

навчальним процесом : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 05.13.06 / Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури Національна медична академія післядипломної освіти імені П. Л. Шупика / М. С. Антоник. – Львів, 2005. – 20 с.

9. Носов П. С. Інтелектуальне формування індивідуальної траєкторії навчання студента : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. техн. наук : 05.13.23 / Одеський національний політехнічний університет / П. С. Носов. – Одеса, 2007. – 17 с.

10. Мельник А. М. Моделювання результативності навчання в інтелектуальних адаптивних навчальних системах / А. М. Мельник, Р. М. Пасічник // Інформаційні технології та комп'ютерна інженерія. – 2009. – № 3. – С. 107–117.

Надійшла 13.1.2011 р.

УДК 519.21

А.Б. ГОРКУНЕНКО, А.М. ЛУЦКІВ, С.А. ЛУПЕНКО  
Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА СТАТИСТИЧНИЙ СУМІСНИЙ АНАЛІЗ ВЗАЄМОПОВ'ЯЗАНИХ ЕКОНОМІЧНИХ ЦИКЛІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

*У роботі застосовано новий підхід до сумісного аналізу декількох взаємопов'язаних економічних процесів із використанням їх математичної моделі у вигляді вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, що у методах їх аналізу та прогнозування дало можливість враховувати стохастичність, повторюваність у часі, змінність та спільність ритму досліджуваних економічних процесів.*

*The paper applies a new approach to joint analysis of several interrelated economic processes using their mathematical models as a vector of random cycle-related rhythmic processes that provided the possibility to take into account stochasticity, time repetition, variability and rhythm synchronism of the economical processes under investigation in the methods of their analysis.*

Ключові слова: економічні циклічні процеси, математичне моделювання, методи аналізу та прогнозу, вектор циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів.

### Вступ

Розробка сучасних математичних моделей, методів та програмних засобів підтримки прийняття рішень стосовно задач аналізу та прогнозу економічних процесів [1, 2], зокрема економічних циклічних процесів [3, 4], є важливою науково-прикладною задачею. Незважаючи на досить велику кількість наукових публікацій із цього приводу, наявності ряду програмних засобів аналізу та прогнозу циклічних економічних процесів, актуальним залишається підвищення точності, достовірності та глибини прогнозування циклічних економічних процесів. У роботах [5, 6], для аналізу та прогнозу економічного циклічного процесу обґрунтовано його математичну модель у вигляді циклічного випадкового процесу, що уможливило адаптацію статистичних методів аналізу та прогнозування цих економічних процесів до змін ритму (темпу) їх коливання. Однак даний підхід до математичного моделювання немає засобів врахування спільності ритму декількох взаємопов'язаних циклічних економічних процесів, що робить проблематичним проведення їх сумісного статистичного аналізу та прогнозу.

Дана робота присвячена математичному моделюванню та сумісному статистичному аналізу сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів з метою розробки методів їх прогнозування.

### Основна частина

#### Математична модель сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів

Типовими прикладами взаємопов'язаних економічних циклічних процесів є індекс активності нерухомого майна та індекс активності рентного доходу. На рисунках 1 та 2 надано приклади реєстрограм цих економічних процесів, а саме, індекс активності нерухомого майна США та індекс активності рентного доходу США. Дані індекси є розрахованими компанією “Google” відносно відповідних значень цих величин станом на 1 січня 2004 року, що умовно прийняті за одиницю (тому реєстрограми надано в умовних одиницях).

Метод прогнозування безпосередньо базується на методі статистичного аналізу досліджуваних процесів, оскільки результати такого аналізу є вхідними даними для процедури побудови прогнозів (прогнозних рішень). Точність та достовірність аналізу суттєво залежить від обґрунтованої для задач прогнозування математичної стохастичної моделі сукупності взаємопов'язаних циклічних економічних процесів, оскільки основним етапом розробки статистичних сумісних методів аналізу та прогнозування циклічних економічних процесів є створення (чи обґрунтування) адекватної математичної моделі сукупності взаємопов'язаних циклічних економічних процесів.

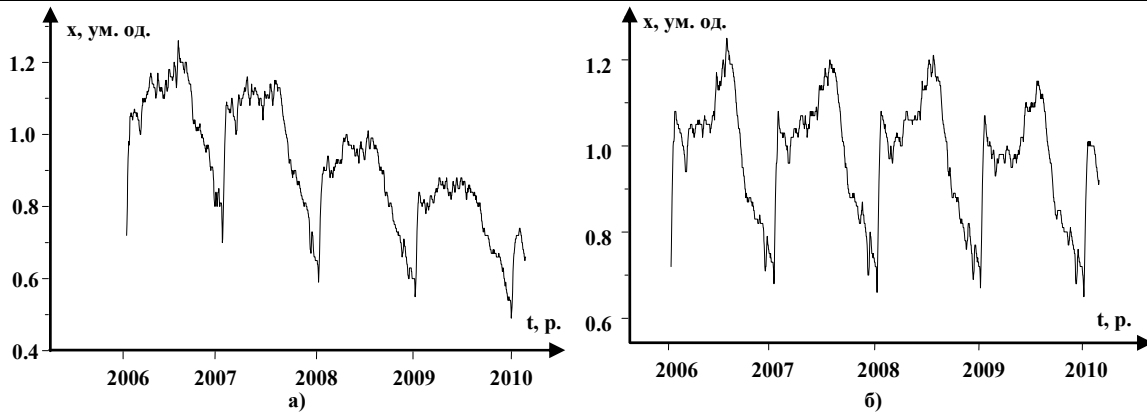


Рис. 1. Графіки реєстрограм взаємопов'язаних циклічних економічних процесів: а) індекс активності нерухомого майна США; б) індекс активності рентного доходу США

У даній роботі сукупність із  $N$  взаємопов'язаних циклічних економічних процесів у математичному сенсі трактується як вектор випадкових процесів  $\mathbf{Y}_N(\omega, t) = \{y_i(\omega, t), i = \overline{1, N}, \omega \in \Omega, t \in \mathbf{W}\}$ , кожна компонента якого, може бути подана у вигляді такої суми:

$$y_i(\omega, t) = f_i(t) + \xi_i(\omega, t), i = \overline{1, N}, \omega \in \Omega, t \in \mathbf{W}, \quad (1)$$

де  $\{f_i(t), i = \overline{1, N}, t \in \mathbf{W}\}$  – сукупність трендових складових, а вектор випадкових процесів  $\Theta_N(\omega, t) = \{\xi_i(\omega, t), i = \overline{1, N}, \omega \in \Omega, t \in \mathbf{W}\}$  є вектором циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, для якого згідно роботи [7], його сумісні  $k$ -вимірні функції розподілу є інваріантними за сукупністю часових аргументів, а саме:

$$F_{k_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}}(x_1, \dots, x_k; t_1, \dots, t_k) = F_{k_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}}(x_1, \dots, x_k; t_1 + T(t_1, n), \dots, t_k + T(t_k, n)), \quad (2)$$

$$k \in \mathbf{N}, n \in \mathbf{Z}, i_1, \dots, i_k = \overline{1, N}, t_1, \dots, t_k \in \mathbf{W}.$$

Множина функцій  $\Gamma = \{y(t, n) = t + T(t, n), n \in \mathbf{Z}\}$  є циклічною розривною зліченною групою перетворень (стосовно операції суперпозиції цих перетворень), де функція  $T(t, n)$ , яку названо функцією ритму, задовольняє таким умовам:

1.

$$\begin{aligned} \text{а) } T(t, n) &> 0, \text{ якщо } n > 0 \quad (T(t, 1) < \infty); \\ \text{б) } T(t, n) &= 0, \text{ якщо } n = 0; \\ \text{в) } T(t, n) &< 0, \text{ якщо } n < 0, t \in \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (3)$$

2. Для будь-яких  $t_1 \in \mathbf{W}$  та  $t_2 \in \mathbf{W}$ , для яких  $t_1 < t_2$ , для функції  $T(t, n)$  виконується строга нерівність:

$$T(t_1, n) + t_1 < T(t_2, n) + t_2, \forall n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

3. Функція  $T(t, n)$  є найменшою за модулем  $(|T(t, n)| \leq |T_\gamma(t, n)|)$  серед усіх таких функцій  $\{T_\gamma(t, n), \gamma \in \Gamma\}$ , які задовольняють умови (3) та (4).

Областю визначення випадкового вектора  $\mathbf{Y}_N(\omega, t)$  є декартовий добуток множин  $\mathbf{W}$  та  $\Omega$ , де  $\mathbf{W}$  є впорядкованою дискретною  $\mathbf{W} = \mathbf{D} = \{t_{ml} \in \mathbf{R}, m \in \mathbf{Z}, l = \overline{1, L}, L \geq 2\}$  множиною або множиною  $\mathbf{W} = \mathbf{R}$  дійсних чисел, що відображає часову змінну, а множина  $\Omega$  є множиною елементарних випадкових подій. Якщо множина  $\mathbf{W} = \mathbf{D}$  є дискретною, то для її елементів має місце такий тип лінійного упорядкування:  $t_{m_1 l_1} < t_{m_2 l_2}$ , якщо  $m_2 > m_1$  або, якщо  $m_2 = m_1$ ,  $l_2 > l_1$ , в інших випадках  $t_{m_1 l_1} > t_{m_2 l_2}$  ( $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ ,  $l_1, l_2 \in \overline{1, L}$ ,  $0 < t_{m, l+1} - t_{m, l} < \infty$ ).

Використання даної моделі дає змогу одночасно врахувати наявність трендових складових, стохастичність, циклічність, мінливість та спільність ритму сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів та розширити сферу застосування стохастичного підходу до моделювання та сумісного аналізу циклічних процесів із однаковою ритмічною структурою.

### Методи обробки сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів

#### Вилучення трендових складових

Першим етапом обробки сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів є процедура

розділення трендових складових  $\{f_i(t), i = \overline{1, N}, t \in \mathbf{W}\}$  та сукупності циклічних компонент  $\{\xi_i(\omega, t), i = \overline{1, N}, \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}\}$ , що дає змогу проводити їх аналіз та прогноз окремо. Оцінювання трендових складових загалом є нетривіальною задачею. У даній роботі ця задача вирішувалась за допомогою методу найменших квадратів, трендова крива вибиралася з класу поліномів третього порядку.

Циклічні компоненти визначались шляхом віднімання трендових складових із компонент вектора  $\mathbf{Y}_N(\omega, t)$ , а саме:

$$\xi_i(\omega, t) = y_i(\omega, t) - f_i(t), i = \overline{1, N}, \omega \in \mathbf{\Omega}, t \in \mathbf{W}. \quad (5)$$

### Статистичне оцінювання ймовірнісних характеристик вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів

Оскільки згідно із математичною моделлю (1) вектор  $\mathbf{\Theta}_N(\omega, t)$  є вектором циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, то це уможливило використання для оцінювання ймовірнісних характеристик сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів розроблені в роботах [8, 9] статистичні методи. Згідно цих робіт запишемо формули для обчислення реалізацій відповідних статистичних оцінок ймовірнісних характеристик вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів.

Реалізація статистичної оцінки математичного сподівання:

$$\hat{m}_{\xi_i}(t) = \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \xi_{i\omega}(t + T(t, n)), t \in \mathbf{W}_{c_1} = [\tilde{t}_1, \tilde{t}_2), \quad (6)$$

де  $M$  – кількість зареєстрованих циклів, а  $\mathbf{W}_{c_1}$  – область визначення першого циклу економічного процесу.

Реалізація статистичної оцінки змішаної центральної моментної функції порядку  $p = \sum_{j=1}^k R_j$ :

$$\hat{r}_{p_{\xi_{i_1} \dots \xi_{i_k}}}(t_1, \dots, t_k) = \frac{1}{M - M_1} \sum_{n=0}^{M - M_1} \left( \xi_{i_1\omega}^{R_1}(t_1 + T(t_1, n)) - \hat{m}_{\xi_{i_1}}(t_1 + T(t_1, n)) \right)^{R_1} \dots \left( \xi_{i_k\omega}^{R_k}(t_k + T(t_k, n)) - \hat{m}_{\xi_{i_k}}(t_k + T(t_k, n)) \right)^{R_k}, t_1 \in \mathbf{W}_{c_1}, t_2, \dots, t_k \in \bigcup_{m=1}^{M_1} \mathbf{W}_{c_m}, i_1, \dots, i_k = \overline{1, N}. \quad (7)$$

При  $p = 2$  та  $k = 2$ , функція  $r_{2_{\xi_{i_1} \xi_{i_2}}}(t_1, t_2), t_1 \in \mathbf{W}_{c_m}, t_2 \in \mathbf{R}$  є взаємною кореляційною функцією циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів  $\xi_{i_1}(\omega, t)$  та  $\xi_{i_2}(\omega, t)$  на області  $\mathbf{W}_{c_m} \times \mathbf{R}$ . У формулі (7) множина  $\mathbf{W}_{c_m}$  є областю визначення  $m$ -го циклу досліджуваного економічного процесу, а  $M_1$  – кількість економічних циклів, у рамках яких набирають значення аргументу  $t_2, \dots, t_k$ .

Використавши критерій згоди  $\chi^2$  з довірчою ймовірністю 0,95 встановлено несуперечність нормальному закону розподілу досліджуваних циклічних економічних процесів. Враховуючи встановлену несуперечність розподілу циклічних економічних процесів нормальному закону розподілу, слушним є проведення аналізу цих економічних процесів лише в рамках перших двох моментних функцій.

Таким чином, при проведенні статистичного оцінювання циклічних компонент сукупності взаємопов'язаних економічних процесів достатньо оцінити вектор їх математичних сподівань  $\mathbf{M}_{\xi}(t) = \{m_i(t), i = \overline{1, N}\}, t \in [0, T_1)$  та матрицю їх кореляційних функцій  $\mathbf{R}(t_1, t_2) = \{r_{ij}(t_1, t_2), i, j = \overline{1, N}\}$ . Відзначимо, що на діагоналі матриці кореляцій  $\mathbf{R}(t_1, t_2)$ , при  $i = j$ , будемо мати автокореляційні функції компонент вектора  $\mathbf{\Theta}_N(\omega, t)$ , а при  $i \neq j$  отримуються взаємні кореляційні функції.

З метою оцінювання функції ритму досліджуваних економічних процесів використано метод, який розроблено в роботі [10], що полягає у кусково-лінійній інтерполяції їх дискретної функції ритму  $T(\tilde{t}_{m,i}, n)$ , яка отримана на базі інформації про зонну (сегментну) структуру циклічних процесів. Інтерполяційна функція  $\hat{T}(t, 1)$  має такий вигляд:

$$\hat{T}(t, 1) = \sum_{m \in \mathbf{Z}} \sum_{i=1}^N \hat{T}_{mi}(t), t \in \mathbf{R}, \quad (8)$$

де  $\{\hat{T}_{mi}(t)\}$  – множина функцій, які дорівнюють:

$$\hat{T}_{mi}(t) = \begin{cases} k_{mi} \cdot t + b_{mi}, t \in \mathbf{W}_{mi}, \\ 0, t \notin \mathbf{W}_{mi}, m \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, N} \end{cases} \quad (9)$$

Область  $\mathbf{W}_{mi} = [\tilde{t}_{mi}, \tilde{t}_{m,i+1})$  відповідає  $i$ -й зоні в  $m$ -му циклі економічного процесу. Якщо  $i = N$ , то  $\tilde{t}_{m,N+1} = \tilde{t}_{m+1,1}$ . Звичайно, на практиці  $m$  набирає свої значення зі скінченної підмножини цілих чисел.

Коефіцієнти  $\left\{ k_{mi}, m \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, N} \right\}$  та  $\left\{ b_{mi}, m \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, N} \right\}$  визначаються за співвідношеннями:

$$k_{mi} = \frac{T(\tilde{t}_{m,i+1}, 1) - T(\tilde{t}_{m,i}, 1)}{\tilde{t}_{m,i+1} - \tilde{t}_{m,i}}, m \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, N}, \quad (10)$$

$$b_{mi} = T(\tilde{t}_{m,i+1}, 1) - \frac{T(\tilde{t}_{m,i+1}, 1) - T(\tilde{t}_{m,i}, 1)}{\tilde{t}_{m,i+1} - \tilde{t}_{m,i}} \cdot \tilde{t}_{m,i+1}, m \in \mathbf{Z}, i = \overline{1, N}. \quad (11)$$

### Результати статистичного аналізу сукупності взаємопов'язаних циклічних економічних процесів

З метою апробації обґрунтованих вище математичної моделі та методів обробки взаємопов'язаних циклічних економічних процесів проведено серію експериментів по їх обробці, зокрема індексу активності нерухомого майна США та індексу активності рентного доходу США зображених на рисунку 2, де вони зображені після вилучення тренду.

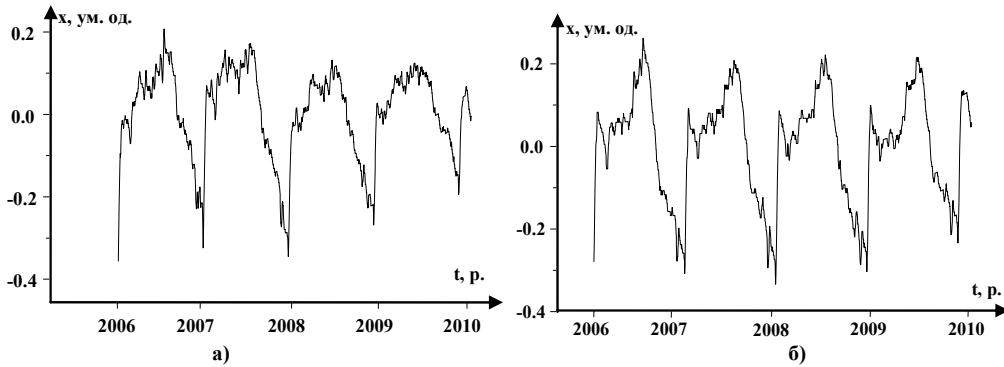


Рис. 2. Індекс активності нерухомого майна США (а) та індекс активності рентного доходу США (б) після вилучення тренду

На рисунку 3, надано графіки оцінок функцій ритму досліджуваних економічних циклічних процесів, з якого видно мінливість ритму досліджуваних економічних процесів.

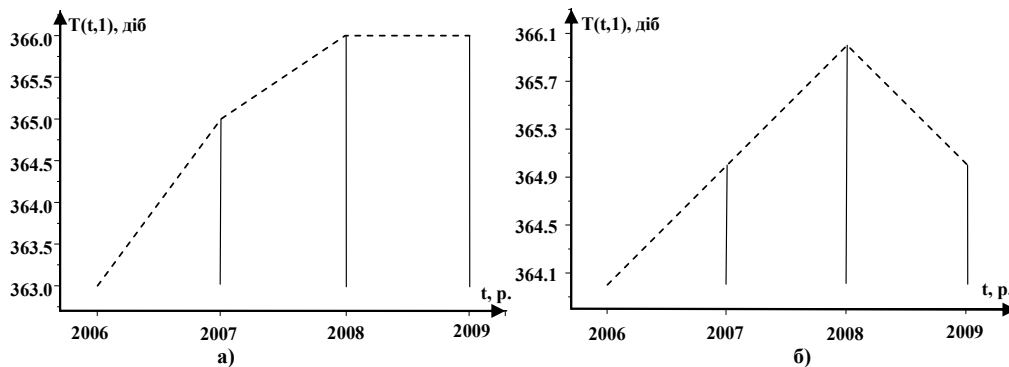


Рис. 3. Функції ритму індексу активності нерухомого майна США (а) та індексу активності рентного доходу США (б)

На рисунках 4–7 надано графіки реалізацій оцінок ймовірнісних характеристик (математичних сподівань, дисперсій, автокореляційних функцій та взаємної кореляційної функції) індексу активності нерухомого майна США та індексу активності рентного доходу США при їх статистичній обробці.

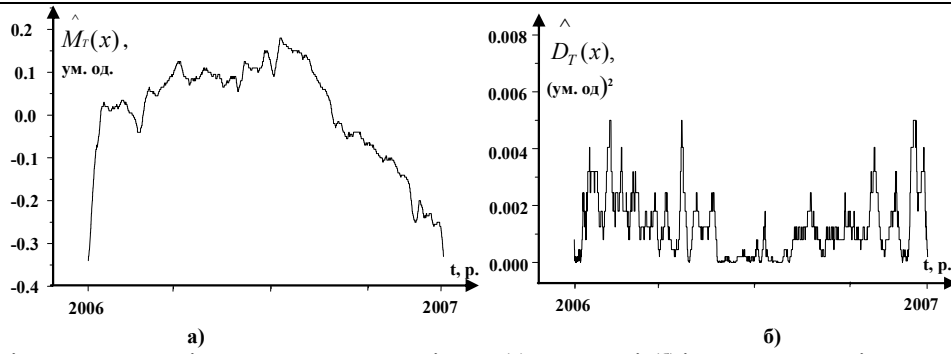


Рис. 4. Реалізації статистичних оцінок математичного сподівання (а) та дисперсії (б) індексу активності нерухомого майна США

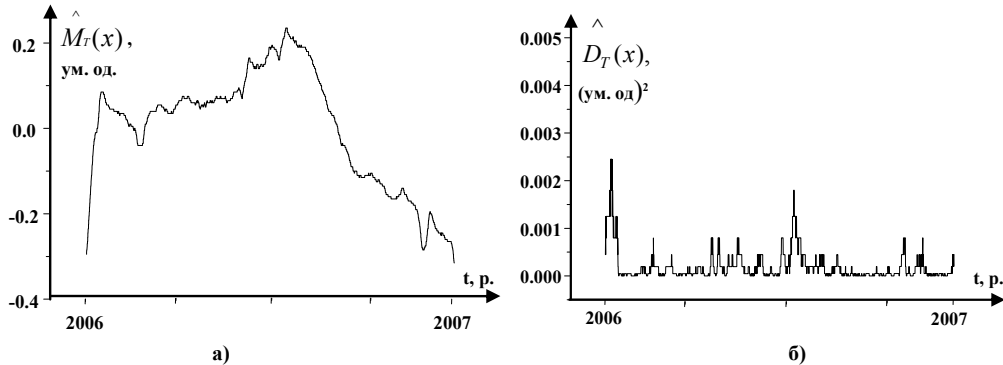


Рис. 5. Реалізації статистичних оцінок математичного сподівання (а) та дисперсії (б) індексу активності рентного доходу США

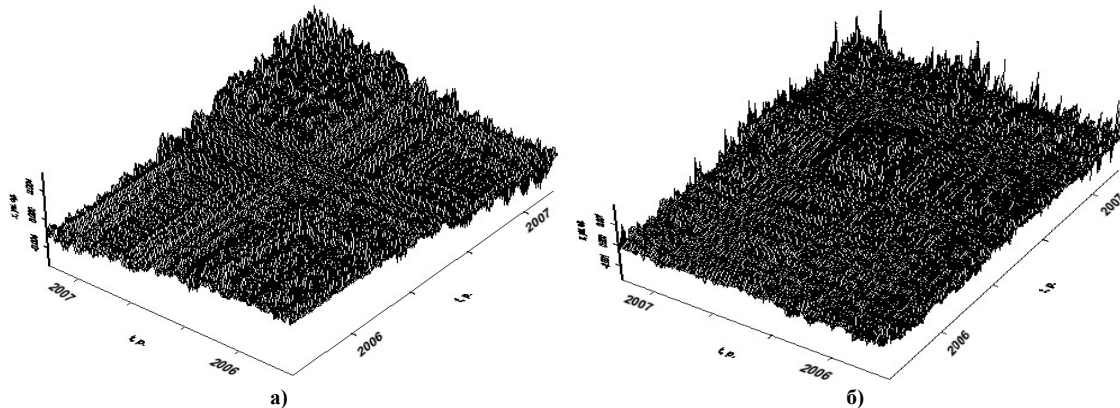


Рис. 6. Реалізації статистичних оцінок автокореляційних функцій індексу активності нерухомого майна США (а) та індексу активності рентного доходу США (б)

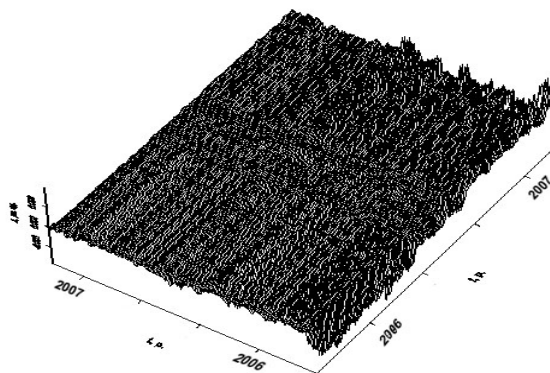


Рис. 7. Реалізація статистичної оцінки взаємної кореляційної функції індексу активності нерухомого майна США та індексу активності рентного доходу США

Отримані у даній статті результати служать основою для розробки процедури прогнозування циклічних економічних процесів. Вкажемо на можливі шляхи побудови методу автоматизованого прогнозування циклічних економічних процесів, які базуються на їх математичних моделях, що обґрунтовані в даній науковій статті та у роботі [6].

Будемо розрізняти прогнозування циклічних економічних процесів за їх передісторією та прогнозування фіксованої множини одних економічних циклічних процесів на основі відомостей про

поведінку сукупності інших циклічних економічних процесів. Окремо необхідно проводити прогноз трендових складових та складових, які описуються у вигляді циклічних випадкових функціональних відношень. Прогнозування циклічної складової економічного процесу необхідно здійснювати у два етапи:

- 1) прогнозування ритму (функції ритму) циклічного економічного процесу;
- 2) прогнозування морфологічних (ймовірнісних) характеристик циклічного економічного процесу.

Більш детальний та предметний розгляд питання побудови методу прогнозування циклічних економічних процесів, визначення точності, достовірності та глибини прогнозу потребує окремого ґрунтовного дослідження.

### Висновки

1. Обґрунтовано нову математичну модель сукупності взаємопов'язаних циклічних економічних процесів у вигляді суми векторів, що репрезентують трендові та циклічні складові досліджуваних процесів. Сукупність циклічних складових економічних процесів подано у вигляді вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів. Застосування такого математичного представлення сукупності взаємопов'язаних циклічних економічних процесів дало змогу одночасно врахувати наявність трендових складових, стохастичність, циклічність, мінливість та спільність ритму сукупності взаємопов'язаних економічних циклічних процесів та розширити сферу застосування стохастичного підходу до моделювання та сумісного аналізу циклічних процесів із однаковою ритмічною структурою.

2. Обґрунтовано статистичні методи сумісного аналізу взаємопов'язаних економічних циклічних процесів на базі їх моделі у вигляді вектора циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів, що уможливило адаптацію методів їх аналізу та прогнозу з використанням засобів сучасної обчислювальної техніки. Розроблений підхід до статистичного аналізу взаємопов'язаних економічних циклічних процесів дає змогу оцінити ступінь їх взаємозалежності у вигляді взаємної кореляційної функції та уможливорює оцінювання характеру взаємозв'язку між економічними явищами, шляхом побудови регресії одного економічного процесу на інший.

3. Вказано на можливі шляхи побудови методу автоматизованого прогнозування циклічних економічних процесів, які ґрунтуються на їх математичних моделях, у вигляді циклічних випадкових функціональних відношень.

### Література

1. Айвазян С. А. Прикладная статистика и основы эконометрики : [учебник для вузов] / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия / Е. З. Демиденко. – М. : Финансы и статистика, 1981. – 304 с.
3. Слуцкий Е. Е. Сложение случайных причин как источник циклических процессов / Е. Е. Слуцкий // Вопр. Конъюнктуры, 1997. – Т. 3, вып. 1. – С. 34–64.
4. Louca F. Turbulence in economic Cheltenham / F. Louca 1997.
5. Лупенко С. Математичне моделювання циклічних економічних явищ на базі циклічного випадкового процесу для задач їх автоматизованого аналізу та прогнозу / С. Лупенко, А. Горкуненко // Матеріали всеукраїнської наукової конференції Тернопільського державного технічного університету імені Івана Пулюя, Тернопіль, 13–14 травня 2009. – Тернопіль, 2009. – С. 122.
6. Горкуненко А. Б. Математичне моделювання економічних циклічних процесів для їх автоматизованого аналізу та прогнозу / А. Б. Горкуненко, С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Вісник Хмельницького національного університету. – 2010. – № 3. – С. 269–275.
7. Лупенко С. А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С. А. Лупенко // Электронное моделирование / Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. – Киев, 2006. – Т. 28, № 4. – С. 29–45.
8. Лупенко С. А. Статистичні методи обробки циклічного випадкового процесу / С. А. Лупенко // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. – Київ, 2006. – № 2 (8). – С. 59–65.
9. Лупенко С. А. Статистичні методи сумісної обробки сукупності ритмічно пов'язаних циклічних випадкових процесів / С. А. Лупенко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. — Хмельницький, 2005. – № 2. – С. 80–84.
10. Лупенко С. А. Завдання інтерполяції функції ритму циклічної функції з відомою зонною структурою / С. А. Лупенко // Електроніка та системи управління / Національний авіаційний університет. – Київ, 2007. – № 2 (12). – С. 27–35.

Надійшла 5.1.2011 р.