

Малиновский // Вестник машиностроения. – 1984. – № 6. – С. 36-40.

7. Малиновский В. А. Стальные канаты. Часть 1: Некоторые вопросы технологии, расчета и проектирования / Малиновский В. А. – Одесса: Астропринт, 2001. – 188 с.

8. Глушко М. Ф. Стальные подъемные канаты / Глушко М. Ф. – К.: Техніка, 1966. – 327 с.

9. Чаюн И. М. Несущая способность подъемных канатов и лент / Чаюн И. М. – Одесса: Астропринт, 2003. – 236 с.

10. Проценко В. О. Напряжки дослідження сталевих канатів для оцінки характеристик пружно-компенсуючих канатних муфт / В. О. Проценко // Перспективные научные исследования '2010: материалы 6-й Междунар. науч. – практ. конф. – София: «Бял ГРАД-БГ» ООД, 2010. – Т. 14. – С. 10– 14.

11. Поляков В. С. Исследование брусковой муфты в условиях статического нагружения / В. С. Поляков, Л. С. Лефтеров // Труды ленинградского ордена Ленина политехнического института имени М. И. Калинина. – 1965. – № 254. – С. 19– 27.

12. Прикладная механика. Лабораторный практикум / [В. Ф. Мальцев, И. Ф. Сорока, В. И. Крупский и др.]. – К. – Одесса: Вища школа, 1988. – 176 с.

Надійшла 21.9.2010 р.

УДК 621.81:(621.891+620.194)

В.С. КУРСКОЙ І. М. ПАСТУХ

Хмельницький національний університет

## РЕЗУЛЬТУЮЧА СИЛА ПРУЖНОГО КОНТАКТУ МІКРОЕЛЕМЕНТІВ ПОВЕРХНІ

*Визначена сила пружного контакту двох мікроелементів поверхні, виходячи з моделі еліптичних параболоїдів, кутові параметри просторової орієнтації вектора сили.*

*Estimated force resilient contact of two microelements of surface, coming the model of elliptic paraboloids from, angular parameters orientations spatial vector of force.*

Ключові слова: пружний контакт, рівнодійна сила.

### Вступ та постановка задачі

Однією з найсуттєвіших складових розв'язку задачі пружного контакту двох мікроелементів на базі моделі еліптичних параболоїдів [1–3] є визначення результуючої сили пружної взаємодії, що дозволить в майбутньому не лише аналізувати характеристики міцності та жорсткості реального контакту, але й прогнозувати його поведінку в умовах динамічного навантаження. Аналітичні залежності, котрі в повній мірі характеризують вектор рівнодійної контактних напружень як за модулем, так і за орієнтацією, в подальшому можуть бути використаними для вирішення ймовірнісної задачі розрахунку сукупної сили пружного контакту в нормальному та тангенціальному напрямках. В свою чергу, наявність подібних матеріалів відкриває шлях до аналізу зміни тангенційної жорсткості стику, тобто до прогнозування працездатності фретинг-контакту аж до стану його розкриття.

### Задача визначення модуля сили пружного контакту

Для спрощення розв'язку задачі [4], не порушуючи умов контакту, доцільно розташувати центр параболоїда матриці так, щоб він співпадав з початком координат, а його головні осі співпадали з осями координат. Тоді рівняння параболоїда матриці матиме канонічний вигляд, в той час як параболоїд пуансона буде не лише повернуто відносно системи координат на певний кут  $\alpha_p$ , але й зміщено в основній системі координат з відповідними поправками до напрямків прикладення сил.

Розв'язок задачі контактування починається з перевірки наявності перетину конкретної пари мікроелементів профілю, яка виконується виходячи з міркувань про цілком визначені їх геометричні характеристики – висота та величина ексцентриситету. Якщо на заданому інтервалі координат  $Z$ , які відповідають висотам параболоїдів, система рівнянь, що описують ці параболоїди, не має спільного розв'язку, то точок перетину немає. У випадку наявності точок перетину наступним кроком буде визначення лінії перетину фігур.

Лінія взаємного проникнення двох еліптичних параболоїдів визначається розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} z = \frac{(x)^2}{a} + \frac{(y)^2}{b} \\ z = -\frac{(x_\alpha - \Delta x)^2}{c} - \frac{(y_\alpha - \Delta y)^2}{d} + \Delta z \end{cases}, \quad (1)$$

де  $a, b, c, d$  – коефіцієнти відповідно матриці та пуансона,

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$  – зміщення пуансона відносно матриці по осях  $x, y$  та  $z$  відповідно,

$x_\alpha = x \cdot \cos \alpha_p - y \cdot \sin \alpha_p$  – рівняння координат  $x$  пуансона в новій системі з урахуванням кута повороту пуансона,

$y_\alpha = x \cdot \sin \alpha_p + y \cdot \cos \alpha_p$  – рівняння координат  $y$  пуансона в новій системі з урахуванням кута повороту пуансона.

Схема контакту та елементів тіл, котрі контактують, показана на рис. 1 і 2.

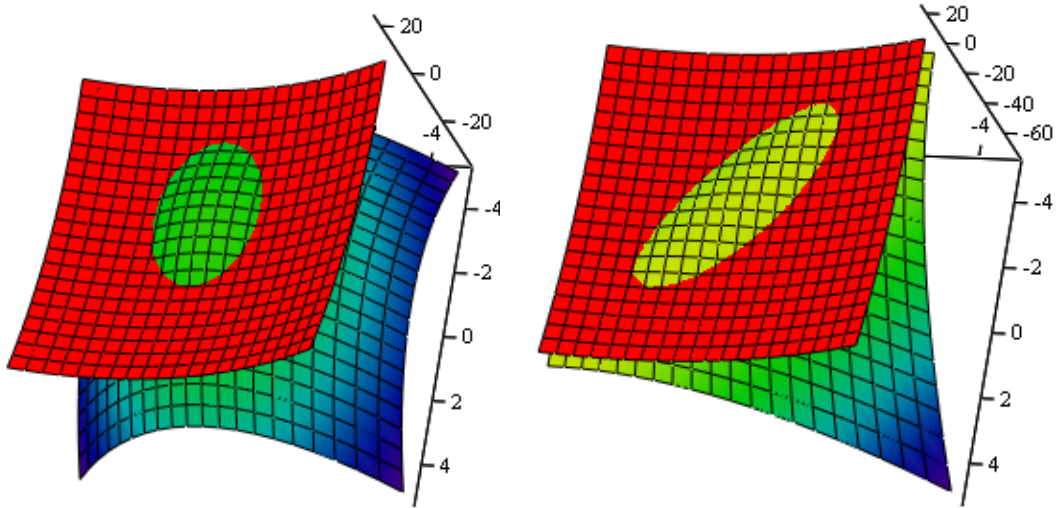


Рис. 1. Загальний вигляд тривимірного представлення контакту на основі моделі еліптичного параболоїда для відносного кута повороту  $0^\circ$  та  $45^\circ$  відповідно

Розв'язання системи рівнянь дозволяє отримати залежність для визначення абсцис, яка в загальному вигляді може бути представлена у вигляді:

$$A \cdot x^2 + B \cdot x + C \cdot y^2 + D \cdot y + G \cdot x \cdot y + F = 0, \quad (2)$$

де константи:

$$A = \frac{1}{a} - \frac{1}{d} - \frac{\cos(\alpha_p)^2}{c} + \frac{\cos(\alpha_p)^2}{d}, \quad (3)$$

$$B = \frac{2 \cdot \Delta x \cdot \cos(\alpha_p)}{c} + \frac{2 \cdot \Delta y \cdot \cos(\alpha_p)}{d}, \quad (4)$$

$$C = \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + \frac{\cos(\alpha_p)^2}{c} - \frac{\cos(\alpha_p)^2}{d}, \quad (5)$$

$$D = -\frac{2 \cdot \Delta x \cdot \sin(\alpha_p)}{c} - \frac{2 \cdot \Delta y \cdot \cos(\alpha_p)}{d}, \quad (6)$$

$$G = \frac{2 \cdot \cos(\alpha_p) \cdot \sin(\alpha_p)}{c} + \frac{2 \cdot \cos(\alpha_p) \cdot \sin(\alpha_p)}{d}, \quad (7)$$

$$F = -\frac{\Delta x^2}{c} - \frac{\Delta y^2}{d} - \Delta z. \quad (8)$$

Тоді:

$$y(x) = -\frac{D + G \cdot x \pm \sqrt{D^2 + 2 \cdot G \cdot x + G^2 \cdot x^2 - 4 \cdot A \cdot C \cdot x^2 - 4 \cdot B \cdot C \cdot x - 4 \cdot C \cdot F}}{2 \cdot C} \quad (9)$$

Область визначення отриманої функції, а отже і область перетину фігур визначається розв'язком нерівності, з урахуванням, що всі сталі коефіцієнти рівнянь еліптичних параболоїдів більші нуля:

$$D^2 + 2 \cdot G \cdot x + G^2 \cdot x^2 - 4 \cdot A \cdot C \cdot x^2 - 4 \cdot B \cdot C \cdot x - 4 \cdot C \cdot F \geq 0. \quad (10)$$

В загальному вигляді розв'язок отриманого квадратного тричлена має вигляд:

$$x = \frac{-(2 \cdot D \cdot G - 4 \cdot B \cdot C) \pm \sqrt{(2 \cdot D \cdot G - 4 \cdot B \cdot C)^2 - 4 \cdot (G^2 - 4 \cdot A \cdot C) \cdot (D^2 - 4 \cdot C \cdot F)}}{2 \cdot (G^2 - 4 \cdot A \cdot C)} \quad (11)$$

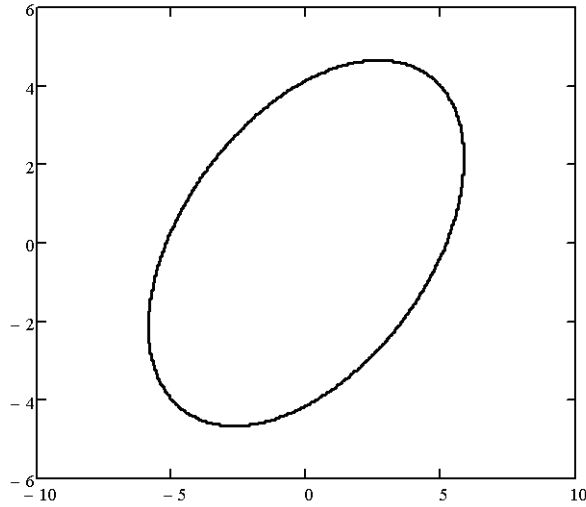


Рис. 2. Основа еліптичного параболоїда в системі координат  $XOY$ , повернутого на кут  $\alpha_p$

З рівняння (11) визначаються граничні значення абсцис перетину  $[x_{\min}; x_{\max}]$ .

Аналогічно визначається діапазон ординат:

$$x(y) = -\frac{B + G \cdot y \pm \sqrt{B^2 + 2 \cdot B \cdot G \cdot y + 2 \cdot F^2 \cdot y^2 - 4 \cdot A \cdot C \cdot y^2 - 4 \cdot A \cdot D \cdot y - 4 \cdot A \cdot F}}{2 \cdot A} \quad (12)$$

Область визначення отриманої функції, а отже і область перетину фігур визначається з нерівності, з урахуванням, що всі сталі коефіцієнти рівнянь еліптичних параболоїдів більші нуля:

$$B^2 + 2 \cdot B \cdot G \cdot y + 2 \cdot F^2 \cdot y^2 - 4 \cdot A \cdot C \cdot y^2 - 4 \cdot A \cdot D \cdot y - 4 \cdot A \cdot F \geq 0 \quad (13)$$

$$y = \frac{-(2 \cdot B \cdot G - 4 \cdot A \cdot D) \pm \sqrt{(2 \cdot B \cdot G - 4 \cdot A \cdot D)^2 - 4 \cdot (G^2 - 4 \cdot A \cdot C) \cdot (B^2 - 4 \cdot A \cdot F)}}{2 \cdot (G^2 - 4 \cdot A \cdot C)} \quad (14)$$

З рівняння (14) визначаються граничні значення ординат перетину  $[y_{\min}; y_{\max}]$

Загальний об'єм зони перетину:

$$V = \iint_D (f_1(x, y) - f_2(x, y)) dx dy, \quad (15)$$

де  $D$  – область перетину параболоїдів, межі якої визначаються як  $[x_{\min}, x_{\max}]$  та  $[y_{\min}, y_{\max}]$  для абсцис та ординат відповідно.

Тоді з урахуванням визначених меж інтегрування формула для об'єму зони взаємного впровадження буде виглядати наступним чином:

$$V\Delta = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{(x \cdot \cos(\alpha) - y \cdot \sin(\alpha) - \Delta x)^2}{c} + \frac{(x \cdot \sin(\alpha) - y \cdot \cos(\alpha) - \Delta y)^2}{d} + \Delta z - \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \right) dx dy. \quad (16)$$

Величина загальних відносних деформацій:

$$\varepsilon_{\Sigma} = \frac{V\Delta}{V1 + V2}, \quad (17)$$

де  $V1$  та  $V2$  – об'єми еліптичних параболоїдів між площинам основ (рис. 3).

З рис. 3 об'єми фігур визначаються наступним чином:

$$V_1 = \int_{-\sqrt{a \cdot h}}^{\sqrt{a \cdot h}} \int_{\sqrt{b \cdot h}}^{\sqrt{b \cdot h}} \left( \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} \right) dx dy \rightarrow \frac{8 \cdot h \sqrt{a \cdot h} \sqrt{b \cdot h}}{3}, \quad (18)$$

$$V_2 = \int_{-\sqrt{c \cdot h}}^{\sqrt{c \cdot h}} \int_{\sqrt{d \cdot h}}^{\sqrt{d \cdot h}} \left( \frac{x^2}{c} + \frac{y^2}{d} \right) dx dy \rightarrow \frac{8 \cdot h \sqrt{c \cdot h} \sqrt{d \cdot h}}{3}, \quad (19)$$

де  $h$  – висота параболоїда.



Рис. 3. До визначення величини відносних деформацій

**Напрямок сили в контакті**

Для визначення напрямку вектору рівнодійної сил необхідно визначити реальну поверхню контакту з урахуванням пружних характеристик мікроелементів. Для цього розглянемо довільне січення зони перетину площиною, паралельною площині XOZ (рис. 4)

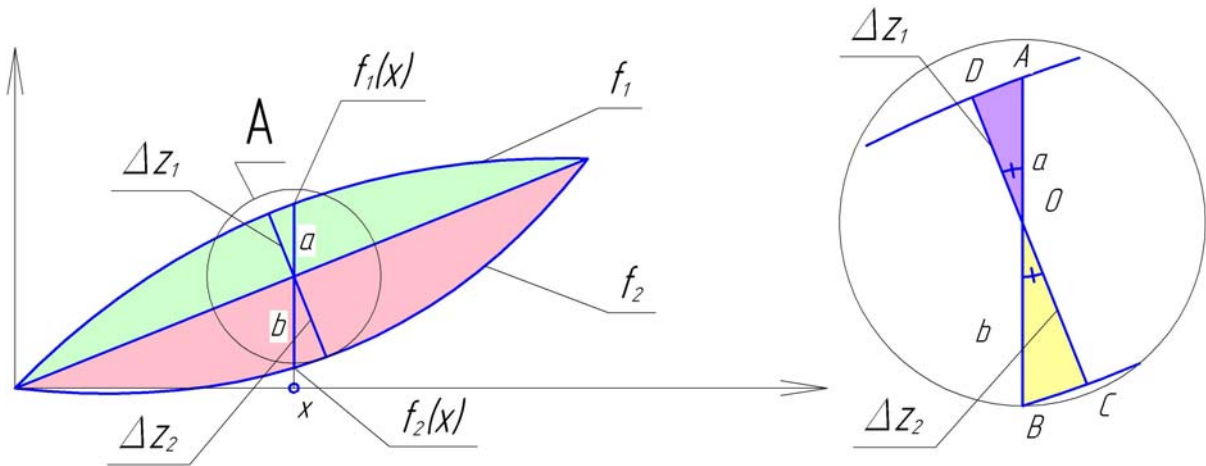


Рис. 4. Зона перетину еліптичних параболоїдів

Приймаючи, що деформація зони контактування є досить малою, а отже і відрізки  $BC$  та  $AD$  є наближеними до прямих, вводимо співвідношення:

$$\frac{a}{b} = \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2}, \tag{20}$$

Звідки:

$$\frac{a}{b} = \frac{\Delta z_1}{\Delta z_2} = \frac{F/E_1}{F/E_2} = \frac{E_2}{E_1}, \tag{21}$$

З другого боку, з рис. 4:

$$a + b = f_1(x, y) - f_2(x, y). \tag{22}$$

Підставляючи значення  $b$  з виразу (20) в (21) та виконуючи відповідні перетворення, отримаємо рівняння, що описує поверхню розподілу еліптичних параболоїдів:

$$f_R(x, y) = \frac{E_2 \cdot f_2(x, y) + E_1 \cdot f_1(x, y)}{E_1 + E_2}. \quad (23)$$

Загальний вигляд отриманих поверхонь представлено на рис.5.

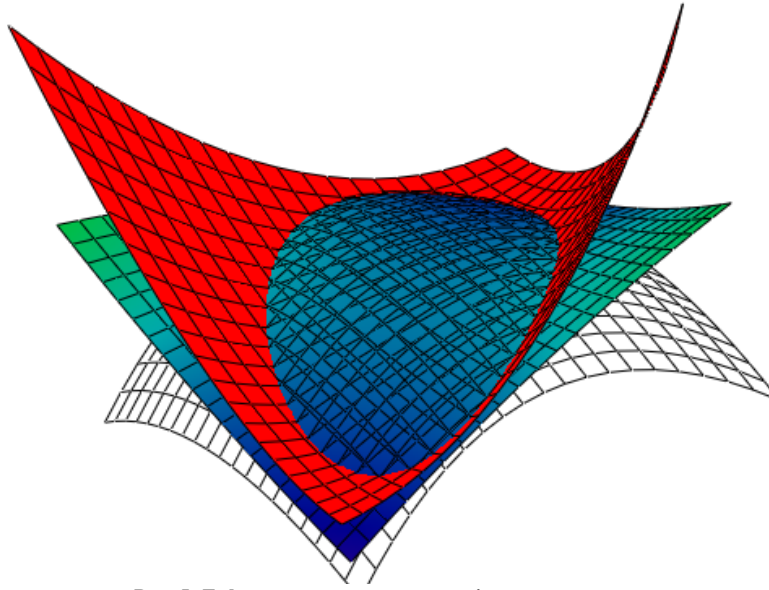


Рис. 5. Деформована поверхня розділу зони контакту

Для визначення результуючого вектора розглянемо контакт двох параболоїдів, представивши його як суму дискретних контактів.

Результуючий вектор взаємодії може бути представлений у вигляді:

$$\vec{F}_r = |F| \cdot \vec{N}, \quad (24)$$

де  $|F|$  – модуль сили пружної взаємодії, який визначається з геометричних та пружних характеристик матеріалу;

$\vec{N}$  – рівнодійний нормальний одиничний вектор в даній точці.

Визначення модулю сили в контакті виконуємо за наступною формулою:

$$|F| = E \cdot \varepsilon \cdot S, \quad (25)$$

де  $S$  – площа поверхні, що деформується, яка визначається за формулою:

$$S = \int_D \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2} dx dy, \quad (26)$$

$$S = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2} dx dy. \quad (27)$$

Величина відносних деформацій для конкретного параболоїда визначається як:

$$\varepsilon_i = \frac{V_i \Delta}{V_i}, \quad (28)$$

де  $i$  – індекси 1 або 2 відповідно для матриці і пуансона;

$V_i \Delta$  – об'єм частини параболоїда, що деформується, в перетині, який визначається як різниця об'ємів загальної зони перетину та зони, що відсікається поверхнею розподілу:

$$V = \iint_D (f_1(x, y) - f_R(x, y)) dx dy. \quad (29)$$

Фактором детермінації дискретного одиничного вектора є кути відносно осей координат. Визначення кута нахилу результуючого вектору відносно системи координат виконується визначенням нормального результуючого вектора та знаходженням кутів між ним та осями координат.

Нормальний вектор в заданій точці визначеної поверхні розподілу має наступний вигляд:

$$\vec{N}_i = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f_R(x_i, y_i) \\ \frac{d}{dy} f_R(x_i, y_i) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

Тоді результуючий вектор може бути представлений у формі:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dx} f_R(x, y) \right) dx dy \\ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dy} f_R(x, y) \right) dx dy \\ \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx dy \end{pmatrix} \quad (31)$$

А відповідні кути можуть бути знайдені за наступними формулами:

$$\alpha = \arccos \left( \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dx} f_R(x, y) \right) dx dy}{\sqrt{\left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dx} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dy} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx dy \right)^2}} \right), \quad (32)$$

$$\beta = \arccos \left( \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dy} f_R(x, y) \right) dx dy}{\sqrt{\left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dx} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dy} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx dy \right)^2}} \right), \quad (33)$$

$$\gamma = \arccos \left( \frac{\int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx dy}{\sqrt{\left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dx} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left( \frac{d}{dy} f_R(x, y) \right) dx dy \right)^2 + \left( \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} dx dy \right)^2}} \right). \quad (34)$$

### Висновок

Визначена сила пружного контакту двох мікроелементів поверхні, виходячи з моделі еліптичних параболоїдів, кутові параметри просторової орієнтації вектора сили.

### Література

1. Пастух І. М. Класифікація та аналіз з'єднань деталей машин з позицій фретингостійкості / І. М. Пастух, В. С. Курської // Вісник Хмельницького національного університету. – 2009. – № 5. – С. 20–23.
2. Пастух І. М. Методика ідентифікації поверхонь фретинг-контакту / І. М. Пастух, В. С. Курської // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – № 1. – С. 47–50.
3. Пастух І. М. Модель контакту мікроелементів поверхонь / І. М. Пастух, В. С. Курської // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – № 2. – С. 23–30.
4. Пастух І. М. Формування моделі поверхні контакту та її характеристик / І. М. Пастух, В. С. Курської // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – № 3. – С. 11–15.

Надійшла 21.9.2010 р.