

6. Stock J. H., Watson M.W., Business cycle fluctuations in u.s. macroeconomic time series (1998)
7. Todd R.M., Periodic linear-quadratic models of seasonality, J. Econom. Dyn. Control 14 (1990) 763-796
8. Hylleberg S., Seasonal Adjustment (2006)
9. Ghysels E., Hall A., Lee H.S., On periodic structures and testing for seasonal unit roots, J. Amer. Statist. Assoc. 91 (1996) 1551-1559.
10. Ghysels E., On the periodic structure of the business cycle (1992).
11. Лупенко С. Математичне моделювання циклічних економічних явищ на базі циклічного випадкового процесу для задач автоматизованого аналізу та прогнозу / С. Лупенко, А. Горкуненко // Матеріали всеукраїнської наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя, 13-14 травня 2009. – 468 с.
12. Лупенко С.А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С.А. Лупенко // Электронное моделирование. Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова. – Том 28. – № 4. – 2006. – С. 29-45.
13. Лупенко С.А. Статистичні методи обробки циклічного випадкового процесу / С.А. Лупенко // Електроніка та системи управління. Національний авіаційний університет. – № 2 (8). – 2006. – С. 59-65.
14. Лупенко С. А. Завдання інтерполяції функції ритму циклічної функції з відомою зонною структурою / С. А. Лупенко // Електроніка та системи управління. Національний авіаційний університет. – 2007. – № 2 (12). – С. 27– 35.

Надійшла 14.5.2010 р.

УДК 621.372.061.

А.Г. ЛОЖКОВСЬКИЙ

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

ІМОВІРНІСТЬ ВТРАТ В СИСТЕМІ З ГІПЕРЕКСПОНЕНТНИМ ПОТОКОМ ВИМОГ

Запропонована апроксимація імовірнісної функції розподілу станів повнодоступної системи з втратами, яка обслуговує гіперекспонентний потік вимог з постійною їх тривалістю усіченим нормальним законом. На основі даної апроксимації запропонована формула розрахунку ймовірності втрати вимоги.

The approximation of the probability state redistribution function of the full accessible system with losses is proposed, which is attended to the hyper exponential stream of the requests with constant duration cut-down normal law. The formula is proposed based on given approximation for calculation of the request losses probability.

Ключові слова: гіперекспонентний потік, імовірнісна функція розподілу, усічений нормальний закон.

Вступ

Теоретичні дослідження систем розподілу інформації (СРІ) спираються на їх узагальнену математичну модель. Для повного опису СРІ необхідно вказати імовірнісні процеси, що описують вхідний потік вимог, структуру системи та дисципліну обслуговування. Очевидно, що оцінка якості обслуговування (QoS) або пропускної здатності СРІ потребує врахування всіх цих елементів її моделі. Найбільш складним при цьому є врахування математичної моделі вхідного потоку вимог. Саме з цієї причини весь пакет задач аналізу й синтезу СРІ для будь-яких із її схем та дисциплін обслуговування вирішено тільки для випадку найпростішої моделі трафіка – моделі пуассонівського потоку. Для цієї моделі відомі всі аналітичні формули розрахунку основних характеристик якості обслуговування систем розподілу інформації [1]. Незалежно від способу надання математичної моделі потоку вимог вибрана модель обов'язково має бути адекватною реальним потокам трафіка телекомунікаційних мереж, оскільки від цього суттєво залежить точність розрахунку характеристик якості обслуговування та пропускної здатності СРІ при їх аналізі, синтезі та оптимізації.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Основні параметри трафіка – це інтенсивність навантаження Λ (середня кількість вимог, що надійшли до системи за середню тривалість обслуговування) та дисперсія інтенсивності навантаження σ^2 , яка вказує на ступінь нерівномірності випадкової кількості вимог відносно середнього значення. Математичною моделлю трафіка є імовірнісна функція розподілу випадкової кількості вимог i за середню тривалість обслуговування t .

У телефонних мережах з єдиною послугою телефонного зв'язку трафік є однорідним і його математична модель може бути наближена відомою функцією Пуассона. При цьому параметри трафіка Λ та σ^2 досить близькі або однакові, тобто $\sigma^2 = \Lambda$. Інтегральний характер мультисервісних мереж з розширеним спектром послуг, що надаються зумовлює різномірність трафіка, яка сильно змінює співвідношення цих параметрів та його математичну модель.

У математичній моделі пуассонівського потоку вимог інтервал часу між вимогами з розподілений за експонентним законом, а випадкова кількість вимог за середню тривалість обслуговування розподілена за законом Пуассона. Тому ступінь відхилення інших потоків від моделі пуассонівського потоку можна

оцінити за коефіцієнтом варіації:

$$v_z = \frac{\sigma_z^2}{\bar{z}}, \quad (1)$$

імовірнісної функції розподілу інтервалу z , або за коефіцієнтом скупченості інтенсивності навантаження (підфактором трафіка) S , який визначається як співвідношення перших двох моментів випадкової кількості вимог за середню тривалість обслуговування:

$$S = \frac{\sigma^2}{\Lambda} \quad (2)$$

Для експонентного розподілу $v_z \equiv 1$ і тому для пуассонівського потоку, відповідно, $S \equiv 1$. Очевидно, що чим більшим буде розкид інтервалу z (тобто v_z), тим більшим буде й скупченість інтенсивності навантаження S .

Реальним потокам мультисервісних мереж зв'язку властива підвищена нерівномірність трафіка, за якої коефіцієнт варіації $v_z > 1$ та підфактор $S = 2 \dots 10$. Іноді S може бути й більше 10, але це відбувається або за межами години найбільшого навантаження, або на невеликих пучках каналів [2]. Оскільки модель пуассонівського потоку не завжди адекватно описує реальні потоки вимог телекомунікаційних мереж, то необхідно вибирати інші розподіли для їхнього опису, що забезпечують краще узгодження з результатами вимірів. Заміна експонентного розподілу будь-якими іншими функціями значно ускладнює математичну модель, а складні моделі не завжди піддаються аналітичному розв'язанню.

Потоки вимог у мультисервісних мережах зв'язку формуються множиною джерел з різною питомою інтенсивністю навантаження (різномірні потоки). В процесі створення потоку вимог беруть участь джерела, що належать до тієї або іншої групи споживачів сервісів з близькими інтенсивності навантаження. Значення інтенсивності результуючого потоку вимог в кожному мить залежить від того, до якої групи за інтенсивністю навантаження належить джерело і яке співвідношення чисельності цих джерел з іншими. Отже, більш адекватно описати такий потік або розподіл інтервалів часу між вимогами можна не експонентним розподілом (M), а їхньою сумішшю – гіперекспонентним розподілом (NM):

$$P(z) = \sum_{i=1}^k p_i \lambda_i e^{-\lambda_i z} \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^k p_i = 1. \quad (3)$$

Модель потоку з гіперекспонентним розподілом k -го порядку забезпечує діапазон значень коефіцієнта варіації в межах $1 \leq v_z < \infty$. Даному розподілу відповідає перервний пуассонівський потік k -го порядку. Практичні виміри свідчать, що реальні потоки достатньо апроксимувати з $k = 2$. Цей розподіл описує більший розкид величини інтервалу часу між вимогами z і забезпечує значення коефіцієнтів $v_z \geq 1$, а це, у свою чергу, дозволяє описувати реальні потоки з дисперсією інтенсивності навантаження σ^2 , що перевищує її математичне сподівання Λ від одиниць до десятків разів.

Експонентний інтервал часу між вимогами призводить до пуассонівського розподілу кількості вимог, що надходять до системи за середню тривалість їх обслуговування. Гіперекспонентний інтервал часу між вимогами призводить до такого розподілу кількості вимог, який достатньо точно апроксимується нормальним (Гаусса) законом. Отже для реальних потоків вимог мультисервісних мереж зв'язку адекватною є модель з гіперекспонентним розподілом інтервалу часу між вимогами, що апроксимується нормальним розподілом інтенсивності навантаження Λ , і при цьому підфактор інтенсивності навантаження $S > 1$.

Викладення основного матеріалу статті

Визначення основних характеристик якості обслуговування будь-якої системи ґрунтується на визначенні імовірнісної функції розподілу її станів P_j , де стан системи – це поточна кількість серверів j , в яких обслуговуються вимоги, а P_j – імовірність стану j . За гіперекспонентного потоку та постійної тривалості обслуговування умовне позначення математичної моделі системи розподілу інформації з m серверами запишеться так: $NM/D/m$. В умовах необмеженої кількості серверів (модель $NM/D/\infty$) вимоги обслуговуються за дисципліною без втрат. За постійної тривалості обслуговування t , коли нема втрат, властивості потоку звільнень збігаються із властивостями потоку надходження вимог, тому що відбувається тільки зсув у часі на величину t між моментом надходження вимоги та моментом її виходу із системи (завершення обслуговування). При цьому стани системи повністю визначаються властивостями потоку вимог, а імовірнісні функції розподілу кількості вимог у системі j і вхідної кількості вимог i за час t , повністю збігаються. За нормального розподілу кількості вимог, що надходять в систему за середню тривалість їх обслуговування, нормальна функція розподілу потоку вимог P_i визначить функцію розподілу станів системи P_j :

$$P_i = P_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(i-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4)$$

У разі обмеженої до m кількості серверів простір станів системи буде також обмеженим від 0 до m . У цьому випадку моделі $NM/D/m$ імовірнісна функція розподілу станів системи може бути апроксимована усіченим нормальним законом [3, с. 429], що визначає імовірності станів системи P_j в межах $0 \leq j \leq m$:

$$P_j = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(j-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}, \quad (5)$$

де

$$A = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_0^{m-\Lambda} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt - \int_0^{0-\Lambda} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} dt \right]}, \quad (6)$$

Якщо $m = \infty$, то $A = 1$ і тому (4) та (5) збігаються. Крім того для (4) та (5) має виконуватись

$$\sum_{i=0}^m P_j = 1. \quad (7)$$

На рис. 1 наведені графіки апроксимації функції розподілу станів системи, яка обслуговує потік вимог з параметрами: інтенсивність $\Lambda = 100$ Ерл та дисперсія $\sigma^2 = 400$, тобто пікфактор $S = 4$. Пунктирною лінією показана система з необмеженою кількістю серверів, де $m = \infty$, безперервною – система з $m = 125$, штриховою – з $m = 115$ та штрихпунктирною – з $m = 110$ серверів.

За допомогою імітаційного алгоритму [4] перевірено точність даної апроксимації усіченим нормальним законом. В широкому діапазоні зміни параметрів трафіка Λ і σ^2 та кількості серверів m відносна похибка запропонованого підходу не перевищує 1% для всіх значень P_j , окрім $P_{j=m}$. Процес обслуговування вимог у системі є ергодичним або не залежить від початкового стану системи за умови $m > \Lambda$ [1]. Якщо кількість серверів m суттєво перевищує значення інтенсивності Λ , то у даному випадку початковий стан системи не дуже впливає на функцію розподілу станів системи.

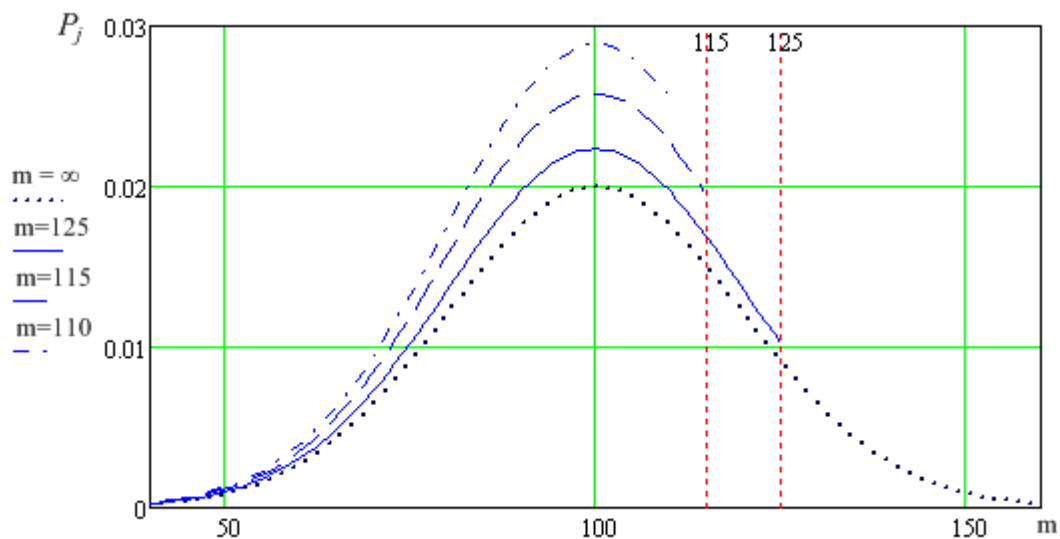


Рис. 1. Апроксимація станів системи усіченим нормальним законом

При зменшенні m початковий стан системи виявляє свій найбільший вплив саме на ймовірність $P_{j=m}$. Це відбувається через „скупченість” потоку вимог реального трафіка, яка впливає з його властивості $\sigma^2 > \Lambda$. Саме у випадках зайнятості всіх серверів системи, при звільненні будь-якого з серверів він тут же займається черговою вимогою, яка в цей час надходить до системи через скупченість вимог на даному інтервалі часу, а це підтримує систему більш тривалий час у стані „насичення”, тобто у стані $P_{j=m}$ і реально дана ймовірність є декілька більшою.

Ймовірність зайнятості всіх серверів системи $P_{j=m}$ визначає частку часу, протягом якої є потенційна можливість втрати вимоги. Для пуассонівського потоку, де $\sigma^2 = \Lambda$ і $S = 1$, ймовірність $P_{j=m}$ співпадає з ймовірністю втрати вимоги P_B . Але у випадку гіперекспонентного потоку, де $\sigma^2 > \Lambda$, з урахуванням вищенаведеного впливає, що ймовірність втрати вимоги P_B більше ймовірності зайнятості всіх серверів системи $P_{j=m}$ у S разів, тобто пропорційно коефіцієнту скупченості інтенсивності навантаження. Таким чином, ймовірність втрати вимоги P_B визначиться шляхом множення (5) на (2) і для стану $j = m$ остаточно отримуємо:

$$P_B = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{m-\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\Lambda}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(m-\Lambda)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{\Lambda}, \quad (8)$$

Значення функції Лапласа (інтеграл імовірності), що використовується в знаменнику формули (8), наведено в математичних довідниках та підручниках, наприклад в [5, с. 412].

Якщо зручніші розрахунку через функцію помилок (функцію Крампа) $\text{erf}(x)$, то для функції Лапласа можна показати, що

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} x\right), \quad (9)$$

і тоді після нескладного перетворення формули (8) отримуємо:

$$P_B = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{\Lambda} e^{-\frac{(m-\Lambda)^2}{2\sigma^2}}}{\text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{m-\Lambda}{\sigma}\right) + \text{erf}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\Lambda}{\sigma}\right)}, \quad (10)$$

Висновки

За умови $\sigma^2 \equiv \Lambda$ закони Гаусса та Пуассона досить близько збігаються вже при $\Lambda > 20$. Через те запропонований усічений нормальний розподіл (3) дає значення ймовірностей станів системи, які з такою ж точністю співпадають зі значеннями, що отримуються за встановленим для цього випадку розподілом Ерланга. За цих же умов відмінність значень, які отримуємо з (6) та визначеної для цього випадку *B*-формули Ерланга, не перевищує 5 %.

За розподілом Ерланга визначаються стани системи типу *M/G/m* з експонентним розподілом інтервалу часу між вимогами потоку, для якого пікфактор трафіка $S = 1$. Гіперекспонентний розподіл за $k = 1$ обертається в експонентний і тому він є його узагальненням. Але на відміну від розподілу Ерланга, який дійсний за будь-якого (*G*) закону розподілу тривалості обслуговування вимог, нормальний усічений розподіл станів системи при $S > 1$ справедливий тільки для моделі *HM/D/m*, тобто за постійної тривалості обслуговування.

Регулярним законом розподілу тривалості обслуговування (постійна тривалість) може бути описана робота керуючих пристроїв вузлів комутації або тривалість оброблення пакетів в пакетних мережах передавання даних, де потоки не є пуассонівськими. Саме для цих випадків застосування запропонованої апроксимації буде адекватним.

Література

1. Шнепс М.А. Системы распределения информации. Методы расчета : [справ. пособие] / Шнепс А.М. // М. : Связь, 1979. – 344 с.
2. Захарченко Н.В. Методы расчёта телекоммуникационного оборудования в условиях реального потока вызовов / Н.В. Захарченко, А.Г. Ложковский // Вісник Українського будинку економічних та наукових знань. – 2004. – № 4. – С. 102-109.
3. Заездный А.М. Основы расчетов по статистической радиотехнике / Заездный А.М. // М. : Связь, 1969. – 448 с.
4. Ложковский А.Г. Статистическое моделирование полнодоступного пучка с потерями / А.Г. Ложковский // Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова. – 2003. – № 1. – С. 75-82.
5. Венцель Е.С. Прикладные задачи теории вероятностей / Е.С. Венцель, Л.А. Овчаров // М. : Радио и Связь, 1983. – 416 с.

Надійшла 26.5.2010 р.