

Надійшла 25.11.2010 р.

УДК 539.3: 624.131

В.В. КОВТУН, О.А. ДОРОФЄЄВ  
Хмельницький національний університет**ДЕФОРМАЦІЇ ВЗДОВЖ ПОТЕНЦІАЛЬНИХ  
ЛІНІЙ КОВЗАННЯ У СИПКОМУ СЕРЕДОВИЩІ**

*Для умов плоскої деформації розглядаються співвідношення між компонентами тензора деформацій по неортогональних напрямках. Результати досліджень дозволяють застосовувати положення механіки деформівного твердого тіла як для ортогональних, так й для неортогональних спряжених напрямів. Вони становлять інтерес для механіки ґрунтів та сипких середовищ.*

*The article considers the ratio between the components of strain tensor in non-orthogonal directions for the conditions of plane deformation. The research results extend the provisions of Mechanics of solids, which considers mainly strain in orthogonal directions. The received results are of outmost importance for Mechanics of soils and sands.*

Ключові слова: деформація, сипке середовище, лінія ковзання.

**Вступ.** В механіці сипкого середовища важливим є поняття спряжених площинок, сукупність яких в граничному стані утворює сітку ліній ковзання. Саме для цих площинок виконується умова переходу сипкого середовища у граничний стан, яка покладена в основу бездеформаційної моделі статички сипких середовищ [1]. Для побудови більш загальної, деформаційної, моделі сипкого середовища необхідно крім статичних співвідношень між напруженнями по спряжених площинках сформулювати геометричні деформаційні співвідношення по цих напрямках, а також фізичні співвідношення між напруженнями і деформаціями.

В статті описуються геометричні співвідношення для спряжених напрямів, які співпадають з нормаллями до спряжених площинок. *Спряженими* є площинки, по яких повне напруження  $P$  відхиляється від нормаллі на однаковий кут  $\eta$ .

**Вихідні положення, припущення, гіпотези.**

1. Розглядається плоска задача по деформаціях, яка характеризується умовою, що переміщення за напрямком однієї з головних осей, наприклад, осі  $z$ , дорівнюють нулю. В цьому випадку деформації в усіх перпендикулярних до осі  $z$  напрямках не залежать від цієї координати.

2. Приймається гіпотеза малості деформацій, для яких є справедливими лінійні диференціальні співвідношення Коші.

3. Використовується поняття спряжених напрямків [2]. Це напрями, що збігаються з нормаллями спряжених площинок. Вони утворюють кути  $\alpha$  і  $\beta$  з головною віссю  $\sigma_1$ , і пов'язані з кутом  $\eta$  відхиленням повного напруження від нормаллі залежністю:

$$\alpha - \beta = \eta. \quad (1)$$

**Результати досліджень.** Метою проведених досліджень є встановлення співвідношень між деформаціями по неортогональних спряжених напрямках. Для цього використовується загальна методика теорії деформації, яка в механіці твердого деформівного тіла [3] реалізована переважно для часткового випадку – ортогональних напрямів.

Розглянемо деформування площини  $x, y$  (рис. 1). В результаті деформації кожна точка одержить відповідне переміщення  $\vec{L}$ . Для опису переміщень точок в площині  $Oxy$  введемо векторну функцію  $L(\vec{r})$ . Вектор переміщення задається його проєкціями на осі вибраної системи координат. Наприклад, переміщення  $\vec{L}_A$  точки  $A$ , що належить відріжку  $AB$ , можна представити компонентами  $L_r$  і  $L_{r_1}$  в системі осей  $Arr_1$ , пов'язаних з напрямом  $\vec{r}$  відрізка, або через компоненти  $u, v$  в системі осей  $Oxy$ .

В результаті деформації площини відрізок  $AB = dr$  займе нове положення  $A_1B_1$ . При цьому він змінює свою величину й повертається на кут  $\omega_r$ . Відносне видовження  $\varepsilon_r$  відрізка та кут його повороту  $\omega_r$  визначимо через прирости переміщень вздовж ортогональних напрямів  $r$  і  $r_1$ . Вони дорівнюють частинним диференціалам функції  $L(\vec{r})$ :

$$dL_r = \frac{\partial L_r}{\partial r} dr; \quad dL_{r_1} = \frac{\partial L_{r_1}}{\partial r} dr.$$

Відносна лінійна деформація становитиме:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial L_r}{\partial r}. \quad (2)$$

Визначимо відносне видовження  $\varepsilon_r$  відрізка  $AB$  в загальній системі координат  $Oxy$ , в якій переміщення  $L$  представляється компонентами  $u$  і  $v$  по осях  $x, y$ , а орієнтація відрізка  $dr$  – напрямними косинусами  $l = \frac{dx}{dr}$ ,  $m = \frac{dy}{dr}$ . Після диференціювання складної функції  $L(\vec{r})$  одержимо:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) lm. \quad (3)$$

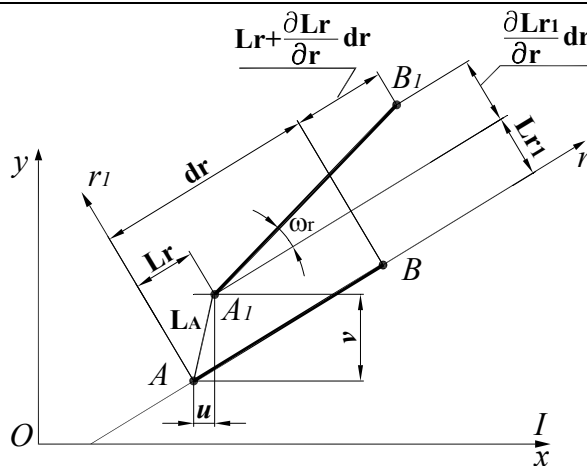


Рис. 1. Переміщення точок площини в результаті її деформування

Через компоненти тензора малих деформацій  $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$  приходимо до відомого [4] виразу для видовження відрізка  $dr$  при повороті осей  $x, y$  –

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm. \quad (4)$$

Цей вираз дозволяє визначити лінійну відносну деформацію  $\varepsilon_r$  вздовж довільного напрямку  $\vec{r}$  через деформації  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  за двома ортогональними напрямками, які паралельні осям  $x, y$ .

Знайдемо кут повороту  $\omega_r$  відрізка  $dr$ .

$$\omega_r = \frac{\partial L_{r1}}{\partial r}. \quad (5)$$

В цей вираз входить  $L_{r1}$  – проекція переміщення  $\vec{L}$  на вісь  $r_1$ . Через напрямні косинуси  $l_1, m_1$  напрямку  $r_1$  вона визначається як:

$$L_{r1} = ul_1 + vm_1.$$

З урахуванням ортогональності  $\vec{r}$  і  $\vec{r}_1$  –

$$L_{r1} = -um + vl.$$

Після виконання необхідних перетворень виразу (2), одержуємо:

$$\omega_r = -\frac{\partial u}{\partial x} lm + \frac{\partial v}{\partial y} lm + \frac{\partial v}{\partial x} l^2 - \frac{\partial u}{\partial y} m^2 \quad (6)$$

Для зручності подальшого аналізу скористаємось очевидним розкладанням:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

та лінійними диференціальними залежностями Коші:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Остаточно одержуємо важливе співвідношення для дослідження деформування площини –

$$\omega_r = (\varepsilon_y - \varepsilon_x) lm + \frac{1}{2} \gamma_{xy} (l^2 - m^2) + \omega. \quad (7)$$

В цьому співвідношенні перші два доданки визначають частку кута повороту  $\omega_r$  відрізка  $dr$ , яка залежить від його деформації. Останній доданок:

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (8)$$

описує однаковий для усіх напрямів жорсткий поворот.

Розглянемо тепер поворот головних осей. Для цього поєднаємо з головним напрямком  $I$  вісь  $x$  (рис. 1) ( $l = 1, m = 0$ ). Оскільки за визначенням зсув  $\gamma_{12}$  між головними осями дорівнює нулю, то з виразу (7) ( $l = 1, m = 0, \gamma_{xy} = \gamma_{12} = 0$ ) випливає, що кут повороту  $\omega_l$  головної осі дорівнює куту жорсткого повороту  $\omega$ .

$$\omega_l = \omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (9)$$

Одержані співвідношення дозволяють провести дослідження деформацій, що виникають у будь-яких двох ортогональних чи неортогональних напрямках.

Лінійні деформації вздовж обраних напрямів знаходяться безпосередньо з виразу (4). Особливість задачі полягає у визначенні деформації зсуву  $\gamma_{ab}$  двох неортогональних напрямів  $a$  і  $b$ . Для цього введемо нове поняття – кут відхилення  $\mathcal{G}$  відрізка  $dr$  від головної осі  $I$  в результаті деформування площини.

Як описано вище, в результаті деформування площини відрізок  $dr$  повернеться від свого початкового положення на кут  $\omega_r$ , а головна вісь – на кут  $\omega$  жорсткого повороту. Тому відхилення  $\mathcal{G}_r$  відрізка від головної осі становитиме:

$$\mathcal{G}_r = \omega - \omega_r \quad (10)$$

або враховуючи (7) –

$$\mathcal{G}_r = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)lm - \frac{1}{2}\gamma_{xy}(l^2 - m^2) \quad (11)$$

Зі співвідношення (11) разом з отриманим попередньо виразом (4) для лінійної деформації  $\varepsilon_r$  визначають деформації видовження та повороту напрямку  $r$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \gamma_{xy} lm; \\ \mathcal{G}_r = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)lm - \frac{1}{2}\gamma_{xy}(l^2 - m^2) \end{cases}$$

Легко пересвідчитись, що ці деформації в системі осей  $\varepsilon - \mathcal{G}$  описують коло. Для доведення поєднаємо осі  $xu$  з головними осями. Тоді для відрізка  $dr$ , що нахилений до головної осі  $I$  під кутом  $\alpha$ , приймаємо:

$$\begin{aligned} l &= \cos \alpha; & m &= -\sin \alpha; \\ l^2 &= 0,5(1 + \cos 2\alpha); & m^2 &= 0,5(1 - \cos 2\alpha); \\ l^2 - m^2 &= \cos 2\alpha; & \varepsilon_x &= \varepsilon_1; & \varepsilon_y &= \varepsilon_2; & \gamma_{xy} &= \gamma_{12} = 0. \end{aligned}$$

В результаті підстановок вирази (4) та (11) набувають такого вигляду:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + R \cos 2\alpha; \\ \mathcal{G}_r = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin 2\alpha = R \sin 2\alpha. \end{cases} \quad (12)$$

Вони описують зображене на рис. 2 коло (колову діаграму) з параметрами  $R$  і  $2\alpha$ . Центр кола

$C(\varepsilon_C, 0)$  лежить на осі  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_C = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$ ,

$\mathcal{G}_C = 0$ . Радіус кола  $R = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ . Координати точки

$r(\varepsilon_r, \mathcal{G}_r)$  згідно з залежностями (12) визначають деформації  $\varepsilon_r, \mathcal{G}_r$  відрізка  $dr$ , нахиленого до головної осі  $I$  під кутом  $\alpha$ . Точки  $a$  і  $b$  відповідають головним деформаціям  $\varepsilon_1$  і  $\varepsilon_2$ . Точка  $M(\varepsilon_C, \mathcal{G}_{\max})$  відповідає напрямку максимального відхилення  $\mathcal{G}_{\max}$  ( $\alpha = \pi/4$ ). Величина максимального відхилення згідно з виразом (12) становить:

$$\mathcal{G}_{\max} = 0,5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 0,5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = R \quad (13)$$

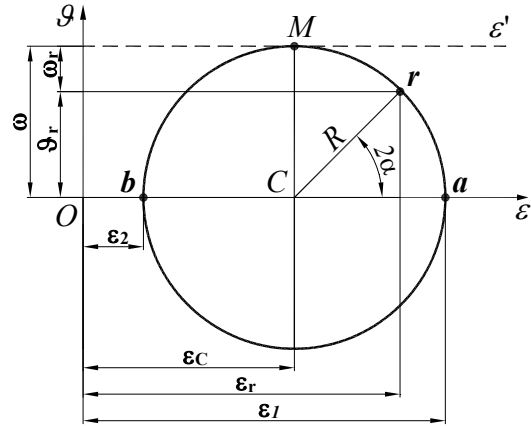


Рис. 2. Колова діаграма  $\mathcal{G} = f(\varepsilon)$

Отже, відхилення  $\mathcal{G}$  змінюється за синусоїдальним законом (12) від  $\mathcal{G} = 0$  для головного напрямку

до  $\mathcal{G}_{\max} = 0,5(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = R$  для напрямку  $\alpha = 45^\circ$ . Величина обернена цьому відхиленню, деформаційний поворот  $\omega_r = \omega - \mathcal{G}_r$ , зменшується від значення кута жорсткого повороту для головного напрямку  $\omega_{\max} = \omega$  до  $\omega_r = 0$  для напрямку  $\alpha = 45^\circ$ . Все вище сказане наочно ілюструє колова діаграма  $\mathcal{G} = f(\varepsilon)$  (рис. 2). Жорсткий поворот на діаграмі відображається паралельним зміщенням осі  $\varepsilon$  на величину  $\omega = R$  в положення  $\varepsilon'$ . Використовуючи співвідношення (10), з діаграми  $\varepsilon - \mathcal{G}$  легко знайти не тільки кут відхилення  $\mathcal{G}_r$  напрямку  $r$  від головної осі, але і повний кут  $\omega_r$  його повороту  $\omega_r = \omega - \mathcal{G}_r$ .

Узагальнюючи сказане, можна стверджувати, що введені співвідношення (12) і відповідна колова діаграма  $\varepsilon - \mathcal{G}$  більш повно, ніж загально прийняті співвідношення  $\varepsilon - \gamma$  та коло деформацій в осях  $\varepsilon - \gamma$ , описують деформування площини і зводять деформаційні співвідношення до стандартних перетворень системи координат: повороту і паралельного переносу осей.

Описування деформування площини новими показниками  $\varepsilon, \mathcal{G}$  замість звичайних  $\varepsilon, \gamma$  дозволяє уникнути відомих неспівпадін між тензорами напружень та деформацій.

Тензор деформацій вважається еквівалентним тензору напружень за умови, що замість повних зсувів  $\gamma$  в ньому враховуються їх половини  $0,5\gamma$ . Якщо ж замість зсувів  $\gamma$  ввести у розгляд відхилення  $\mathcal{G}$ , тензор деформацій буде абсолютно аналогічним тензору напружень, а колова діаграма  $\varepsilon - \mathcal{G}$  за усіма ознаками збігатиметься з кругом напружень Мора. Це дає можливість безпосередньо записувати деформаційні співвідношення за аналогією з відомими співвідношеннями для напружень, якщо замість нормальних напружень  $\sigma_\alpha$  прийняти видовження  $\varepsilon_r$ , а замість дотичних напружень  $\tau_\alpha$  – відхилення  $\mathcal{G}_r$ , замість кута орієнтації нормалі площинки – кут між напрямком  $r$  і головною віссю.

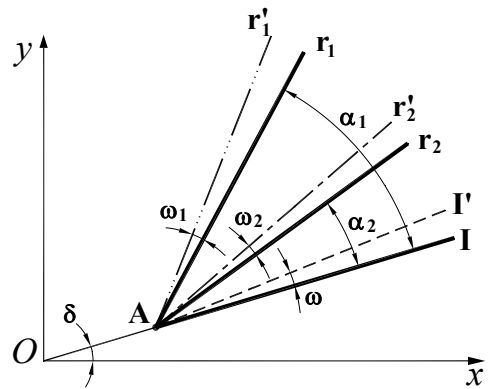


Рис. 3. Деформації довільних напрямів

Знаки  $\tau_\alpha$  і  $\mathcal{G}_r$  узгоджуються автоматично, оскільки вони пов'язані зі знаками кутів орієнтації нормалі та напрямку  $r$ .

Розглянемо тепер деформації по двох довільних напрямках. На рис. 3 показані два неортогональні напрямки  $Ar_1$  і  $Ar_2$ . Вони утворюють з головною віссю  $I$  кути  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$ , а сама вісь  $I$  нахилена до осі  $x$  під кутом  $\delta$ . Після деформування площини напрямки  $Ar_1, Ar_2, I$  повернуться відповідно на кути  $\omega_1, \omega_2, \omega$  і займуть положення  $Ar_1', Ar_2', I'$ . Початковий кут  $\alpha_1 - \alpha_2$  між напрямками зміниться на величину  $\gamma_{r_1 r_2}$ , яка за визначенням є зсувом між цими напрямками. Отже, зсув:

$$\gamma_{r_1 r_2} = \mathcal{G}_{r_2} - \mathcal{G}_{r_1}$$

або за модулем –

$$\gamma_{r_1 r_2} = \mathcal{G}_{r_1} - \mathcal{G}_{r_2} \tag{14}$$

Враховуючи залежність (11), одержуємо:

$$\gamma_{r_1 r_2} = (\varepsilon_x - \varepsilon_y)(l_{r_1} m_{r_1} - l_{r_2} m_{r_2}) - \frac{1}{2} \gamma_{xy} (l_{r_1}^2 - m_{r_1}^2 - l_{r_2}^2 + m_{r_2}^2) \tag{15}$$

Вираз (15) пов'язує зсув  $\gamma_{r_1 r_2}$  між двома довільними напрямками з деформаціями  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  за напрямками осей  $x, y$ .

Для зручності подальшого аналізу перейдемо до головних осей. Поєднаємо вісь  $x$  з головною віссю  $I$ . Тоді:

$$l_{r_1} = \cos \alpha_1; m_{r_1} = \sin \alpha_1; l_{r_2} = \cos \alpha_2; m_{r_2} = \sin \alpha_2; \varepsilon_x = \varepsilon_1; \varepsilon_y = \varepsilon_2; \gamma_{xy} = 0.$$

Після підстановки в (15) одержуємо:

$$\gamma_{r_1 r_2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} (\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) = R(\sin 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_2) = \mathcal{G}_{r_1} - \mathcal{G}_{r_2}, \tag{16}$$

де  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – кути нахилу  $Ar_1$  і  $Ar_2$  до головної осі  $I$ ;

$$R = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \text{ – радіус колової діаграми.}$$

У частинному випадку ортогональності напрямків  $\left( \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha_1 \right)$  одержуємо *нове* трактування

відомих в механіці деформівного тіла співвідношень для зсувів між неортогональними напрямками:

$$\gamma = 2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha_1,$$

$$\text{або } \frac{1}{2} \gamma = R \sin 2\alpha_1 = \vartheta_a \text{ (рис. 5),} \tag{17}$$

Метою описаних в статті досліджень є отримання співвідношень між компонентами деформацій по неортогональних *спряжених* напрямках. Для цього розглянемо два спряжені напрями – *Ba* і *Bb*, які нахилені до головної осі *I* під кутами  $\alpha$  і  $-\beta$  (рис. 4). Співвідношення між кутами  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\eta$  встановлене в [2]. Воно впливає з простих геометричних перетворень (рис. 5).  $\angle CBA = \angle CAB$ ,  $\angle CBA = 2\beta + \eta$ ,  $\angle CAB = 2\alpha - \eta$ . Отже,  $\alpha - \beta = \eta$ , де  $\eta$  – кут відхилення повного напруження від нормалі. В цьому співвідношенні кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta$  взяті за модулем.

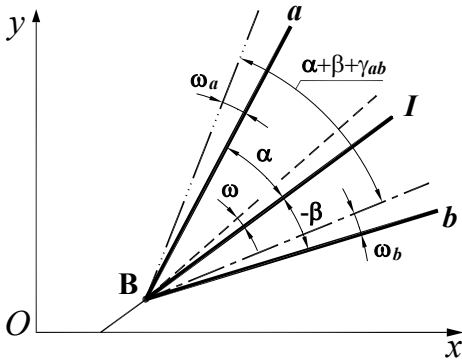


Рис. 4. Деформації по спряжених напрямках

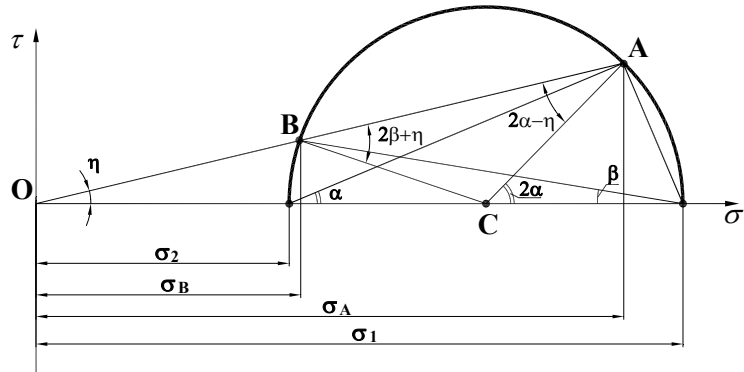


Рис. 5. До виводу співвідношень між напруженнями для спряжених площинок

Зсув між спряженими напрямками безпосередньо одержимо з виразу (16), підставивши в нього кути  $\alpha$  і  $-\beta$ .

$$\gamma_{ab} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} (\sin 2\alpha + \sin 2\beta) = \vartheta_a + \vartheta_b, \tag{18}$$

а лінійні деформації по цих напрямках визначаються співвідношенням (4).

Зміст одержаних співвідношень ілюструє рисунок 6. На ньому показана колова діаграма  $\vartheta = f(\varepsilon)$ . Координати точок *a* і *b* діаграми визначають деформації за спряженими напрямками *fa*, *fb*, що нахилені до головної осі під кутами  $\alpha$  і  $-\beta$ . Проведені через полюс *f* відрізки *fa* і *fb* паралельні вказаним напрямкам. Точка *a*<sub>1</sub> відповідає напрямку, який перпендикулярний напрямку *fa*. Як видно з рисунка, зсув

$$\gamma_{aa_1} = \vartheta_a - \vartheta_b = \vartheta_a - (-\vartheta_b) = \vartheta_a + \vartheta_b \tag{19}$$

визначається як сума відрізків  $\vartheta_a$  і  $\vartheta_b$ , а зсув  $\gamma_{aa_1}$  між ортогональними напрямками *fa* і *fa*<sub>1</sub> – як сума відрізків *aa'* та *a*<sub>1</sub>*a'*<sub>1</sub>

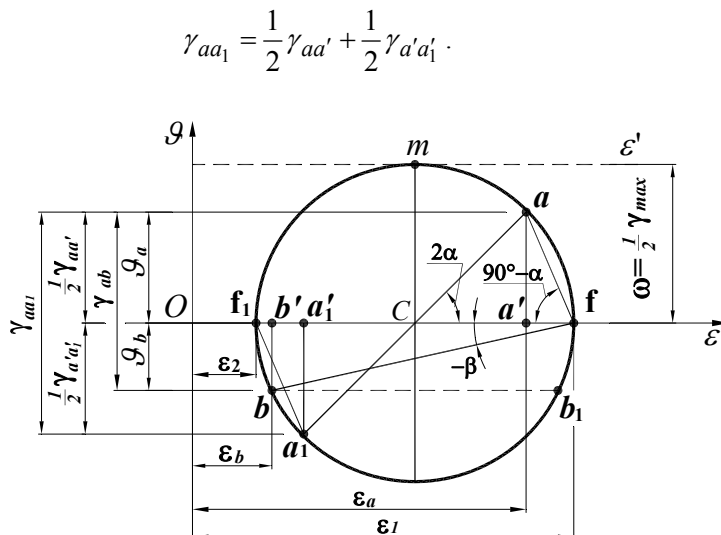


Рис. 6. Порівняння колових діаграм

Отже, відоме коло деформацій  $\varepsilon - \gamma$ , що описує деформації тільки для ортогональних напрямів, може розглядатись як частковий випадок колової діаграми  $\mathcal{G} = f(\varepsilon)$ .

Одержані аналітичні співвідношення і колова діаграма дозволяють знайти деформації по спряжених напрямках тільки у випадку, якщо задана їх орієнтація, наприклад, кутами  $\alpha, \beta$ .

За визначенням, спряжені напрями збігаються з нормаллями площинок, по яких повне напруження відхиляється від нормалей на однаковий кут  $\eta$ . Тому для визначення орієнтації спряжених напрямів необхідно повернутись до розгляду напруженого стану [2]. Для цього порівняємо коло Мора, що описує зміну напружень  $\tau, \sigma$  при повороті нормалі, з коловою діаграмою  $\mathcal{G} - \varepsilon$  (рис. 7).

Спряженим напрямкам на колу Мора відповідають точки  $A$  і  $B$ , для яких однакове відношення напружень  $\frac{\tau}{\sigma}$ , а, отже, і однаковий кут відхилення повного напруження від нормалі

$$\frac{\tau_\alpha}{\sigma_\alpha} = \frac{\tau_\beta}{\sigma_\beta} = \operatorname{tg} \eta.$$

Ці точки лежать на перетині з колом напружень двох променів  $OA, OB$ , які проведені з початку координат  $O\sigma\tau$  під кутом  $\eta$ .

В загальному випадку відношення деформацій  $\frac{\mathcal{G}}{\varepsilon}$  за цими напрямками не збігається з відношенням напружень  $\frac{\tau}{\sigma}$ . Як видно з рис. 7 умова еквівалентності кола напружень Мора і колової діаграми деформацій повністю виконується, якщо змістити початок координат кола деформацій з положення  $O_1$  на величину  $t$  в положення  $O$ . В цьому випадку

$$\frac{\mathcal{G}}{\varepsilon + t} = \frac{\tau}{\sigma} = \operatorname{tg} \eta.$$

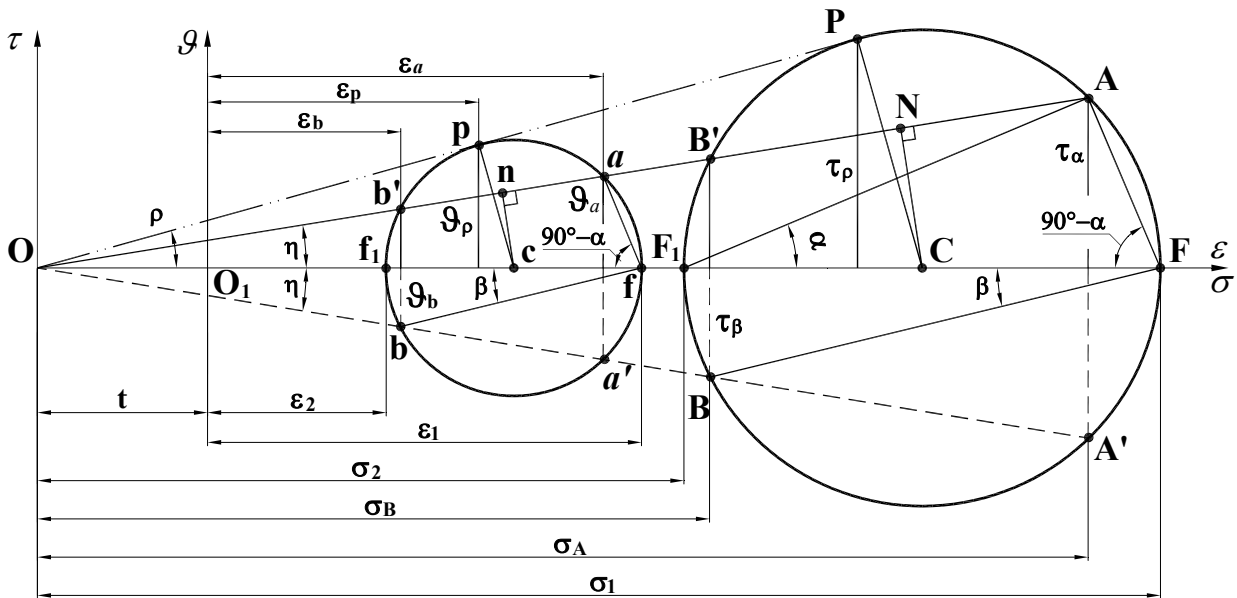


Рис. 7. Порівняння колової діаграми з колом Мора

З урахуванням зміщення  $t$  положення спряжених напрямів, як на колу Мора, так і на коловій діаграмі однозначно визначається точками  $A, B, a, b$  перетину з колом і діаграмою променів, нахилених до головної осі під кутом  $\eta$ . Це відноситься до усіх спряжених напрямів, в тому числі до важливих для сипких середовищ напрямів максимального відхилення (точки  $P$  і  $p$ ).

Після визначення положень спряжених напрямів можна проаналізувати зміну величини зсуву між цими напрямками. Перш за все визначимось за якими спряженими напрямками зсув досягає максимальної величини.

Доведемо теорему. *З усіх пар спряжених напрямів максимальні зсуви відповідають напрямкам з найбільшим відхиленням повного напруження від нормалі.*

Згідно (19) для пари довільних спряжених напрямів  $a, b$  зсув  $\gamma_{ab}$  визначається як сума відхилень кожного з напрямів

$$\gamma_{ab} = \mathcal{G}_a + \mathcal{G}_b.$$

Для напрямів, що відповідають максимальному відхиленню повного напруження

$$\gamma_\rho = 2\mathcal{G}_\rho.$$

Необхідно довести, що  $\gamma_{ab} < \gamma_\rho$  або  $\frac{\gamma_{ab}}{\mathcal{G}_\rho} < 1$ .

Визначимо зсуви через радіус  $R$  колової діаграми і позначені на рис. 7 кути  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\rho$ , приймаючи їх значення за модулем

$$\gamma_{ab} = 2R \cos \eta \sin(\alpha + \beta);$$

$$\gamma_\rho = 2R \cos \rho.$$

Проаналізуємо зміну величини відношення

$$\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\rho} = \frac{\cos \eta}{\cos \rho} \sin(\alpha + \beta).$$

При  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\cos \eta \rightarrow 1$ ,  $\sin(\alpha + \beta) \rightarrow 0$ ,  $\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\rho} \rightarrow 0$ .

При  $\eta \rightarrow \rho$ ,  $\cos \eta \rightarrow \cos \rho$ ,  $\sin(\alpha + \beta) \rightarrow 1$ ,  $\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\rho} \rightarrow 1$ .

Оскільки  $\cos \eta \sin(\alpha + \beta)$  в інтервалі  $|0 \leq \eta \leq \rho|$  та  $\left| \frac{\pi}{2} \geq (\alpha + \beta) \geq 0 \right|$  є монотонною функцією,

$\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_\rho} < 1$ , або  $\gamma_{ab} < \gamma_\rho$ . **Теорему доведено.**

Слід звернути увагу, що в теоремі розглядаються зсуви тільки між спряженими напрямками. Її висновки не розповсюджуються на ортогональні напрями. Наприклад, для напрямів  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\beta = -45^\circ$ , які не є спряженими  $\gamma_{\max} = 2\mathcal{G}_{\max} > \gamma_\rho$ .

Тепер розглянемо пряму і обернену задачі з використанням деформаційних співвідношень для спряжених напрямів.

**Пряма задача.** Відомі головні деформації  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Необхідно визначити деформації по спряжених напрямках.

**Графічний розв'язок** полягає у визначенні з колової діаграми відрізків  $\mathcal{G}_a$  і  $\mathcal{G}_b$  і зсуву  $\mathcal{G}_{ab} = \mathcal{G}_a + \mathcal{G}_b$ .

**Аналітичний розв'язок** зводиться до використання залежностей (12), приймаючи в них величини попередньо визначених кутів  $\alpha$  і  $\beta$

$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_1 \cos^2 \alpha + \varepsilon_2 \sin^2 \alpha; \\ \varepsilon_b = \varepsilon_1 \cos^2 \beta + \varepsilon_2 \sin^2 \beta; \\ \mathcal{G}_a = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\alpha; \\ \mathcal{G}_b = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\beta. \end{cases} \quad (20)$$

Зсув між напрямками  $a$  і  $b$

$$\gamma_{ab} = \mathcal{G}_a + \mathcal{G}_b. \quad (21)$$

**Обернена задача.** За відомими деформаціями  $\varepsilon_a$ ,  $\mathcal{G}_a$ ,  $\varepsilon_b$ ,  $\mathcal{G}_b$  по спряжених напрямках визначити величини головних деформацій.

**Графічний розв'язок.** За координатами  $\varepsilon_a$ ,  $\mathcal{G}_a$  визначають положення точки  $a$  (рис. 7), а за координатами  $\varepsilon_b$ ,  $\mathcal{G}_b$  – положення точки  $b$ . З середини хорди  $ab'$  проводять перпендикуляр  $nc$ , точка перетину якого з віссю  $\varepsilon$  визначає положення центру  $c$  колової діаграми, а відрізки  $ca$  і  $cb'$  є радіусами діаграми. Точки  $f$  і  $f_1$  її перетину з віссю  $\varepsilon$  відповідають головним деформаціям  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ .

**Аналітичний розв'язок.** Для аналітичного розв'язання оберненої задачі необхідно розв'язати систему тригонометричних рівнянь (20) відносно головних деформацій  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Результат прямого розв'язку є достатньо громіздким і тому тут не приводиться. Більш зручно представити головні деформації через

інваріанти деформаційного стану, як це зроблено для напружень [2], або використати аналогію між напруженим і деформаційним станами. Як видно з рис. 7, співвідношення між компонентами напружень будуть повністю еквівалентними співвідношенням між компонентами деформацій, якщо змістити початок координат  $O_1$  системи осей деформацій  $\varepsilon - \mathcal{G}$  на величину  $t$  в положення  $O$ .

Величину зміщення  $t$  знайдемо з умови подібності кола Мора і колової діаграми  $\varepsilon - \mathcal{G}$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\tau}{\sigma} = \frac{\mathcal{G}}{t + \varepsilon}.$$

Для спряжених напрямів  $a, b$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{\mathcal{G}_a}{t + \varepsilon_a} = \frac{\mathcal{G}_b}{t + \varepsilon_b}.$$

Звідки

$$t = \frac{\varepsilon_a \mathcal{G}_b - \varepsilon_b \mathcal{G}_a}{\mathcal{G}_a - \mathcal{G}_b}, \quad (22)$$

або через спряжені напрями  $\rho$ , що відповідають площинкам найбільшого відхилення  $\eta_{\max} = \rho$  (точка  $p$  на діаграмі)

$$t = \frac{\mathcal{G}_\rho}{\operatorname{tg} \rho} - \varepsilon_\rho. \quad (23)$$

Після знаходження величини  $t$  усі формули для деформацій безпосередньо одержуються з формул для напружень, якщо замість напруження  $\tau$  підставляти деформацію  $\mathcal{G}$ , а замість напруження  $\sigma - (t + \varepsilon)$ .

Таким чином, подібність конкретних напруженого і деформаційного станів визначається двома параметрами –  $t$  і  $\rho$ . Враховуючи те, що між напруженнями і деформаціями існують складні співвідношення, котрі для кожного матеріалу встановлюються експериментально, ці фізичні залежності для сипких матеріалів можуть бути встановлені як залежності між параметрами  $t$  і  $\rho$ .

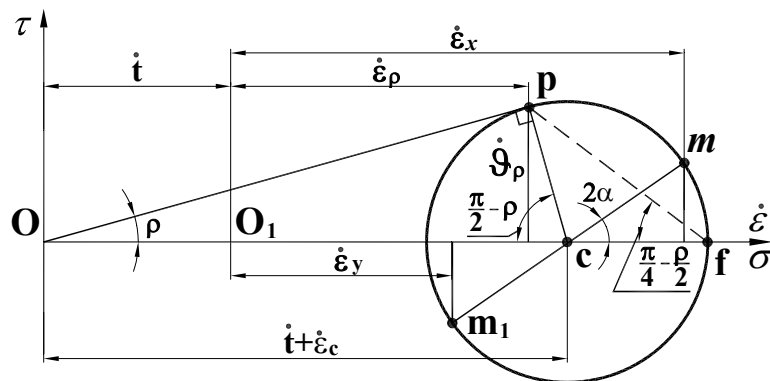


Рис. 8. Колова діаграма швидкостей деформацій

В теорії пластичності крім кінцевих деформацій широко використовуються поняття приростів деформацій  $\{\Delta\varepsilon\}$ ,  $\{d\varepsilon\}$ , або швидкостей приросту деформацій  $\{\dot{\varepsilon}\}$ . Усі наведені попередньо співвідношення для деформацій  $\{\varepsilon\}$  безпосередньо можуть бути використаними для описання швидкостей  $\{\dot{\varepsilon}\}$  деформацій. Наприклад, координати  $\mathcal{G}_\rho, \varepsilon_\rho$  точки  $p$  (рис. 8), що відповідає площинці максимального відхилення, яка в механіці сипкого середовища асоціюється з площиною ковзання, характеризуються співвідношеннями

$$\operatorname{tg} \rho = \frac{\mathcal{G}_\rho}{t + \dot{\varepsilon}_\rho} = \operatorname{tg} \eta_{\max}.$$

Координати точки  $p$ , що відповідає площинці максимального відхилення легко визначити з геометричних співвідношень (рис. 7)

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_\rho &= \dot{\varepsilon}_c - \dot{r} \sin \rho; \\ \mathcal{G}_\rho &= \dot{r} \cos \rho, \end{aligned} \quad (24)$$

де  $\dot{r}$  – радіус колової діаграми швидкостей деформацій.

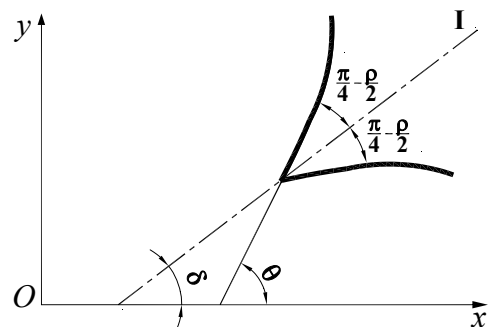


Рис. 9. Положення ліній ковзання в сипкому середовищі



Напрями максимального відхилення утворюють з головною віссю  $I$  кути  $\frac{\pi}{4} \pm \frac{\rho}{2}$  і асоціюються в статистиці сипкого середовища з лініями ковзання. На рис. 9 показано положення головної осі  $I$  і однієї пари ліній ковзання в декартовій системі координат  $xOy$ . Безпосередньо з колової діаграми одержуємо вирази для швидкостей деформацій по ортогональним напрямкам  $x, y$

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \dot{\varepsilon}_\rho + \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} (\sin \rho + \cos 2\delta); \\ \dot{\varepsilon}_y &= \dot{\varepsilon}_\rho + \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} (\sin \rho - \cos 2\delta); \\ \dot{\gamma}_{xy} &= 2 \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} \sin 2\delta.\end{aligned}\quad (25)$$

З урахуванням нахилу  $\theta$  лінії ковзання (першої характеристики [1]) до осі  $x$  (рис. 8)

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_x &= \dot{\varepsilon}_\rho + \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} (\sin \rho + \cos(2\theta + \rho)); \\ \dot{\varepsilon}_y &= \dot{\varepsilon}_\rho + \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} (\sin \rho - \sin(2\theta + \rho)); \\ \dot{\gamma}_{xy} &= \frac{\dot{\vartheta}_\rho}{\cos \rho} \cos(2\theta + \rho).\end{aligned}\quad (26)$$

**Висновки.** Введення деформацій  $\varepsilon_r, \mathcal{G}_r$  за напрямом для аналізу деформування площини в умовах плоскої задачі розширює положення загальної теорії деформацій, оскільки дає можливість визначати деформації по довільних напрямках, в тому числі по неортогональним *спряженим* напрямкам, які асоціюються з лініями ковзання в сипкому середовищі.

Одержані співвідношення можуть бути безпосередньо використаними при побудові деформаційної моделі сипкого середовища.

### Література

1. Соколовський В.В. Статика сыпучей среды – М.: Физматгиз, 1960. – 243 с.
2. Ковтун В.В. Напряжения по потенциальних площинках ковзання у сипкому середовищі // Вісник Хмельницького національного університету. – Технічні науки. – 2010. – № 1. С.7-12.
3. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести – М.: Высшая школа, 1961. – 536 с.
4. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела – М.: Наука, 1975. – 832 с.

Надійшла 23.11.2010 р.

УДК 679.85 (047)

В.И. КОНДРАТЮК  
Хмельницкий национальный университет

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОТХОДОВ КАМНЕОБРАБОТКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДСТВА ОБЛИЦОВОЧНЫХ ПЛИТ

*В статье рассмотрены современные технологии использования отходов камнеобработки для изготовления облицовочных плит.*

*In the article modern technologies of utilization of wastes are considered stone of treatment for making of facings flags.*

Ключевые слова: облицовочные плиты, производство, отходы камнеобработки.

Несмотря на значительно возросший технический уровень камнедобычи и камнеобработки отходы при производстве облицовочных изделий из природного камня достигают 80 %. При этом, отходы на операциях распиловки и окантовки составляют 15– 25 %. Один из путей уменьшения материалоемкости изделий заключается в использовании отходов для изготовления облицовочной плиты.

В статье систематизированы существующие технологии и предложены новые технологические решения по использованию отходов камнеобработки.

Для систематизации существующих технологических решений разработана классификация