Полученные аналитические зависимости могут быть использованы при прогнозировании работоспособности гидравлических опор содержащих резиновые элементы.

В дальнейшем необходимо исследовать влияние частоты колебаний на износ элементов опоры.

Литература

1. Пат. 60534 МКИ F16F19/08. Гідравлічний пружний елемент / Стрельбіцький В.В., Кіницький Я.Т., Нестер А.А. (Україна). – Заявл. 21.11.2002; Опублік. 15.10.2003. Бюл. № 10.

2. Истирание резин [Бродский Г.И., Евстратов В.Ф., Сахновский Н.Л., Слюдиков Л.Д.]. – М.: Химия, 1975. – 240 с.

3. Крыжановский В.К. Технические свойства полимеров / Крыжановский В.К., Буров В.В., Паниматченко А.Д.. – СПб.: Профессия, 2005. – 248 с.

4. Ефремов Л.В. Практик инженерного анализа надежности судовой техники / Ефремов Л.В. – Л.: Судостроение, 1980. – 176 с.

Надійшла 10.9.2010 р.

УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

ОЦІНЮВАННЯ ГЛОБАЛЬНОГО І ЛОКАЛЬНИХ НАСЛІДКІВ ЗАСТОСУВАННЯ ГРАВЦЕМ ОПТИМАЛЬНОЇ СТРАТЕГІЇ В АНТАГОНІСТИЧНІЙ ГРІ ЯК МОДЕЛІ РЕАЛІЗАЦІЇ СТОХАСТИЧНОГО ПАРАМЕТРА З НЕВІДОМИМ ІМОВІРНІСНИМ РОЗПОДІЛОМ

Представлено концепцію оцінювання наслідків застосування гравцем його оптимальної стратегії при оптимальній стратегії в іншого гравця в антагоністичній грі. Одну частину наслідків класифіковано як глобальні, де очікуваний виграш першого гравця інтегрується за усіма можливими стратегіями. Решту наслідків класифіковано як локальні, де очікуваний виграш першого гравця інтегрується за деякою підмножиною усіх стратегій.

There has been represented the conception of evaluating aftereffects of the player application of its optimal strategy by the optimal strategy at the other player in the antagonistic game. One part of aftereffects has been classified as global, where the first player expected payoff is integrated over all possible strategies. The rest of aftereffects has been classified as local, where the first player expected payoff is integrated over some subset of all strategies.

Ключові слова: антагоністична гра, математична модель, оптимальна стратегія, наслідок, стохастичний параметр, функціональний інтеграл.

Постановка й актуальність проблеми у загальному виді та її зв’язок з важливими науково-практичними завданнями

Математичні моделі відіграють виключно важливу роль у дослідженні, прогнозуванні й оптимізації явищ та процесів сучасного світу. А оцінювання параметрів математичних моделей є характерним практично для кожного об’єкта моделювання. Стохастичність або невизначеність параметра моделі може бути природним чином усунена з використанням імовірнісного розподілу на множині усіх його значень. Проте зазвичай такий розподіл не є певним або ж про нього взагалі нічого невідомо. Тоді усунення стохастичності або невизначеності параметра моделі може здійснюватись за допомогою ігрової антагоністичної моделі, де у ролі другого гравця виступає особа, що приймає рішення про конкретне значення параметра для його разової підстановки у вихідну математичну модель. Першого гравця у такій антагоністичній моделі уособлюють випадкові природні обставини (обставини, власне, пов’язані безпосередньо з об’єктом моделювання), котрі, зрозуміло, передбачити або вивчити можливо лише при багатократному повторенні модельованого явища. Описана проблематика має ґрунтовне наукове завдання, котре полягає у розвитку концепції стохастичного моделювання в умовах часткової або повної невизначеності параметрів об’єкта моделювання.

Аналіз останніх досліджень і публікацій за предметом дослідження та визначення питань, що потребують вирішення

Деякі аспекти прийняття оптимального рішення щодо значень стохастичного параметра були розглянуті у роботах [1, 2]. Модель практичної реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри у формі антагоністичної гри представлено в [1], де доведено теореми про нижнє і верхнє значення відповідної антагоністичної гри для випадків з континуальним ядром та з матричним ядром. Також в [1] представлено розроблене програмне забезпечення для знаходження оптимальної стратегії другого гравця як варіанту шуканого імовірнісного розподілу, що може бути використане, зокрема, у задачах моделювання шорсткостей поверхонь, тертя і різання. Праця [2] містить побудоване ядро антагоністичної гри для задачі безумовної оптимізації, за розв’язком якої пропонується приймати рішення про достатність проведених вимірювань випадкової величини для того, щоб її реалізовувати у відповідній математичній моделі у формі розподілу відносних статистичних частот. Там же представлено програму підтримки прийняття рішення про вірогідність досліджуваного розподілу. Взагалі кажучи, основні питання інтервального оцінювання даних досить глибоко висвітлені у [3, 4], а роботи [1] і [2] частково вирішують проблему коректної "підстановки" інтервальних оцінок параметрів у відповідну математичну модель за їх невідомих імовірнісних розподілів. Однак мінімаксний підхід у визначенні оптимальних рішень щодо значень стохастичних параметрів може давати і декілька стратегій, що задовольнятимуть відомий принцип оптимальності в антагоністичних іграх, причому жодних пріоритетів вибору якоїсь з них цей підхід не запропонує [5]. А знання таких пріоритетів в оптимальних стратегіях є вагомою допомогою у відповідних процесах прийняття рішень, побудованих або породжуваних на основі антагоністичних конфліктних явищ. Тому вивчення наслідків застосування гравцем тієї чи іншої оптимальної стратегії потребує додаткового вирішення, хоча, безумовно, існує теорія вибору NE-ситуацій у безкоаліційних іграх [6].

Формулювання мети і постановка завдань статті

Будемо розглядати антагоністичну гру

$$G = \left\langle \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right)\right\rangle \tag{1}$$

з множинами $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$ та $\boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$ чистих стратегій першого та другого гравців відповідно, де дійснозначна функція $K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right)$ від аргументів $\mathbf{X} \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$ та $\mathbf{Y} \in \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$ визначена на декартовому добутку $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^{M+N}$, де $M \in \mathbb{N}$ та $N \in \mathbb{N}$. У змішаному розширенні гри (1)

$$\mathscr{G} = \left\langle \mathscr{X}, \mathscr{Y}, v\left(\mu\left(\mathbf{X}\right), \nu\left(\mathbf{Y}\right)\right)\right\rangle \tag{2}$$

з множинами стратегій $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ першого та другого гравців відповідно математичним сподіванням виграшу першого гравця буде

$$v\left(\mu\left(\mathbf{X}\right), \nu\left(\mathbf{Y}\right)\right) = \int\limits_{\boldsymbol{X}}\int\limits_{\boldsymbol{Y}} K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right) d\mu\left(\mathbf{X}\right) d\nu\left(\mathbf{Y}\right), \tag{3}$$

де інтеграл (3) береться по імовірнісній мірі $\mu\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X}$ першого гравця й імовірнісній мірі $\nu\left(\mathbf{Y}\right) \in \mathscr{Y}$ другого гравця, причому $\mathbf{X} \in \chi$ та $\mathbf{Y} \in \gamma$, χ є деякою σ-алгеброю підмножин множини $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$, що містить й одноточкові множини $\mathbf{X} \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$, і γ є σ-алгеброю підмножин множини $\boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$, що містить одноточкові множини $\mathbf{Y} \in \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$, а множини $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ є множинами усіх імовірнісних мір на σ-алгебрах χ та γ відповідно, і функція $K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right)$ є вимірною відносно σ-алгебри $\chi \times \gamma$ [7]. Вважатимемо, що у грі (1) існує ситуація рівноваги $\left\{\mu_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right), \nu_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right)\right\}$ (сідлова точка у, взагалі кажучи, змішаних стратегіях), для якої виконана подвійна нестрога нерівність

$$v\left(\mu\left(\mathbf{X}\right), \nu_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right)\right) \leqslant v\left(\mu_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right), \nu_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right)\right) \leqslant v\left(\mu_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right), \nu\left(\mathbf{Y}\right)\right) \quad \forall\, \mu\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X} \text{ та } \forall\, \nu\left(\mathbf{Y}\right) \in \mathscr{Y}. \tag{4}$$

Окрім цього, припускатимемо можливість представлення кожної стратегії гравця у формі імовірнісного розподілу:

$$p\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} = d\mu\left(\mathbf{X}\right) \tag{5}$$

та

$$q\left(\mathbf{Y}\right) d\mathbf{Y} = d\nu\left(\mathbf{Y}\right). \tag{6}$$

Також вважатимемо, що опонент гравця, наслідки якого оцінюватимуться, діятиме в області своїх змішаних стратегій (де, зрозуміло, "знаходяться" і його чисті стратегії). Під наслідком застосування гравцем його оптимальної стратегії можна розуміти загальний виграш (або корисність) цього гравця, який він отримає, дотримуючись цієї стратегії, за певних дій іншого гравця в межах визначеної сукупності його стратегій (чистих чи змішаних). Ця сукупність, очевидно, повинна містити принаймні одну оптимальну стратегію. Зрештою, необхідно представити концепцію підсумовування значень ядра гри $K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}\right)$ на тій підмножині декартового добутку $\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^{M+N}$ або добутку $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, яка міститиме принаймні по одній оптимальній стратегії гравців і деяку множину стратегій (можливо, неоптимальних), на яку може відхилитися опонент гравця, наслідки для якого оцінюватимуться.

Оцінювання наслідків застосування гравцем його оптимальної стратегії при змішаній оптимальній стратегії в іншого гравця

Спочатку займемося питанням оцінювання наслідку застосування гравцем його оптимальної стратегії, яка є чистою. Множини оптимальних стратегій першого та другого гравців позначимо через

$\mathscr{X}_{\text{opt}} \subset \mathscr{X}$ й $\mathscr{Y}_{\text{opt}} \subset \mathscr{Y}$ відповідно, причому, оскільки за домовленістю існує принаймні одна NE-ситуація $\left\{\mu_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right), \nu_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right)\right\}$ або, згідно з (5) і (6), NE-ситуація $\left\{p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right), q_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right)\right\}$ (надалі надамо перевагу саме такій формі), $\mathscr{X}_{\text{opt}} \neq \varnothing$ й $\mathscr{Y}_{\text{opt}} \neq \varnothing$. Глобальний наслідок використання другим гравцем його оптимальної чистої стратегії

$$\mathbf{Y}_{\text{opt}} = \left[y_1^* \quad y_2^* \quad \dots \quad y_N^*\right] \in \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N \tag{7}$$

дорівнює інтегралу

$$\mathscr{E}_2\left(\mathscr{X}\right) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\text{opt}}\right) p\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} \right) dp\left(\mathbf{X}\right). \tag{8}$$

При відступі першого гравця від своєї оптимальної стратегії $p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X}_{\text{opt}} \subset \mathscr{X}$ другий гравець оцінює наслідки використання своєї оптимальної чистої стратегії (7) через інтегрування функціонала $\int\limits_{\boldsymbol{X}} K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\text{opt}}\right) p\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X}$ по тій підмножині множини $\mathscr{X}$, куди може потрапити вибір (випадковий чи навмисний) першого гравця. Якщо, на думку другого гравця, перший гравець відступить від своєї оптимальної стратегії $p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X}_{\text{opt}} \subset \mathscr{X}$ не більше, ніж на деяке число $\xi > 0$ у кожній точці $\mathbf{X} \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$, то локальний наслідок використання другим гравцем його оптимальної чистої стратегії (7) дорівнюватиме функціональному інтегралу

$$\mathscr{E}_2\left(\mathscr{X}_\xi\right) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}_\xi} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\text{opt}}\right) p\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} \right) dp\left(\mathbf{X}\right), \tag{9}$$

де множина

$$\mathscr{X}_\xi = \left\{ p\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X} : p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) - \xi \leqslant p\left(\mathbf{X}\right) \leqslant p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) + \xi,\ \xi > 0 \right\}. \tag{10}$$

Не виключено, що другий гравець припускатиме несиметричні межі відступу першого гравця від оптимальної стратегії $p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X}_{\text{opt}} \subset \mathscr{X}$. Мається на увазі те, що замість множини (10) для наслідку (9) буде

$$\begin{gathered} \mathscr{X}_{\xi(\mathbf{X})} = \left\{ p\left(\mathbf{X}\right) \in \mathscr{X} : p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) - \xi\left(\mathbf{X}\right) \leqslant p\left(\mathbf{X}\right) \leqslant p_{\text{opt}}\left(\mathbf{X}\right) + \xi\left(\mathbf{X}\right), \right. \\ \left. \xi\left(\mathbf{X}\right) \geqslant 0, \text{ але } \exists\, \mathbf{X} \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M, \text{ що } \xi\left(\mathbf{X}\right) > 0 \right\}. \end{gathered} \tag{11}$$

І тоді локальний наслідок використання другим гравцем його оптимальної чистої стратегії (7) дорівнюватиме функціональному інтегралу

$$\mathscr{E}_2\left(\mathscr{X}_{\xi(\mathbf{X})}\right) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}_{\xi(\mathbf{X})}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} K\left(\mathbf{X}, \mathbf{Y}_{\text{opt}}\right) p\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} \right) dp\left(\mathbf{X}\right). \tag{12}$$

Аналогічно співвідношенню (8) означимо глобальний наслідок використання першим гравцем його оптимальної чистої стратегії

$$\mathbf{X}_{\text{opt}} = \left[x_1^* \quad x_2^* \quad \dots \quad x_M^*\right] \in \boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M \tag{13}$$

так:

$$\mathscr{E}_1\left(\mathscr{Y}\right) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} K\left(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \mathbf{Y}\right) q\left(\mathbf{Y}\right) d\mathbf{Y} \right) dq\left(\mathbf{Y}\right). \tag{14}$$

Локальний наслідок використання першим гравцем його оптимальної чистої стратегії (13) по підмножині

$$\mathscr{Y}_\zeta = \left\{ q\left(\mathbf{Y}\right) \in \mathscr{Y} : q_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right) - \zeta \leqslant q\left(\mathbf{Y}\right) \leqslant q_{\text{opt}}\left(\mathbf{Y}\right) + \zeta,\ \zeta > 0 \right\} \tag{15}$$

стратегій другого гравця дорівнює функціональному інтегралу

$$\mathscr{E}_1\left(\mathscr{Y}_\zeta\right) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_\zeta} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} K\left(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \mathbf{Y}\right) q\left(\mathbf{Y}\right) d\mathbf{Y} \right) dq\left(\mathbf{Y}\right), \tag{16}$$

а локальним наслідком використання першим гравцем його оптимальної чистої стратегії (13) по підмножині

$$\mathscr{Y}_{\zeta(\mathbf{Y})} = \left\{ q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y} : q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) - \zeta(\mathbf{Y}) \leqslant q(\mathbf{Y}) \leqslant q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) + \zeta(\mathbf{Y}),\right.$$
$$\left.\zeta(\mathbf{Y}) \geqslant 0,\text{ але } \exists\, \mathbf{Y} \in \boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N,\text{ що } \zeta(\mathbf{Y}) > 0 \right\} \qquad (17)$$

стратегій другого гравця є функціональний інтеграл

$$\mathscr{E}_1\left(\mathscr{Y}_{\zeta(\mathbf{Y})}\right) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_{\zeta(\mathbf{Y})}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} K\left(\mathbf{X}_{\text{opt}}, \mathbf{Y}\right) q(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \right) dq(\mathbf{Y}). \qquad (18)$$

Тепер перейдемо до оцінювання наслідку застосування гравцем його оптимальної змішаної стратегії. Глобальний наслідок використання другим гравцем його оптимальної змішаної стратегії $q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_{\text{opt}} \subset \mathscr{Y}$ дорівнює функціональному інтегралу

$$\mathscr{E}_2(\mathscr{X}) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} \int\limits_{\boldsymbol{Y}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p(\mathbf{X}) q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \right) dp(\mathbf{X}). \qquad (19)$$

Локальний наслідок використання другим гравцем його оптимальної змішаної стратегії $q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_{\text{opt}} \subset \mathscr{Y}$ по підмножині (10) стратегій першого гравця дорівнює функціональному інтегралу

$$\mathscr{E}_2(\mathscr{X}_\xi) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}_\xi} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} \int\limits_{\boldsymbol{Y}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p(\mathbf{X}) q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \right) dp(\mathbf{X}), \qquad (20)$$

а локальним наслідком використання другим гравцем його оптимальної стратегії $q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_{\text{opt}} \subset \mathscr{Y}$ по підмножині (11) стратегій першого гравця є функціональний інтеграл

$$\mathscr{E}_2\left(\mathscr{X}_{\xi(\mathbf{X})}\right) = \int\limits_{p(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}_{\xi(\mathbf{X})}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{X}} \int\limits_{\boldsymbol{Y}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p(\mathbf{X}) q_{\text{opt}}(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} d\mathbf{X} \right) dp(\mathbf{X}). \qquad (21)$$

Аналогічно глобальним наслідком використання першим гравцем його оптимальної стратегії $p_{\text{opt}}(\mathbf{X}) \in \mathscr{X}_{\text{opt}} \subset \mathscr{X}$ є функціональний інтеграл

$$\mathscr{E}_1(\mathscr{Y}) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} \int\limits_{\boldsymbol{X}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p_{\text{opt}}(\mathbf{X}) q(\mathbf{Y}) d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \right) dq(\mathbf{Y}), \qquad (22)$$

локальним наслідком по підмножині (15) стратегій другого гравця є

$$\mathscr{E}_1(\mathscr{Y}_\zeta) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_\zeta} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} \int\limits_{\boldsymbol{X}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p_{\text{opt}}(\mathbf{X}) q(\mathbf{Y}) d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \right) dq(\mathbf{Y}), \qquad (23)$$

і локальним наслідком по підмножині (17) стратегій другого гравця є

$$\mathscr{E}_1\left(\mathscr{Y}_{\zeta(\mathbf{Y})}\right) = \int\limits_{q(\mathbf{Y}) \in \mathscr{Y}_{\zeta(\mathbf{Y})}} \left(\int\limits_{\boldsymbol{Y}} \int\limits_{\boldsymbol{X}} K(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) p_{\text{opt}}(\mathbf{X}) q(\mathbf{Y}) d\mathbf{X} d\mathbf{Y} \right) dq(\mathbf{Y}). \qquad (24)$$

Наслідки (8), (9), (12), (14), (16), (18) — (24) без проблем знаходяться для випадків скінченних множин $\boldsymbol{X} \subset \mathbb{R}^M$ та $\boldsymbol{Y} \subset \mathbb{R}^N$, на яких множини усіх стратегій гравців $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$ будуть відповідними — фундаментальними симплексами. І, взагалі, при обчисленні вказаних інтегралів інтегрування по зліченній множині (підмножині певної числової прямої) слід замінювати на відповідне підсумовування значень ядра у точках цієї множини.

Висновок та перспектива подальшого дослідження

Запропоноване оцінювання наслідків застосування гравцем його оптимальної стратегії при змішаній оптимальній стратегії (яка у частинному випадку, зрозуміло, буде чистою) в іншого гравця є ефективним інструментом для здійснення сингулярного (унікального) вибору із множини оптимальних рішень у моделі реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом, що може бути використано, зокрема, у задачах моделювання шорсткостей поверхонь, тертя і різання. Крім того, концепція оцінювання наслідків застосування гравцем його оптимальної стратегії може використовуватись й у загальних задачах прийняття рішень, котрі породжуються антагоністичними іграми за участю суб’єкта прийняття рішень, котрий працює в умовах часткових або повних невизначеностей. Перспектива подальшого дослідження вбачається у викладенні й обґрунтуванні положень чисельних методів [8 — 10] визначення наслідків (8), (9), (12), (14), (16), (18) — (24), адже усі ці 12 інтегралів є функціональними, а аналітичне інтегрування таких інтегралів не завжди можливе [11 — 16].

Література

1. Романюк В. В. Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 3. — С. 65 — 71.
2. Романюк В. В. Оцінювання вірогідності розподілу статистичних частот випадкової величини з невідомим математичним сподіванням і дисперсією / В. В. Романюк // Вісник НТУ “ХПІ”. Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. — Харків : НТУ “ХПІ”, 2010. — № 21. — С. 152 — 161.
3. Большаков А. А. Методы обработки многомерных данных и временных рядов : Учебное пособие для вузов / А. А. Большаков, Р. Н. Каримов. — М. : Горячая линия — Телеком, 2007. — 520 с. : ил.
4. Caprani O. Introduction to Interval Analysis / O. Caprani, K. Madsen, H. B. Nielsen. — IMM, DTU. — 2002. — 82 p.
5. Романюк В. В. Нерівнозначні оптимальні змішані стратегії другого гравця у вгнутій антагоністичній грі з експоненціальним ядром, що задається на декартовому добутку двох одиничних кубів / В. В. Романюк // Наука й економіка. — Випуск 3 (15), 2009. — Том 2. — С. 206 — 234.
6. Harsanyi J. C. A General Theory of Equilibrium Selection in Games / J. C. Harsanyi, R. Selten. — Cambridge : MIT Press, 1988. — 396 p.
7. Петросян Л. А. Теория игр : Учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. — М. : Высшая школа, Книжный дом “Университет”, 1998. — 304 с. : ил.
8. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ : справочное пособие / В. В. Иванов. — К. : Наук. думка, 1986. — 584 с.
9. Жидков Е. П. Об одном методе вычисления континуальных интегралов без решёточной дискретизации / Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов, Р. Р. Шахбагян // Математическое моделирование. — 1989. — Т. 1, № 8. — С. 139 — 157.
10. Жидков Е. П. Приближённое вычисление кратных континуальных интегралов в многомерных задачах квантовой физики / Е. П. Жидков, Ю. Ю. Лобанов, Р. Р. Шахбагян // Математическое моделирование. — 1990. — Т. 2, № 10. — С. 110 — 119.
11. Алимов А. Л. О гамильтоновой форме фейнмановского континуального интеграла / А. Л. Алимов // ТМФ. — 1974. — Т. 20, вып. 3. — С. 302 — 307.
12. Попов В. Н. Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике / В. Н. Попов. — М. : Атомиздат, 1976. — 256 с.
13. Березин Ф. А. Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве / Ф. А. Березин // Успехи математических наук. — 1980. — Т. 132, вып. 3. — С. 497 — 548.
14. Прохоров Л. В. Гамильтоновы континуальные интегралы / Л. В. Прохоров // Физика элементарных частиц и атомного ядра. — 1982. — Том 13, вып. 5. — С. 1094 — 1156.
15. Wiener N. The average value of a functional / N. Wiener // Proc. Lond. Math. Soc. — 1924. — V. 22, N. 6. — P. 454 — 467.
16. Ладохин В. И. Вычисление континуальных интегралов от функционалов $\Phi\left[\int\limits_0^T \alpha_1(\tau)\,dx(\tau); \ldots; \int\limits_0^T \alpha_m(\tau)\,dx(\tau)\right]$ / В. И. Ладохин // Успехи математических наук. — 1964. — Т. XIX, вып. 1 (115). — С. 155 — 159.

Надійшла 22.9.2010 р.