ХПІ". Тематичний випуск: Інформатика та моделювання. — Харків: НТУ "ХПІ", 2008. — № 49. — С. 146 — 154.
7. Романюк В. В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з порожньою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з відомою кількістю партій гри // Наукові вісті НТУУ "КПІ". — 2009. — № 2. — С. 45 — 52.
8. Романюк В. В. Метод реалізації оптимальних змішаних стратегій у матричній грі з пустою множиною сідлових точок у чистих стратегіях з невідомою кількістю партій гри // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2009. — № 2. — С. 224 — 229.
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Ball_(mathematics)
10. http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_space
11. http://en.wikipedia.org/wiki/Metric_map
12. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1968. — 496 с.
13. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. — М.: Мир, 1969. — 448 с.
14. Методы решения задач по функциональному анализу: Учеб. пособие / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К.: Вища школа, 1990. — 479 с.: ил.
15. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. — 3-е изд., испр. — Новосибирск: Изд-во Института математики, 2000. — 336 с.

Надійшла 23.5.2010 р.