

промисловості: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.05.10 «Машини легкої промисловості» / О. С. Поліщук. – К.: КНУТД, 2001. – 155 с.

2. Справочник по физике / [под ред. Б. М. Яворского и А. А. Детлафа]. – М.: Наука, 1964. – 847 с.

3. Колосков В. И. Оборудование и механизация обувного производства: [учебник] / В. И. Колосков, Б. П. Колясин. – М.: Легкая индустрия, 1979. – 320 с.

4. Харизоменов И. В. Электрооборудование кузнечно-штамповочных машин: [учебник для вузов] / Харизоменов И. В. – М.: Высшая школа, 1970. – 185 с.

5. Живов Л. И. Кузнечно-штамповочное оборудование / Живов Л. И., Овчинников А. Г., Складчиков Е. Н. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2006. – 560 с.

6. Бочаров Ю. А. Кузнечно-штамповочное оборудование: [учебник для студ. высш. учеб. заведений] / Бочаров Ю. А. – М.: Издательский центр «Академия», 2008. – 480 с.

7. Добринский Н. С. Гидравлический привод прессов / Добринский Н. С. – М.: Машиностроение, 1975. – 222 с.

8. Кармаліта А. К. Методика математичного моделювання технології та механізмів легкої промисловості: [навч. посібник] / Кармаліта А. К., Піскорський Г. А., Скиба М. Є. – К.: ІЗМН, 1997. – 184 с.

9. Проектирование и расчет машин обувных и швейных производств: учеб. пособие для вузов / [Комиссаров А. И., Жуков В. В., Никифоров В. М., Сторожев В. В.]. – М.: Машиностроение, 1978. – 431 с.

10. Прибега Д. В. Удосконалення технології розкроювання та перфорування деталей верху взуття: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук: спец. 05.19.06 «Технологія взуттєвих та шкіряних виробів» / Д. В. Прибега. – Хмельницький: Хмельницький національний університет, 2006. – 155 с.

Надійшла 5.11.2010 р.

УДК 621.785: 620.178

Н.С. СВИРНЕВСКИЙ, Т.К. СКРИПНИК

Хмельницкий национальный университет

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ПРИ ПОСТАНОВКЕ ЗАДАЧИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ

Изложена методика подачи материала по постановке задачи геометрического моделирования объектов с использованием теории параметризации студентам направления компьютерных наук.

The technique of presenting the material on the formulation of the problem of geometric modeling of the objects using the theory parameterization areas of computer science students

Ключевые слова: теория параметризации, геометрическое моделирование.

Постановка проблемы. Постановка задачи геометрического моделирования требует описания данных на входе и выходе, а также алгоритма (рис. 1).

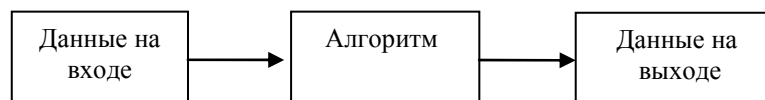


Рис. 1. Алгоритмическая обработка данных

Постановка задачи, по сути, является и ее решением и доказать корректность постановки задачи можно путем фактического описания процесса. Описание процесса может быть весьма сложным и не всегда завершается успешно – решение в первоначальной постановке может отсутствовать или оказаться неоднозначным.

Элементы теории параметризации позволяют осуществить постановку задачи геометрического моделирования еще до того, когда известен алгоритм ее решения. При этом методы теории параметризации позволяет корректно выбирать данные на входе и выходе, а также оценивать однозначность или многозначность решения задачи еще до описания алгоритма.

Анализ последних исследований и публикаций. В ряде публикаций, например [1, 2], описаны теоретические основы решения различных проблем с помощью теории параметризации. С развитием информационных технологий элементы теории параметризации находят свое дальнейшее применение.

Формулирование цели статьи. Специфика использования элементов теории параметризации при постановке задачи компьютерного моделирования требует изложения материала с учетом алгоритмического и объектно-ориентированного подхода к решению задач.

Изложение основного материала. Параметры – независимые числовые величины, которые позволяют выделить геометрический объект из n – параметрического множества объектов в заданной системе параметризации (рис. 2).

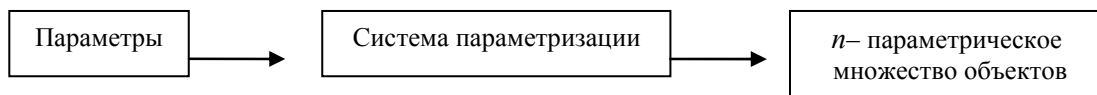


Рис 2. Параметрическая обработка данных

n – параметрическое множество – множество объектов, для выделения одного из которого необходимо связать n параметров. Понятие степени свободы связано с таким понятием, как размерность. В математике размерность – это количество независимых параметров, необходимых для описания состояния объекта, или, другими словами, для определения его положения в некоем абстрактном пространстве.

Система параметризации – совокупность заданных геометрических элементов (примитивов) и геометрических условий, которые ставят в соответствие каждому объекту набор параметров.

Основы метода параметризации (определение параметрического множества точек). Точки могут формировать одномерную линию. Линия, перемещаясь в пространстве, формирует двумерную поверхность. Поверхность, повторяясь в пространстве, образует трехмерный объем. Переходя на параметрическую терминологию, можно увеличивать размерность точечного множества (T^k) за счёт высвобождения параметров. Например, вращая (рис. 3) точку (T^0) вокруг центра (параметр – угол φ) получаем окружность (T^1). Перемещаем окружность (T^1) в направлении, перпендикулярно к ее плоскости, получаем цилиндрическую поверхность (T^2). Если одновременно с этим изменять радиус окружности r , получаем множество T^3 .

Пример последовательного перехода от точки к окружности, цилиндру и пространству демонстрируют так называемый кинематический способ определения точечного множества. Согласно ему, точечное множество T^k можно задавать, как однопараметрическое множество объектов точечного множества T^{k-1} . Поверхность можно рассматривать как однопараметрическое множество линий, а точечное множество T^3 – как однопараметрическое множество поверхностей. Точечное множество T^3 можно, также, рассматривать как двухпараметрическое множество линий. Так, если при перемещении окружности вдоль оси меняется и радиус, то получаем точечное множество.

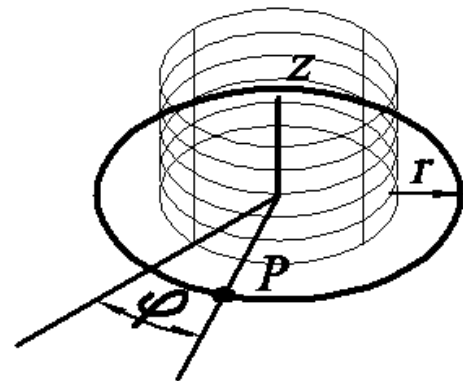


Рис. 3. Изменение размерности точечного множества

От точечного множества большей размерности можно перейти к точечному множеству меньшей размерности, связывая точки множества какими-либо геометрическими условиями.

Каждое из заданных точечных множеств T^k может рассматриваться как пространство R^n ($n = k$), в котором могут определяться точечные подмножества с размерностью $k < n$, причем, размерность пространства n равна минимальной размерности заданного точечного множества, в котором находятся точки определяемого подмножества. Определение точечного подмножества T^k в пространстве R^n ($k < n$) реализуется через условие принадлежности этому подмножеству, которое связывает $(n - k)$ параметров. В случае принадлежности точек определяемого подмножества двум и более заданным множествам количество связываемых параметров суммируется. Так, при пересечении 2-х множеств с размерностью k_1 и k_2 образуется точечное множество с размерностью k , определяемой из соотношения

$$n - k = (n - k_1) + (n - k_2). \quad (1)$$

При $k < 0$ получаем пустое множество точек.

Для демонстрации описанного способа рассмотрим предыдущий пример (рис. 3) в обратном порядке. Цилиндрическая поверхность с нефиксированным радиусом (множество T^3) представляет пространство R^3 . Связывая параметр $r = r_0$, определяем цилиндр (множество T^2). Связывая параметр $z = z_0$, определяем плоскость (множество T^2). При пересечении цилиндра и плоскости получаем окружность (множество T^1). Задаем в плоскости (пространстве R^2) прямую (множество T^1), проходящую из центра под углом $\varphi = \varphi_0$, на пересечении с окружностью определяем точку (множество T^0).

Т.о., переопределение размерности точечного множества T^k сводится к описанию геометрических условий, которые либо высвобождают параметры множества меньшей размерности либо связывают параметры точечного пространства R^n , в котором определяется множество (рис. 4).

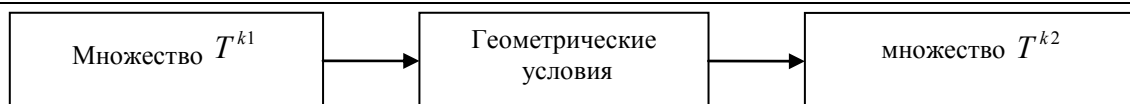


Рис. 4. Переопределение размерности точечного множества

Методика определения параметрического числа объекта. Описательная модель объекта включает геометрические примитивы и алгоритм создания из них объекта (рис. 4).

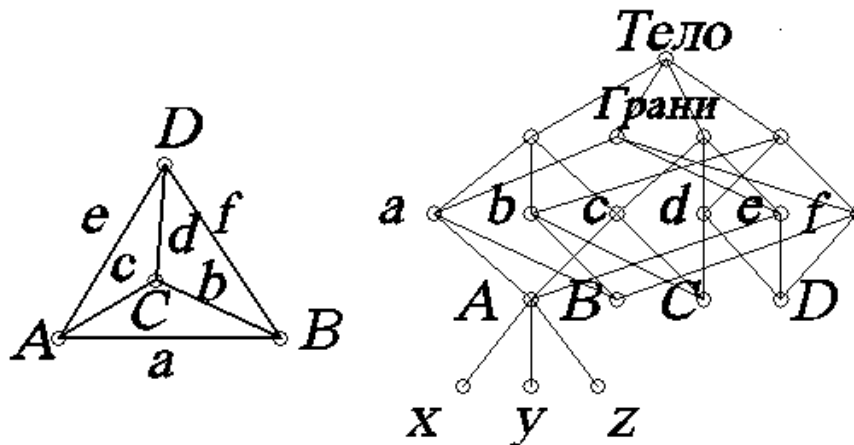


Рис. 4. Параметризация точечного объекта

Каждый из примитивов, в конечном итоге, выражаются через параметры. Суммарное число параметров примитивов определяет параметрическое число объекта.

Простейшим геометрическим объектом является точка. Будем различать 2 вида точек – фиксированная и текущая. Параметрическое число фиксированной точки P совпадает с размерностью пространства R^n ($P = n$). Параметрическое число текущей точки множества T^k определяется степенью свободы перемещения текущей точки в пределах точечного пространства R^n – из соотношения $P = n - k$ (табл. 1).

Таблица 1

Параметрическое число текущей точки множества T^k в пространстве R^n

Множество T^k	Пространство R^n			
	R^0	R^1	R^2	R^3
T^0	0	1	2	3
T^1		0	1	2
T^2			0	1
T^3				0

Определителем отрезка являются 2 фиксированные точки. Следовательно, в пространстве R^3 отрезок определяется 6-ю параметрами ($P = 3 + 3 = 6$) в плоскости (пространство R^2) $P = 4$. Пирамида определяется 4-я фиксированными точками в пространстве R^3 ($P = 12$).

Не все геометрические объекты было бы правильно определять через фиксированные точки. Так, например, если определить прямую по 2-м фиксированным точкам, то окажется, что мы имеем на плоскости 4-х параметрическое множество прямых (на самом деле 2-х параметрическое). На рис. 5 показаны объекты, которые определяются текущими точками, в таблице 1 приведены параметрические числа текущих точек.

Прямая определяется 2-я текущими точками, плоскость – тремя. Суммируя параметры точек в пространстве R^2 получаем $P = 2$, в пространстве R^3 – $P = 4$. Параметрическое число для плоскости $P = 4$. Определитель эллипса включает 2 фиксированных точки (фокусы эллипса) и 1 текущую точку линии, получаем $P = 5$.

Зная параметрические числа прямых и плоскостей, можно их использовать для параметризации более сложных объектов. Например, треугольник (рис. 6) можно определить как фигуру, ограниченную прямыми, а пирамиду – как фигуру, ограниченную плоскостями. Каждая линия на плоскости определяется 2-я параметрами, соответственно, треугольник определяется 6 параметрами. Аналогично рассуждая, получим число параметров для пирамиды $P = 15$ (по три для каждой из плоскостей). Однако, их не 15, а

14. В данном случае необходимо учитывать, что три боковые плоскости, пересекаясь, определяют одну точку (вершину пирамиды) и, следовательно, для определения 4-й боковой плоскости необходимо добавить еще 2 текущих точки поверхности (2 параметра).

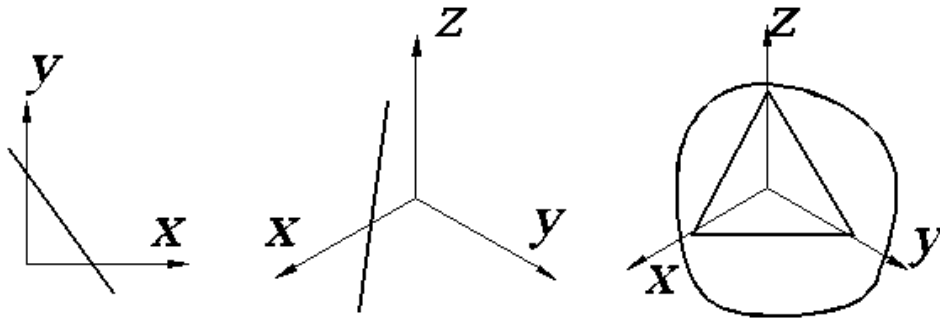


Рис 5. Определение объекта текущими точками

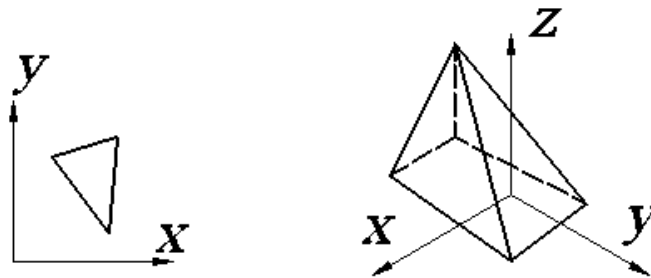


Рис 6. Определение объекта прямыми и плоскостями

Определитель фигуры может быть различным, но корректная параметризация объекта при элементарных знаниях геометрии обеспечит один и тот же результат. Например, определителем окружности может быть одна фиксированная точка (центр окружности) и одна текущая точка, а также определителем окружности могут быть 3 текущие точки. В обоих случаях получаем $P = 3$. Другой пример – параметризация пирамиды по точечному каркасу. Для 5 фиксированных точек в пространстве R^3 получаем $P = 15$. Однако, следует учесть, что одна из точек основания пирамиды определяется в плоскости (пространстве R^2). Получаем тот же результат, что и для определителя пирамиды из 5 плоскостей ($P = 14$).

Параметризация геометрических условий. На рис. 7 показаны объекты, связанные геометрическими условиями (параллельность, касание и симметрия).

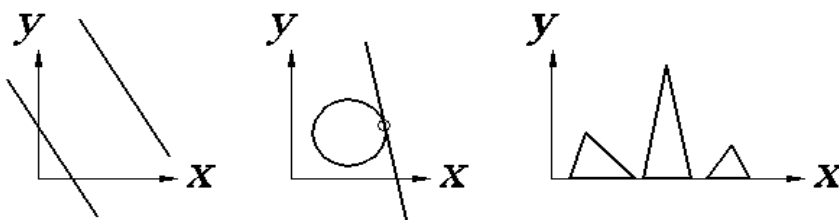


Рис. 7. Объекты, связанные геометрическими условиями

Прямая, параллельная заданной, определяется одним параметром вместо двух. Окружность, касательная к линии, двумя параметрами вместо трех. Для симметричной фигуры требуется меньше параметров. Из этих примеров видно, что геометрические условия заменяют параметры. Следовательно, при расчете размерности параметрического множества N геометрического объекта необходимо не только просуммировать параметрические числа геометрических элементов определителя, но и вычесть параметрические размерности геометрических условий.

$$N = N_1 + N_2 + \dots + N_k - (N_{y1} + N_{y2} + \dots + N_{yp}) \quad (2)$$

Размерность геометрического условия определяется разницей параметрического числа объекта, несвязанного условием, и параметрического числа объекта, связанного условием:

$$N_y = N_1 - N_2 \quad (3)$$

Перпендикулярность прямой к плоскости. Прямая общего положения 4-х параметрическая. Прямая, перпендикулярная к плоскости, определяется точкой в плоскости, следовательно 2-х параметрическая.

$$N_y = 4 - 2 = 2 \quad (4)$$

Точно такой же результат можно получить, если в качестве исследуемого объекта выбрать не прямую, а плоскость. Плоскость общего положения 3-х параметрическая. Плоскость, перпендикулярная к прямой, определяется точкой на прямой, следовательно однопараметрическая.

$$N_y = 3 - 1 = 2 \quad (5)$$

Перпендикулярность 2-х плоскостей. Плоскость общего положения 3-х параметрическая. Плоскость, перпендикулярная к заданной плоскости, определяется прямой в плоскости, следовательно 2-х параметрическая.

$$N_y = 3 - 2 = 1 \quad (6)$$

Перпендикулярность 2-х прямых (в плоскости). Прямая общего положения 2-х параметрическая. Прямая, перпендикулярная к прямой, определяется точкой на прямой, следовательно однопараметрическая.

$$N_y = 2 - 1 = 1 \quad (7)$$

Параллельность 2-х плоскостей. Плоскость общего положения 3-х параметрическая. Плоскость, параллельная к заданной, определяется текущей точкой на плоскости, следовательно однопараметрическая.

$$N_y = 3 - 1 = 2 \quad (8)$$

Параллельность прямой и плоскости. Прямая общего положения 4-х параметрическая. Прямые, параллельные к заданной плоскости, находятся в параллельной к ней плоскости. Положение последней плоскости определяется текущей точкой в этой плоскости, т.е. одним параметром. В плоскости можно провести двухпараметрическое множество прямых. Следовательно, прямая, параллельная к плоскости, определяется 3-я параметрами.

$$N_y = 4 - 3 = 1 \quad (9)$$

Параллельность 2-х прямых (в плоскости). Прямая общего положения 2-х параметрическая. Прямая, ей параллельная, определяется текущей точкой на прямой, следовательно однопараметрическая.

$$N_y = 2 - 1 = 1 \quad (10)$$

Параллельность 2-х прямых (в пространстве). Прямая общего положения 4-х параметрическая. Прямые, ей параллельные, перпендикулярны к одной и той же плоскости. Прямая, перпендикулярная к плоскости 2-х параметрическая, следовательно и прямая, параллельная к заданной прямой, тоже двухпараметрическая.

$$N_y = 4 - 2 = 2 \quad (11)$$

Касание 2-х линий (на плоскости). Рассмотрим касание прямой и кривой. Прямая общего положения 2-х параметрическая. Через точку на гладкой кривой можно провести единственную касательную. Точка на линии определяется одним параметром, следовательно и касательных к кривой можно провести однопараметрическое множество.

$$N_y = 2 - 1 = 1 \quad (12)$$

Касание 2-х линий (в пространстве). Рассуждая по аналогии с предыдущим случаем, получим:

$$N_y = 4 - 3 = 1 \quad (12)$$

Касание 2-х поверхностей. Рассмотрим касание плоскости и поверхности. Плоскость общего положения 3-х параметрическая. Через точку на гладкой поверхности можно провести единственную касательную плоскость. Точка на поверхности определяется двумя параметрами, следовательно и касательных поверхностей можно провести двухпараметрическое множество.

$$N_y = 3 - 2 = 1$$

Касание линии к поверхности. Рассмотрим касание прямой к поверхности. Прямая общего положения 4-х параметрическая. Через точку на гладкой поверхности можно провести единственную касательную плоскость (определяется 2-я параметрами), а в ней, через ту же точку можно провести однопараметрическое множество прямых. Следовательно, прямых, касательных к поверхности можно провести 3-х параметрическое множество.

$$N_y = 4 - 3 = 1$$

Симметрия. При условии явно или неявно заданных центра, оси или плоскости симметрии учитываются параметры только одной из двух симметричных точек. Следовательно условие симметрии заменяет количество параметров, равное параметрическому числу лишь одной из симметричных частей.

Выделение параметров формы и положения

Практически все геометрические объекты характеризуются параметрами формы и положения (рис. 8). Исключение составляют точка, прямая и плоскость. Эти элементы различаются в пространстве только лишь положением.

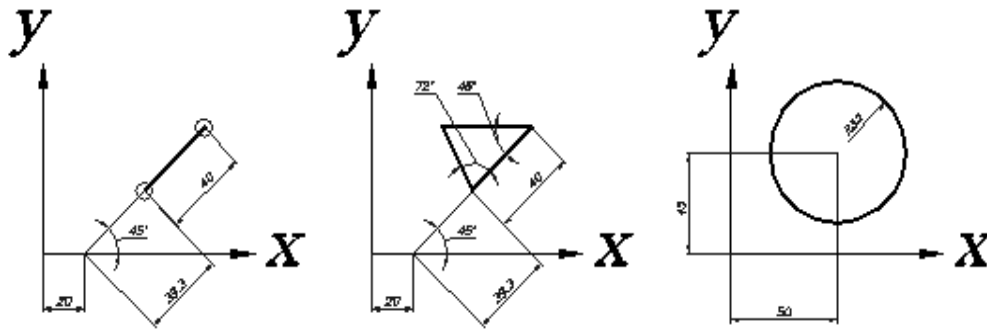


Рис. 8. Параметры формы и положения

Параметры положения Nn и параметры формы N_ϕ в сумме определяют общее параметрическое число N :

$$N = Nn + N_\phi$$

Число параметров положения зависит от размерности пространства. В общем случае $Nn = 3$ для объектов на плоскости и $Nn = 6$ для объектов в пространстве. Этот факт несложно доказать, используя приемы параметризации.

На рис. 9 показано положение систем координат, относительно базовых в пространствах R^2 и R^3 .

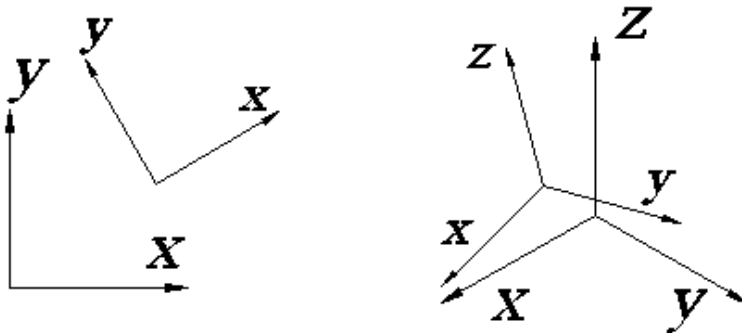


Рис. 9. Указание параметров формы и положения

Определение параметров положения на плоскости. Система координат определяется:

- точкой (2 параметра);
- прямой, которая проходит через заданную точку и текущую точку линии (ещё один параметр);
- прямой, которая проходит через заданную точку перпендикулярно к заданной прямой (без параметров);

Всего 3 параметра.

Определение параметров положения в пространстве. Система координат определяется:

- точкой (3 параметра);
- прямой, которая проходит через заданную точку и текущую точку линии (ещё 2 параметра);
- прямой, которая проходит через заданную точку, лежит в плоскости, перпендикулярной к заданной прямой, и проходит через текущую точку линии (1 параметр);
- прямой, которая проходит через заданную точку перпендикулярно к заданной плоскости (без параметров);

Всего 6 параметров.

Рассмотрим метод разделения параметров формы и положения объектов на примере эллипса. Первоначально воспользуемся описательной моделью эллипса. Эллипс – множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых к 2-м точкам (фокусам) есть величина постоянная (больше, чем расстояние между фокусами). Затем отделяем геометрическую часть от алгоритмической. Геометрическая часть состоит из 2-х фиксированных точек на плоскости и одной текущей точки на линии. Выражаем элементы определителя через параметры:

$$N = 2 + 2 + 1 = 5$$

Определяем количество параметров формы и положения.

$$Nn = 3, N_\phi = 5 - 3 = 2 \quad (14)$$

Исследование задачи методами параметризации. В теории алгоритмов одна из важных проблем – доказать отсутствие алгоритма для решения той или иной задачи. Доказать наличие алгоритма можно путем фактического описания процесса. Доказать же отсутствие алгоритма сложнее. То, что Вы его не сумели

описать, отнюдь не означает, что алгоритм не существует. Приемы параметризации позволяют в некоторой степени решить эту проблему в отношении моделирования геометрических объектов. Рассмотрим это на примере.

Задача. Провести прямую, которая пересекает 3 (4 или 5) заданных прямых (рис. 10).

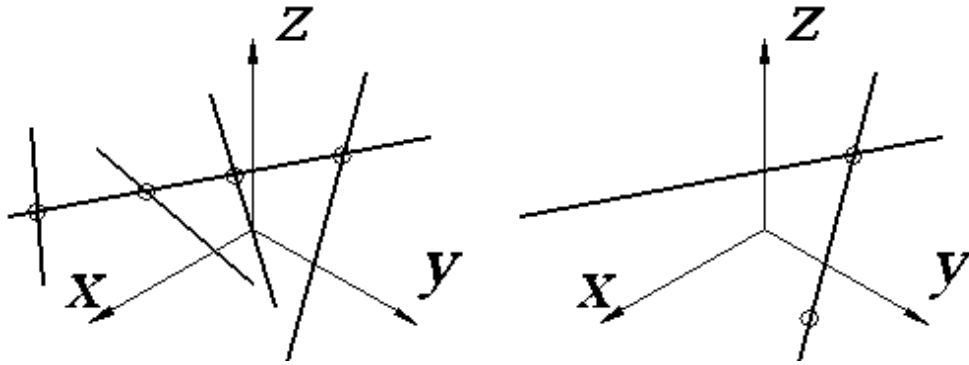


Рис. 10. Пересечение прямой 4-х прямых

Для того, чтобы оценить, какое множество решений имеет задача, необходимо определить:

1. Какая размерность множества прямых в трехмерном пространстве?
2. Какая размерность геометрического условия (определяется разницей параметрического числа объекта, несвязанного условием, и параметрического числа объекта, связанного условием)?
3. Сколько необходимо условий, чтобы получить 0-мерное множество прямых?

В пространстве R^3 имеем ∞^4 прямых. Если же прямая, пересекает какую-либо линию, то имеем ∞^3 прямых, поскольку одна из 2-х точек определяется в пространстве R^1 на заданной линии (рис. 10). Размерность геометрического условия пересечения линий $N_y = 4 - 3 = 1$. Следовательно, чтобы получить ∞^0 прямых достаточно 4 условия пересечения прямой с линией.

Аналогично можно доказать, что можно провести прямую, которая пересекает 2 заданные прямые и параллельна к 2-м заданным плоскостям, или провести прямую, касательную к 4-м сферам.

Перспективы дальнейших исследований. Программные системы служат для моделирования различных аспектов реального мира. И сложность системы соответствует сложности предметной области. Следовательно, для обнаружения эффективных методов проектирования программных систем необходимо осуществить поиск порядка в хаосе реального мира. Параметрическая модель точечного пространства позволяет в определенной степени решить эту проблему. Используя парадигмы объектно-ориентированного подхода (абстрагирование, иерархия, модульность) на основе параметрической модели точечного пространства можно создавать эффективные системы геометрического моделирования.

Литература

1. Четверухин Н. Ф. Параметризация и ее применение в геометрии / Н. Ф. Четверухин, Л. А. Яцкевич // Математика в школе. – 1965. – № 5. – С. 15–23.
2. Инженерная геометрия с элементами теории параметризации / [Михайленко В. Е., С. Н. Ковалев и др.]. – К.: УМК ВО, 1989. – 84 с.

Надійшла 15.11.2010 р.