экономические показатели, достоинством данных схем являются наглядность демонстрации связи всех макросистем, главенствующей роли уровня потребления, как системы запросов и возможностей, а также роли науки в развитии общества, в рамках которых становится более понятной роль государства и правительства – они должны удовлетворять рост потребностей общества за счет развития экономики и производства, а последнее – невозможно без развития науки и техники.

6. Переход к спиральной структуре рекуррентной последовательности основных этапов процесса развития элементов макросистемы позволил ввести в нее новый элемент – фактор времени, который тем меньше, чем выше запрос общества на решение возникшей проблемы.

7. Иерархическая структура макросистемы на начальном этапе представляет спиральное объединение ее признаков с общей переходной зоной и связанных между собой, как напрямую, так и перекрестно, что позволяет влиять им друг на друга в любой комбинации, в каждой из сфер этой макросистемы могут быть выделены объекты и процессы (для сфер, созданных человеком, их можно считать технологиями), что также дополняет исходную иерархическую структуру.

8. Дальнейшее совершенствование ФОТ обусловлено потребностью учета в них всех этапов жизненного цикла технических систем и изделий: – проектирования, конструирования, производства, эксплуатации, ремонта и утилизации, при этом вся структура представляет ядро – триединую систему из первых трех этапов, неразрывно связанных с оболочкой – последних трех этапов жизненного цикла.

9. В рамках учета всех этапов жизненного цикла объектов техники, ФОТ следует развить до системы Комплексно-Ориентированной Разработки Техники и Технологий (КОРТТ), в которой все функциональные и технологические факторы производства технических систем и их изделий следует дополнить экономическими и социальными факторами, разработанными на основе системных методов творчества, включая АРИЗ, метод морфологического анализа и другие.

10. Совокупность предлагаемых систем и методов является перспективной для последующей разработки технических изделий, систем и процессов их производства и расширяет возможности оптимального сочетания всех связанных с этим факторов.

Література

1. Михайлов А.Н. Основы синтеза функционально-ориентированных технологий машиностроения / А.Н. Михайлов – Донецк: ДонНТУ, 2009. – 346 с.

2. Политехнический словарь / Редкол.: А.Ю. Ишлинский (гл. ред.) и др. – М.: Сов. энциклопедия. 1989 – 656 с.

3. Половинкин А.И. Основы инженерного творчества / А.И. Половинкин. – М.: Машиностроение, 1988. – 368 с.

4. Михайлов А.Н. Развитие принципов функционально-ориентированных технологий в проектировании технических систем / А.Н. Михайлов, В.А. Михайлов, В.А. Проценко // Сучасні енергетичні установки на транспорті, технології та обладнання для їх обслуговування. Матеріали Республіканської науково-практичної конференції. – Херсон, ХДМІ, 2010. – С. 66-69.

Надійшла 9.4.2011 р.

УДК 519.832.4+519.816

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ УСУНЕННЯ N ЧАСТКОВИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ІМОВІРНІСНОГО ТИПУ ЯК КОНТИНУАЛЬНА АНТАГОНІСТИЧНА ГРА НА $(2N-2)$-ВИМІРНОМУ ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ З МІНІМІЗАЦІЄЮ МАКСИМАЛЬНОГО ДИСБАЛАНСУ

У формі опуклої антагоністичної гри з ядром як функцією $2N-2$ змінних на паралелепіпеді в $\mathbb{R}^{2N-2}$ представлено узагальнену модель усунення N часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізації максимального дисбалансу. Для пропонованої теорії усунення часткових невизначеностей уведено дев'ять означень і доведено десять теорем, котрі дозволяють визначати оптимальну стратегію другого гравця, що персоніфікує особу, котра є відповідальною за прийняття рішення.

In the form of the convex antagonistic game with the kernel as a function of $2N-2$ variables on the parallelepiped in $\mathbb{R}^{2N-2}$ there has been represented a generalized model of removing N partial indeterminancies of the probabilistic type as maximal disbalance minimization. For being suggested partial indeterminancies removing theory there have been put nine definitions and proved ten theorems, which allow to determine the second player optimal strategy, what personifies the one, being responsible for decision making.

Ключові слова: невизначеність, часткові невизначеності, мінімізація максимального дисбалансу,

антагоністична модель, опукла антагоністична гра, оптимальна стратегія, прийняття рішення.

Вступ та опис предметної області з постановкою проблеми

Загальновідомо, що різного роду невизначеності повсякчас виникають при оцінюванні параметрів технологічних процесів (в обробці деталей, при приробляннi деталей, вузлів машин чи агрегатів, у машинобудуванні), що моделюються. Власне, можна стверджувати те, що математичне моделювання породжує невизначеності, оскільки підвищення адекватності моделі ускладнює її, а в ускладненій математичній моделі неможливо оминути інтервальне оцінювання її параметрів. Будемо говорити, що невизначеність щодо деякого параметра A полягає в існуванні непорожнього і неодноелементного набору $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m$ його значень

$$\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m \quad \text{при} \quad m \in \mathbb{N} \tag{1}$$

з лебегівською мірою

$$\mu_{\mathbb{R}^m}\left(\boldsymbol{\mathcal{X}}\right) \neq 0, \tag{2}$$

де кожна точка $\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m$ із (1) є рівноможливим значенням параметра A, але про рівноімовірний розподіл на множині $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m$ не йдеться. Невизначеність параметра A називатимемо частковою, якщо для відомої загальної області його можливих значень $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 \subset \mathbb{R}^m$ виконується строге включення $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \boldsymbol{\mathcal{X}}_0$, де жодна точка границі області $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 \subset \mathbb{R}^m$ не належить $\boldsymbol{\mathcal{X}}$, де зазвичай $\boldsymbol{\mathcal{X}}_0$ й $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ є компактами в $\mathbb{R}^m$.

Невизначеність $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m$ параметра A вважається усуненою в імовірнісному смислі, якщо на множині $\boldsymbol{\mathcal{X}}$ відома функція $f\left(\mathbf{X}\right)$ щільності розподілу ймовірностей, де

$$\int\limits_{\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m} f\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} = 1, \tag{3}$$

і за значення параметра A беруть математичне сподівання

$$\mathscr{M}_{f(\mathbf{X})}\left(\mathscr{X}\right) = \int\limits_{\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m} \mathbf{X} f\left(\mathbf{X}\right) d\mathbf{X} \tag{4}$$

випадкової величини $\mathscr{X}$ зі значеннями (1) на множині $\boldsymbol{\mathcal{X}} \subset \mathbb{R}^m$ з розподілом $f\left(\mathbf{X}\right)$. Надалі розглядатимемо лише невизначеності без розподілу $f\left(\mathbf{X}\right)$.

Невизначеності

$$\left\{ \boldsymbol{\mathcal{X}}^{\langle n \rangle} \subset \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle n \rangle} \subset \mathbb{R}^m \right\}_{n=1}^{N} \tag{5}$$

N параметрів $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{N}$ при $N \in \mathbb{N} \setminus \left\{1\right\}$ з фіксованою сумою

$$\mathbf{X}_\Sigma = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{X}_n \tag{6}$$

їх значень $\left\{ \mathbf{X}_n \in \boldsymbol{\mathcal{X}}^{\langle n \rangle} \right\}_{n=1}^{N}$ представляють окремий клас невизначеностей, де точка $\mathbf{X}_\Sigma$, скоріш за все, належить границі області

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_0 = \bigcap_{n=1}^{N} \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle n \rangle}. \tag{7}$$

У частинному випадку кожна із областей $\left\{ \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle n \rangle} \right\}_{n=1}^{N}$ у (5) співпадає з (7):

$$\boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle 1 \rangle} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle 2 \rangle} = \ldots = \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle N-1 \rangle} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_0^{\langle N \rangle} = \boldsymbol{\mathcal{X}}_0. \tag{8}$$

Множини (8) у частинному випадку є одиничними гіперкубами в $\mathbb{R}^m$. У ще більш частинному випадку

$$m = 1, \; \boldsymbol{\mathcal{X}}_0 = X_0 = \left[0; 1\right], \; \mathbf{X}_\Sigma = x_\Sigma = 1, \tag{9}$$

тобто кожен елемент множини $\left\{ \boldsymbol{\mathcal{X}}^{\langle n \rangle} = X^{\langle n \rangle} \right\}_{n=1}^{N}$ є сегментом, причому

$$\min X^{\langle n \rangle} > \min X_0 = 0, \; \max X^{\langle n \rangle} < \max X_0 = 1 \quad \forall\; n = \overline{1, N}. \tag{10}$$

Клас часткових $\left\{ X^{\langle n \rangle} \right\}_{n=1}^{N}$-невизначеностей з (9) і (10) належить до імовірнісного типу, оскільки значення N параметрів $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{N}$ укладені в одиничний інтервал $\left(0; 1\right)$. І проблема полягає у виборі для параметра A_n такого значення $x_n^* \in X^{\langle n \rangle} \subset \left[0; 1\right]$, яке є задовільним чи оптимальним за певним критерієм $\forall\; n = \overline{1, N}$.

Аналіз опублікованих досліджень

Так як жодна статистична гіпотеза про тип або форму розподілу $f\left(\mathbf{X}\right)$ не може бути перевірена, то

$\boldsymbol{X}$-невизначеність без розподілу $f(\mathbf{X})$ не може бути усуненою в імовірнісному смислі. Функцією розподілу імовірностей над множиною $\boldsymbol{X}$ може бути довільна невід'ємна функція $f(\mathbf{X})$, котра задовольняє умові (3), включаючи, звісно, і континуум функцій Дірака $\left\{\delta(\mathbf{X}-\mathbf{S})\right\}_{\mathbf{S}\in\boldsymbol{X}\subset\boldsymbol{X}_0\subset\mathbb{R}^m}$. Тому будь-яке припущення про найкраще або оптимальне значення параметра A не можна відкидати, і для усунення невизначеності слід використовувати ігрову антагоністичну модель [1], у котрій враховуватиметься кожне найбільш невдале припущення. Звичайно, для усунення $\left\{X^{\langle n\rangle}\right\}_{n=1}^{N}$-невизначеностей імовірнісного типу без будь-яких припущень про статистичні розподіли також використовуватиметься ігрова антагоністична модель [2], котра, можливо, ускладнюватиметься зі зростанням числа N оцінюваних параметрів $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{N}$ [3].

Однією з найпростіших антагоністичних моделей усунення невизначеностей є мінімізація максимального дисбалансу відношення справжнього і припущеного значень досліджуваного параметра [1]. Ядром відповідної континуальної антагоністичної гри для мінімізації максимального дисбалансу N припущених значень $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{N}$ параметрів $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{N}$ та N їх дійсних значень $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{N}$ є функція [1, 3]

$$K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) = K\left(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, y_1, y_2, \ldots, y_{N-1}\right) =$$

$$= \max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_{N-1}}{y_{N-1}}, \frac{1-\sum\limits_{n=1}^{N-1} x_n}{1-\sum\limits_{n=1}^{N-1} y_n}\right\} = \max\left\{\left\{\frac{x_k}{y_k}\right\}_{k=1}^{N-1}, \frac{1-\sum\limits_{n=1}^{N-1} x_n}{1-\sum\limits_{n=1}^{N-1} y_n}\right\} \tag{11}$$

на паралелепіпеді

$$\left\{\prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}\right\} \times \left\{\prod_{m=1}^{N-1} Y^{\langle m\rangle}\right\} = \left\{\prod_{n=1}^{N-1} \left[a_n; b_n\right]\right\} \times \left\{\prod_{m=1}^{N-1} \left[a_m; b_m\right]\right\} \subset$$

$$\subset \left\{\prod_{n=1}^{N-1} (0; 1)\right\} \times \left\{\prod_{m=1}^{N-1} (0; 1)\right\} \subset \left\{\prod_{n=1}^{N-1} [0; 1]\right\} \times \left\{\prod_{m=1}^{N-1} [0; 1]\right\} \subset \mathbb{R}^{2N-2}, \tag{12}$$

де

$$\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} = \left[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_{N-2} \quad x_{N-1}\right] \in \left\{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid x_n \in \left[a_n; b_n\right] \ \forall\ n = \overline{1, N-1}\right\} \tag{13}$$

є чистою стратегією першого гравця,

$$\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} = \left[y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_{N-2} \quad y_{N-1}\right] \in \left\{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \mathbb{R}^{N-1} \mid y_m \in \left[a_m; b_m\right] \ \forall\ m = \overline{1, N-1}\right\} \tag{14}$$

є чистою стратегією другого гравця,

$$X^{\langle n\rangle} = \left[a_n; b_n\right] \subset (0; 1) \quad \forall\ n = \overline{1, N-1}, \tag{15}$$

а також

$$x_n \in \left[a_n; b_n\right] \quad \forall\ n = \overline{1, N-1} \tag{16}$$

та

$$y_m \in \left[a_m; b_m\right] \quad \forall\ m = \overline{1, N-1}. \tag{17}$$

Якими би не були значення

$$\left\{x_n \in X^{\langle n\rangle} = \left[a_n; b_n\right]\right\}_{n=1}^{N},$$

умова типу (6) у (9) виконана, тобто

$$x_N = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} x_n. \tag{18}$$

Аналогічно, якими би не були припущення

$$\left\{y_n \in Y^{\langle n\rangle} = X^{\langle n\rangle} = \left[a_n; b_n\right]\right\}_{n=1}^{N}$$

про невідомі значення $\left\{x_n\right\}_{n=1}^{N}$, де y_n є припущенням про значення параметра A_n, завжди виконано

$$y_N = 1 - \sum_{n=1}^{N-1} y_n. \tag{19}$$

Зрозуміло, що особа, котра є відповідальною за прийняття рішення щодо значень досліджуваних параметрів, виступатиме на боці другого гравця [1, 3] у такій грі.

Мета статті

Для того, щоб усунути часткові $\left\{X^{\langle n\rangle}\right\}_{n=1}^{N}$-невизначеності імовірнісного типу, необхідно знайти оптимальні стратегії другого гравця в антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12). При цьому врахуємо, що у ядрі $K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right)$ цієї гри фігурують значення $N-1$ параметра $\left\{A_n\right\}_{n=1}^{N-1}$, а останнє, N-те, значення параметра A_N виражається через перші $N-1$ значень завдяки (18) або (19).

Теорема про регулярну оптимальну стратегію другого гравця в континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12)

При $N=2$ розв'язок і, зокрема, оптимальна стратегія другого гравця в антагоністичній грі з ядром (11)

$$K\left(\mathbf{X}^{\langle 1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle 1\rangle}\right)=K\left(x_1, y_1\right)=\max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{1-x_1}{1-y_1}\right\} \tag{20}$$

на квадраті (12)

$$X^{\langle 1\rangle}\times Y^{\langle 1\rangle}=\left[a_1; b_1\right]\times\left[a_1; b_1\right]\subset(0; 1)\times(0; 1)\subset[0; 1]\times[0; 1]\subset\mathbb{R}^2 \tag{21}$$

є добре відомими [2]: завдяки строгій опуклості гри з ядром (20) на квадраті (21) легко визначається оптимальна поведінка другого гравця у його єдиній оптимальній стратегії, яка є чистою. Те саме стосується і ледь менш тривіального випадку з $N=3$ [3] для ядра

$$K\left(\mathbf{X}^{\langle 2\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle 2\rangle}\right)=K\left(x_1, x_2, y_1, y_2\right)=\max\left\{\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{1-x_1-x_2}{1-y_1-y_2}\right\} \tag{22}$$

на паралелепіпеді (12)

$$X^{\langle 2\rangle}\times Y^{\langle 2\rangle}=\left\{\left[a_1; b_1\right]\times\left[a_2; b_2\right]\right\}\times\left\{\left[a_1; b_1\right]\times\left[a_2; b_2\right]\right\}\subset$$

$$\subset\left\{(0; 1)\times(0; 1)\right\}\times\left\{(0; 1)\times(0; 1)\right\}\subset\left\{[0; 1]\times[0; 1]\right\}\times\left\{[0; 1]\times[0; 1]\right\}\subset\mathbb{R}^4, \tag{23}$$

але процедура визначення оптимальної стратегії другого гравця ускладнюється. Щодо загального випадку з $N\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, то має місце така теорема [1].

Теорема 1. Антагоністична гра з ядром (11) на паралелепіпеді (12) є опуклою, і в ній за умов

$$\frac{b_k}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1}b_m-\sum\limits_{m=1}^{N-1}a_m}\geqslant a_k \quad \forall\ k=\overline{1, N-1} \tag{24}$$

оптимальною стратегією другого гравця є чиста стратегія

$$\mathbf{Y}_*^{\langle N-1\rangle}=\begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & \cdots & y_{N-2}^* & y_{N-1}^*\end{bmatrix} \tag{25}$$

з компонентами

$$y_k^*=\frac{b_k}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1}b_m-\sum\limits_{m=1}^{N-1}a_m} \quad \forall\ k=\overline{1, N-1}. \tag{26}$$

Доведення. Для антагоністичної гри з ядром (11) на паралелепіпеді (12) умовами опуклості є

$$\frac{\partial^2}{\partial y_m^2}K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right)\geqslant 0 \quad \forall\ y_n\in Y^{\langle n\rangle} \text{ та } \forall\ x_k\in X^{\langle k\rangle} \text{ при } n=\overline{1, N-1} \text{ та } k=\overline{1, N-1},\ m=\overline{1, N-1}. \tag{27}$$

Маємо майже скрізь перші частинні похідні:

$$\frac{\partial}{\partial y_m}K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right)\in\left\{-\frac{x_m}{y_m^2},\ 0,\ \frac{1-\sum\limits_{n=1}^{N-1}x_n}{\left(1-\sum\limits_{n=1}^{N-1}y_n\right)^2}\right\} \quad \forall\ m=\overline{1, N-1} \tag{28}$$

при (17). Зі співвідношень (28) слідують співвідношення для других частинних похідних:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_m^2}K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle}, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right)\in\left\{\frac{2x_m}{y_m^3},\ 0,\ \frac{2\left(1-\sum\limits_{n=1}^{N-1}x_n\right)}{\left(1-\sum\limits_{n=1}^{N-1}y_n\right)^3}\right\} \quad \forall\ m=\overline{1, N-1} \tag{29}$$

майже скрізь при (17). І чисельник, і знаменник кожного з двох елементів множини у (29) є додатними, оскільки із умови (2) випливає

$$\mu_{\mathbb{R}}\left(\left[a_n; b_n\right]\right)\neq 0 \quad \forall\ n=\overline{1, N-1} \tag{30}$$

та

$$a_k < b_k\,,\; a_k > 0\,,\; b_k < 1 \quad \forall\, k = \overline{1,\, N-1}\,, \tag{31}$$

а нерівність

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_k < 1 \tag{32}$$

випливає з (10) завдяки (18) або (19). На нуль-вимірних множинах, де функція (11) не є диференційовною, її перші частинні похідні (28) як функції від аргументів $\{y_m\}_{m=1}^{N-1}$ "стрибають" з меншого значення у більше, тому на цих множинах $\frac{\partial^2}{\partial y_m^2} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) = \infty$. Це означає, що умова опуклості (27) антагоністичної гри з ядром (11) на паралелепіпеді (12) є справедливою [4].

В опуклій антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) другий гравець має (можливо, єдину) оптимальну стратегію (25), яка знаходиться як

$$\mathbf{Y}_*^{\langle N-1\rangle} \in \arg\left\{ \min_{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{m=1}^{N-1} Y^{\langle m\rangle}} \left\{ \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) \right\} \right\} = \arg\left\{ \min_{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{m=1}^{N-1} [a_m\,;\, b_m]} \left\{ \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} [a_n\,;\, b_n]} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) \right\} \right\} \tag{33}$$

за теоремою про оптимальні стратегії другого гравця в опуклій грі [2], оскільки вона на добутку $\prod_{m=1}^{N-1} Y^{\langle m\rangle}$ мінімізує максимум ядра $K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right)$ на добутку $\prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}$. Максимумом ядра (11) на паралелепіпеді (12) як функції $N-1$ змінної $\{x_n\}_{n=1}^{N-1}$ на добутку $\prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}$ є

$$\max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) = \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} [a_n\,;\, b_n]} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) = \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} [a_n\,;\, b_n]} \left\{ \max\left\{ \left\{ \frac{x_k}{y_k} \right\}_{k=1}^{N-1},\, \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} x_k}{1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k} \right\} \right\} =$$

$$= \max\left\{ \left\{ \max_{x_n \in [a_n\,;\, b_n]} \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\} \right\}_{n=1}^{N-1},\, \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} [a_n\,;\, b_n]} \left\{ \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} x_k}{1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k} \right\} \right\} = \max\left\{ \left\{ \frac{b_n}{y_n} \right\}_{n=1}^{N-1},\, \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k} \right\}. \tag{34}$$

Мінімум функції (34) змінних $\{y_n\}_{n=1}^{N-1}$, складеної із частин гіперболічних гіперповерхонь на добутку

$$\prod_{m=1}^{N-1} Y^{\langle m\rangle} = \prod_{m=1}^{N-1} [a_m\,;\, b_m] \subset \mathbb{R}^{N-1},$$

досягається тоді, коли, зокрема, N внутрішніх виразів під знаком максимуму є рівними. Тому

$$\min_{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{m=1}^{N-1} Y^{\langle m\rangle}} \left\{ \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} X^{\langle n\rangle}} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) \right\} = \min_{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{m=1}^{N-1} [a_m\,;\, b_m]} \left\{ \max_{\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{n=1}^{N-1} [a_n\,;\, b_n]} K\left(\mathbf{X}^{\langle N-1\rangle},\, \mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle}\right) \right\} =$$

$$= \min_{\mathbf{Y}^{\langle N-1\rangle} \in \prod_{m=1}^{N-1} [a_m\,;\, b_m]} \left\{ \max\left\{ \left\{ \frac{b_n}{y_n} \right\}_{n=1}^{N-1},\, \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k} \right\} \right\} = \max\left\{ \left\{ \frac{b_n}{y_n^*} \right\}_{n=1}^{N-1},\, \frac{1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k}{1-\sum_{k=1}^{N-1} y_k^*} \right\} = v_{\text{opt}}\,, \tag{35}$$

де оптимальне значення гри

$$v_{\text{opt}} = \frac{b_k}{y_k^*} = \frac{1-\sum_{m=1}^{N-1} a_m}{1-\sum_{m=1}^{N-1} y_m^*} \quad \forall\, k = \overline{1,\, N-1}\,. \tag{36}$$

Далі із (36) маємо

$$y_m^* = \frac{b_m}{b_k} y_k^* \quad \forall\ m = \overline{1,\ N-1} \ \text{ та } \ \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,, \tag{37}$$

а також

$$y_k^* \left(1 - \sum_{m=1}^{N-1} a_m \right) = b_k \left(1 - \sum_{m=1}^{N-1} y_m^* \right) \quad \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,, \tag{38}$$

причому

$$b_k y_m^* = b_k \frac{b_m}{b_k} y_k^* = b_m y_k^*\,. \tag{39}$$

Згідно з (39) права частина (38) набуває вигляду

$$b_k \left(1 - \sum_{m=1}^{N-1} y_m^* \right) = b_k - \sum_{m=1}^{N-1} b_k y_m^* = b_k - \sum_{m=1}^{N-1} b_m y_k^* = b_k - y_k^* \sum_{m=1}^{N-1} b_m\,. \tag{40}$$

Підставляючи (40) у праву частину (38), отримуємо співвідношення (26), котре має місце тільки тоді, коли виконані умови (24) і

$$\frac{b_k}{1 + \sum\limits_{m=1}^{N-1} b_m - \sum\limits_{m=1}^{N-1} a_m} \leqslant b_k \quad \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,, \tag{41}$$

адже має бути

$$y_k^* \in Y^{\langle k \rangle} = \left[a_k;\, b_k \right] \quad \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,. \tag{42}$$

Але

$$1 \leqslant 1 + \sum_{m=1}^{N-1} b_m - \sum_{m=1}^{N-1} a_m \tag{43}$$

у (41), де використані (31) і (32). Тому зі (43) виходить, що

$$\sum_{m=1}^{N-1} b_m - \sum_{m=1}^{N-1} a_m \geqslant 0\,, \tag{44}$$

а це, завдяки тим же умовам у (31), завжди виконується. Тому умов (24) достатньо, щоб виконувались належності (42), за яких точка (25) з компонентами (26) є оптимальною стратегією другого гравця.

Теорему доведено.

Легко бачити, що при порушенні m-ї умови у (24) значення y_m^* за (26) при $m \in \left\{ \overline{1,\ N-1} \right\}$ не може бути m-ю компонентою стратегії (25). Тому вартим буде уведення наступних означень для спрощення оперувань з типами оптимальної поведінки другого гравця.

Означення 1. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) оптимальна стратегія другого гравця (25) називається регулярною, якщо її компонентами є значення (26).

Наступна теорема є менш інформативною, ніж попередня, але цілком змістовною, окреслюючи діапазон значень компонент регулярної стратегії (25).

Теорема 2. Якою б не була регулярна оптимальна стратегія другого гравця (25) у континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12), її k-а компонента

$$y_k^* \in \left[a_k;\, b_k \right) \quad \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,. \tag{45}$$

Доведення. Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з того, що нерівність (43) чи (44) виконується строго. Тому й нерівності (41) усі виконані строго, а це дає (45). Теорему доведено.

Іншими словами, якщо виконані умови (24), то стратегія (25) є регулярною. Регулярність оптимальної стратегії другого гравця означає те, що вона знаходиться доволі просто – за (26) з перевіркою умов (24). Якщо ж одна з нерівностей у (24) не виконується, то оптимальна стратегія другого гравця (25) вже не буде регулярною.

Теореми про компоненти нерегулярної оптимальної стратегії другого гравця в континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12)

Означення 2. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) оптимальна стратегія другого гравця (25) називається нерегулярною, якщо хоча б одна з нерівностей в умовах (24) не виконується.

Означення 3. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) k-а компонента оптимальної стратегії другого гравця (25) називається регулярною, якщо її значення y_k^* обчислюється як (26) за $k \in \left\{ \overline{1,\ N-1} \right\}$.

Ясно, що в регулярної стратегії (25) усі її компоненти є регулярними, а нерегулярна стратегія (25) містить принаймні одну компоненту, котра не є регулярною. Цікаво, що нерегулярна стратегія (25) завжди містить принаймні одну компоненту [1, 3], котра могла би бути регулярною, формулюванням і доведенням чого негайно займемося.

Теорема 3. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що k -а компонента y_k^* оптимальної стратегії другого гравця (25) може бути регулярною.

Доведення. Твердження теореми означає, що для антагоністичної гри з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, що відповідна умова у (24) буде виконана. Та припустимо, що умови у (24) не виконуються для жодного $k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$. Тоді

$$\frac{b_k}{1+\sum\limits_{m=1}^{N-1} b_m - \sum\limits_{m=1}^{N-1} a_m} < a_k \quad \forall\ k = \overline{1,\ N-1}\,. \tag{46}$$

Сумуємо ліві та праві частини нерівностей у (46) по $k = \overline{1,\ N-1}$ й отримуємо:

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_k < \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(1+\sum_{m=1}^{N-1} b_m - \sum_{m=1}^{N-1} a_m\right),\ \sum_{k=1}^{N-1} b_k - \sum_{k=1}^{N-1} a_k \sum_{m=1}^{N-1} b_m < \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(1-\sum_{m=1}^{N-1} a_m\right),$$
$$\sum_{k=1}^{N-1} b_k \left(1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k\right) < \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(1-\sum_{m=1}^{N-1} a_m\right),\ \sum_{k=1}^{N-1} b_k \left(1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k\right) < \sum_{k=1}^{N-1} a_k \left(1-\sum_{k=1}^{N-1} a_k\right), \tag{47}$$

звідки після скорочення на ненульове значення $1-\sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k$ отримуємо неможливе співвідношення $\sum\limits_{k=1}^{N-1} b_k < \sum\limits_{k=1}^{N-1} a_k$. Спростоване припущення означає, що знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$ таке, де k -а компонента y_k^* може бути регулярною. Теорему доведено.

Тепер доведемо вихідну теорему про компоненти нерегулярної стратегії (25).

Теорема 4. Якщо в антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) існує множина $\mathcal{M} = \left\{k_m\right\}_{m=1}^{M}$ така, що

$$\frac{b_{k_m}}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} < a_{k_m} \tag{48}$$

при $k_m \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\}$, то $M \in \left\{\overline{1,\ N-2}\right\}$ і k_m -ю компонентою оптимальної стратегії другого гравця (25) є

$$y_{k_m}^* = a_{k_m}\ , \tag{49}$$

а

$$y_k^* = \frac{b_k \left(1-\sum\limits_{m=1}^{M} a_{k_m}\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{m=1}^{M} b_{k_m} - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \quad \text{при} \quad k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\} \setminus \mathcal{M} \tag{50}$$

за умов

$$\frac{b_k \left(1-\sum\limits_{m=1}^{M} a_{k_m}\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{m=1}^{M} b_{k_m} - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \geqslant a_k \quad \forall\ k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\} \setminus \mathcal{M}\,. \tag{51}$$

Доведення. Те, що потужністю множини $\mathcal{M} = \left\{k_m\right\}_{m=1}^{M}$ є $M \in \left\{\overline{1,\ N-2}\right\}$, випливає безпосередньо з Теореми 3. Стосовно k_m-ї компоненти (49) при нерівності (48) міркування є такими. Замість (36) із (35) матимемо

$$\frac{b_k}{y_k^*} = \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i^*} \quad \text{при} \quad k \in \left\{\overline{1,\ N-1}\right\} \setminus \mathcal{M}\ , \tag{52}$$

де

$$y^*_{k_m} > \frac{b_{k_m}}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \quad \forall\; m=\overline{1,\, M}\;, \tag{53}$$

адже умова (48) означає

$$\frac{b_{k_m}}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} < a_{k_m} \quad \forall\; m=\overline{1,\, M}\;, \tag{54}$$

а має бути

$$y^*_{k_m} \in \left[a_{k_m};\, b_{k_m}\right] \quad \forall\; m=\overline{1,\, M}\;. \tag{55}$$

Найближчою точкою до лівої частини у (54) є лівий кінець a_{k_m} сегмента $\left[a_{k_m};\, b_{k_m}\right]$. Тому припустимо, що має місце (49). Тоді

$$\frac{b_{k_m}}{y^*_{k_m}} = \frac{b_{k_m}}{a_{k_m}} < \frac{b_k}{y^*_k} = \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1-\sum\limits_{j=1}^{M} y^*_{k_j} - \sum\limits_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} y^*_l} \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;,\;\; \forall\; m=\overline{1,\, M}\;, \tag{56}$$

де

$$v_{\text{opt}} = \frac{b_k}{y^*_k} = \frac{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1-\sum\limits_{j=1}^{M} y^*_{k_j} - \sum\limits_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} y^*_l} \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;. \tag{57}$$

Із (56) видно, що якби було $y^*_{k_m} > a_{k_m}$, то використання хоча б однієї такої k_m-ї компоненти в оптимальній стратегії другого гравця (25) ніяк не зменшило б оптимальне значення гри (57), а тільки збільшило б останній у (57) дріб, оскільки його знаменник був би зменшений. Таким чином, при $y^*_{k_m} > a_{k_m}$ другий гравець може тільки збільшити виграш першого гравця, тому має місце (49) $\forall\; m=\overline{1,\, M}$. При цьому решта $\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}$ компонент в оптимальній стратегії другого гравця (25) є коренями рівнянь у співвідношенні (57), з якого послідовно маємо

$$y^*_l = \frac{b_l}{b_k}\, y^*_k \quad \text{при} \quad l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M} \quad \text{та} \quad k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;, \tag{58}$$

$$y^*_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right) = b_k\left(1-\sum_{j=1}^{M} y^*_{k_j} - \sum_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} y^*_l\right) \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;. \tag{59}$$

Згідно з (58) праву частину (59) перепишемо так:

$$b_k\left(1-\sum_{j=1}^{M} y^*_{k_j} - \sum_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} y^*_l\right) = b_k\left(1-\sum_{j=1}^{M} y^*_{k_j}\right) - b_k \sum_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} y^*_l =$$

$$= b_k\left(1-\sum_{j=1}^{M} y^*_{k_j}\right) - y^*_k \sum_{l\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}} b_l = b_k\left(1-\sum_{j=1}^{M} y^*_{k_j}\right) - y^*_k\left(\sum_{i=1}^{N-1} b_i - \sum_{j=1}^{M} b_{k_j}\right) \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;. \tag{60}$$

Звідси, підставляючи (60) у праву частину (59) і враховуючи $\forall\; m=\overline{1,\, M}$ співвідношення (49), отримуємо (50).

Очевидно, що (50) має місце тільки тоді, коли виконані умови (51) і

$$\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M} a_{k_m}\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{m=1}^{M} b_{k_m} - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \leqslant b_k \quad \forall\; k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;, \tag{61}$$

адже має бути

$$y^*_k \in Y^{\langle k\rangle} = \left[a_k;\, b_k\right] \quad \forall\; k\in\left\{\overline{1,\, N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\;. \tag{62}$$

Але із нерівності (61) випливає

$$1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\leqslant 1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i \quad \forall\, k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}\,, \tag{63}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}a_i-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\leqslant \sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m} \quad \forall\, k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}\,, \tag{64}$$

де використані (31) і (32), а (64) виконується завжди. Тому для (50) достатньо одних умов (51).

Теорему доведено.

Можна побачити, що умова (51), як й умови в (24), може порушуватися, а значення y_k^* за

$$y_k^*=\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}b_i-\sum\limits_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i}<a_k \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M} \tag{65}$$

не буде k-ю компонентою стратегії (25), адже має бути (62). Тому вартим буде уведення наступних означень для спрощення оперувань з типами нерегулярної оптимальної поведінки другого гравця.

Означення 4. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) k_m-а компонента (49) оптимальної стратегії другого гравця (25) називається простою нерегулярною компонентою першого степеня, якщо виконується умова (48), де $k_m\in\mathcal{M}\subset\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}$.

Означення 5. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) k-а компонента (50) оптимальної стратегії другого гравця (25) називається зміщеною нерегулярною компонентою першого степеня.

Займемося питанням того, чи можуть умови (51) бути порушені одночасно. Іншими словами, дослідимо питання про те, чи може оптимальна стратегія другого гравця (25) не містити зміщених нерегулярних компонент першого степеня. Відповідь на це питання дає така теорема.

Теорема 5. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}$ таке, що k-а компонента y_k^* оптимальної стратегії другого гравця (25) може бути зміщеною нерегулярною компонентою першого степеня.

Доведення. Твердження теореми означає, що для антагоністичної гри з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}$ таке, що відповідна умова у (51) буде виконана. Та припустимо, що умови у (51) не виконуються для жодного $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}$. Тоді, сумуючи ліві та праві частини нерівностей у (65) по $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}$, отримаємо

$$\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right),\ \sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)<$$

$$<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\left(1+\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right),\ \sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)-\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k<$$

$$<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right),\ \sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}-\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\right)<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right),$$

$$\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right),\ \sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}b_k<\sum_{k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}}a_k\,, \tag{66}$$

а це неможливо. Спростоване припущення означає, що знайдеться хоча б одне $k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\backslash\mathcal{M}$ таке, де k-а компонента y_k^* за (50) може бути зміщеною нерегулярною компонентою першого степеня. Теорему доведено.

Таким чином, в нерегулярній оптимальній стратегії другого гравця (25) є принаймні одна проста нерегулярна компонента першого степеня і може бути зміщена нерегулярна компонента першого степеня. При цьому, як зараз легко з'ясується, зміщена нерегулярна k-а компонента першого степеня завжди є меншою від попередньо обчисленої k-ї регулярної компоненти.

Теорема 6. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) має місце нерівність

$$\frac{b_k\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)}{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i}<\frac{b_k}{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i} \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\,. \tag{67}$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин у нерівності (67), скорочених на b_k:

$$\frac{\left(1-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)-\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=$$

$$=\frac{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\sum_{i=1}^{N-1}a_i-1-\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}+\sum_{i=1}^{N-1}a_i}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=$$

$$=\frac{-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\sum_{i=1}^{N-1}a_i+\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=$$

$$=\frac{\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)} \quad \text{при} \quad k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\mathcal{M}\,. \tag{68}$$

Але з нерівності (48) за усіма $k_m\in\mathcal{M}\subset\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}$ матимемо

$$\frac{\sum_{m=1}^{M}b_{k_m}}{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i}<\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\,,\ \sum_{m=1}^{M}b_{k_m}<\sum_{m=1}^{M}a_{k_m}\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right). \tag{69}$$

Остання нерівність у (69) показує, що чисельник у (68) є від’ємним. Те, що знаменник у (68) додатний, є очевидним. Тому дріб у (68) є від’ємним, що підтверджує справедливість (67). Теорему доведено.

Власне, степінь нерегулярності оптимальної стратегії другого гравця (25) залежить від максимального степеня нерегулярності її компонент, який, як зрозуміло після (65), може бути більшим за одиницю. Тому необхідно узагальнити принцип обчислення нерегулярної стратегії (25).

Означення 6. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) оптимальна стратегія другого гравця (25) називається нерегулярною стратегією першого степеня, якщо серед її компонент немає нерегулярних компонент вище першого степеня.

Але цілком ясно, що у розглядуваній грі можуть бути нерегулярні оптимальні стратегії (25) і більших степенів. Для їх означення і дослідження необхідно індукувати умови Теореми 4, а підставою для такої індукції є умова (65).

Теорема 7. Нехай $\mathcal{M}_r$ є множиною тих індексів j із множини $\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}$, для яких

$$\frac{b_j\left(1-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\right)}{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i}<a_j \tag{70}$$

при $j\in\mathcal{M}_r$. Тоді для нерегулярної оптимальної стратегії (25) у континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) степінь її нерегулярності $r\in\left\{\overline{1,\,N-2}\right\}$ та

$$y_j^* = a_j \quad \forall\ j \in \mathcal{M}_r\,, \tag{71}$$

а

$$y_k^* = \frac{b_k \left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l \right)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \quad \text{при} \quad k \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q \tag{72}$$

за умов

$$\frac{b_k \left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l \right)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \geqslant a_k \quad \forall\ k \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q\,. \tag{73}$$

Доведення. За індукцією, котра присутня у (70) для усіх значень r від одиниці до деякого максимального числа, буде задекларовано (71) для усіх можливих r. Замітимо, що перетин будь-якої пари множин із множини $\left\{ \mathcal{M}_q \right\}_{q=1}^{r}$ є порожнім. Далі, замість (36) із (35) матимемо

$$\frac{b_k}{y_k^*} = \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} y_i^*} \quad \text{при} \quad k \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q\,, \tag{74}$$

де

$$y_j^* > \frac{b_j}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \quad \forall\ j \in \mathcal{M}_r\,, \tag{75}$$

адже умова (70) означає

$$\frac{b_j}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} < a_j \quad \forall\ j \in \mathcal{M}_r\,, \tag{76}$$

а має бути

$$y_j^* \in \left[a_j;\, b_j \right] \quad \forall\ j \in \mathcal{M}_r\,. \tag{77}$$

Якщо має місце (71), то тоді

$$\frac{b_j}{y_j^*} = \frac{b_j}{a_j} < \frac{b_k}{y_k^*} = \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} y_l^* - \sum\limits_{m \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} y_m^*} \quad \text{при} \quad k \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q\,,\ \ \forall\ j \in \mathcal{M}_r\,, \tag{78}$$

де

$$v_{\text{opt}} = \frac{b_k}{y_k^*} = \frac{1 - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i}{1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} y_l^* - \sum\limits_{m \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} y_m^*} \quad \text{при} \quad k \in \left\{ \overline{1,\, N-1} \right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q\,. \tag{79}$$

Якщо брати $y_j^* > a_j$ хоча б для якогось $j \in \mathcal{M}_r$, то, як видно із (79), це збільшить оптимальне значення гри. Тому цього робити не можна, з чого випливає (71), причому навіть для усіх можливих r. А решта

$\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q$ компонент в оптимальній стратегії другого гравця (25) є коренями рівнянь у співвідношенні (79), з якого послідовно маємо

$$y_l^*=\frac{b_l}{b_k}y_k^* \ \text{ при } \ l\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q \ \text{ та } \ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,, \tag{80}$$

$$y_k^*\left(1-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)=b_k\left(1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_l^*-\sum_{m\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_m^*\right) \ \text{ при } \ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,, \tag{81}$$

$$b_k\left(1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_l^*-\sum_{m\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_m^*\right)=b_k\left(1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_l^*\right)-b_k\sum_{m\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_m^*=$$

$$=b_k\left(1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_l^*\right)-y_k^*\sum_{m\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}b_m=b_k\left(1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}y_l^*\right)-y_k^*\left(\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}b_l\right) \ \text{ при } \ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,. \tag{82}$$

Підставляючи (82) у праву частину (81) і враховуючи $\forall\ j\in\mathscr{M}_r$ співвідношення (71), отримуємо (72).

Очевидно, що (72) має місце тільки тоді, коли виконані умови (73) і

$$\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}a_l\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}b_i-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}b_l-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i}\leqslant b_k \quad \forall\ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,, \tag{83}$$

адже має бути

$$y_k^*\in Y^{\langle k\rangle}=\left[a_k\,;\,b_k\right] \quad \forall\ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,. \tag{84}$$

Але із нерівності (83) випливає

$$1-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}a_l\leqslant 1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i \quad \forall\ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,, \tag{85}$$

$$\sum_{i=1}^{N-1}a_i-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}a_l\leqslant\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q}b_l \quad \forall\ k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathscr{M}_q\,, \tag{86}$$

де використані (31) і (32), а (86) виконується завжди. Тому для (72) достатньо одних умов (73).

Нарешті, щодо $r\in\left\{\overline{1,\,N-2}\right\}$ міркування наступні. Очевидно, що якщо множина $\mathscr{M}_r$ не є порожньою, то усі множини $\left\{\mathscr{M}_q\right\}_{q=1}^{r-1}$ теж мають бути непорожніми. Максимальна кількість непорожніх підмножин множини $\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}$, що попарно не перетинаються, дорівнює $N-1$. Й у крайньому випадку вони є одноелементними. Якби було $r=N-1$, то з (72) вийшло б

$$y_k^*=\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-1}\mathscr{M}_q}a_l\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}b_i-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-1}\mathscr{M}_q}b_l-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i}=\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}b_i-\sum\limits_{i=1}^{N-1}b_i-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i}=\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i\right)}{1-\sum\limits_{i=1}^{N-1}a_i}=b_k\,, \tag{87}$$

а (87) виконувалось би при $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{N-1} \mathcal{M}_q = \varnothing$. До того ж, з (86) слідує те, що нерівність (83) виконується строго. Тому перевіримо, чи може бути $r = N-2$. У такому випадку (73) має бути виконано. Отож,

$$\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} a_l\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \geqslant a_k,\ \frac{b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} a_l\right)}{1+b_k-\sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \geqslant a_k,\ b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} a_l\right) \geqslant a_k\left(1+b_k-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} a_l\right) - a_k b_k \geqslant a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),\ b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{N-2}\mathcal{M}_q} a_l - a_k\right) \geqslant a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),\ b_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right) \geqslant a_k\left(1-\sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

звідки для єдиного $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ отримуємо дійсне співвідношення $b_k \geqslant a_k$. Тому $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$ для нерегулярних оптимальних стратегій (25) у континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12).

Теорему доведено.

Тепер час узагальнити Означення 4 – 6 щодо нерегулярних компонент оптимальної стратегії другого гравця (25) вище першого степеня. Так само повинні бути узагальнені Теореми 5 і 6.

Означення 7. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) j-а компонента (71) оптимальної стратегії другого гравця (25) називається простою нерегулярною компонентою r-го степеня, якщо виконується умова (70), де $j \in \mathcal{M}_r$ та $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$.

Означення 8. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) k-а компонента (72) оптимальної стратегії другого гравця (25) називається зміщеною нерегулярною компонентою r-го степеня, $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$.

Означення 9. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) оптимальна стратегія другого гравця (25) називається нерегулярною стратегією r-го степеня, якщо серед її компонент немає нерегулярних компонент вище r-го степеня, $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$.

Теорема 8. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ таке, що k-а компонента y_k^* оптимальної стратегії другого гравця (25) може бути зміщеною нерегулярною компонентою r-го степеня, де $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$.

Доведення. Твердження теореми означає, що для антагоністичної гри з ядром (11) на паралелепіпеді (12) знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ таке, що відповідна умова у (73) буде виконана. Та припустимо, що умови у (73) не виконуються для жодного $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$. Тоді

$$\frac{b_k\left(1-\sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q} a_l\right)}{1+\sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l\in\bigcup\limits_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} < a_k \quad \forall\ k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q . \tag{88}$$

Просумуємо ліві та праві частини нерівностей у (88) по $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ й отримаємо:

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k \left(1 - \sum_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l\right) < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} b_i - \sum_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k \left(1 - \sum_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l\right) < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \left(1 + \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k \left(1 - \sum_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l\right) - \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k \left(1 - \sum_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l - \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k\right) < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right) < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \left(1 - \sum_{i=1}^{N-1} a_i\right),$$

$$\sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_k < \sum_{k \in \left\{\overline{1,\,N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_k \,. \tag{89}$$

Співвідношення (89) спростовує припущене, оскільки це співвідношення неможливе. Тому знайдеться хоча б одне $k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q$ таке, де k-а компонента y_k^* за (72) може бути зміщеною нерегулярною компонентою r-го степеня, де $r \in \left\{\overline{1,\, N-2}\right\}$. Теорему доведено.

Таким чином, в нерегулярній оптимальній стратегії другого гравця (25) є принаймні одна проста нерегулярна компонента r-го степеня і може бути зміщена нерегулярна компонента r-го степеня, де $r \leqslant N-2$. При цьому, як зараз легко з'ясується, зміщена нерегулярна k-а компонента r-го степеня завжди є меншою від попередньо обчисленої k-ї зміщеної нерегулярної компоненти $(r-1)$-го степеня $\forall\, r \in \left\{\overline{2,\, N-2}\right\}$.

Теорема 9. У континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) має місце нерівність

$$\frac{b_k \left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l\right)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} < \frac{b_k \left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r-1} \mathcal{M}_q} a_l\right)}{1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r-1} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i} \quad \text{при } k \in \left\{\overline{1,\, N-1}\right\} \setminus \bigcup_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q \,. \tag{90}$$

Доведення. Розглянемо різницю лівої і правої частин у нерівності (90), скорочених на b_k:

$$\frac{\left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} a_l\right)\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r-1} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i\right) - \left(1 - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r-1} \mathcal{M}_q} a_l\right)\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i\right)}{\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i\right)\left(1 + \sum\limits_{i=1}^{N-1} b_i - \sum\limits_{l \in \bigcup\limits_{q=1}^{r-1} \mathcal{M}_q} b_l - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i\right)} =$$

$$
=\Bigg(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}a_l-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{i=1}^{N-1}a_i-
$$

$$
-1-\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l+\sum_{i=1}^{N-1}a_i+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-
$$

$$
-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{i=1}^{N-1}a_i\Bigg)\Bigg/\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)=
$$

$$
=\frac{-\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l-\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\sum_{i=1}^{N-1}b_i+\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l+\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\sum_{i=1}^{N-1}a_i+\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=
$$

$$
=\frac{\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l-\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)+\left(\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l+\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\right)\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\left(\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l+\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=
$$

$$
=\frac{\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l-\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)+\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}=
$$

$$
=\frac{\sum_{l\in\mathcal{M}_r}b_l\left(1-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\right)-\sum_{l\in\mathcal{M}_r}a_l\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}{\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right)}\quad\text{при}\quad k\in\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}\setminus\bigcup_{q=1}^{r}\mathcal{M}_q\,. \tag{91}
$$

Але з нерівності (70) за усіма $j\in\mathcal{M}_r\subset\left\{\overline{1,\,N-1}\right\}$ матимемо

$$
\frac{\sum_{j\in\mathcal{M}_r}b_j\left(1-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\right)}{1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i}<\sum_{j\in\mathcal{M}_r}a_j\,,\;\;\sum_{j\in\mathcal{M}_r}b_j\left(1-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}a_l\right)<\sum_{j\in\mathcal{M}_r}a_j\left(1+\sum_{i=1}^{N-1}b_i-\sum_{l\in\bigcup_{q=1}^{r-1}\mathcal{M}_q}b_l-\sum_{i=1}^{N-1}a_i\right). \tag{92}
$$

Остання нерівність у (92) показує, що чисельник у (91) є від'ємним. Те, що знаменник у (91) додатний, є очевидним. Тому дріб у (91) є від'ємним, що підтверджує справедливість (90). Теорему доведено.

Узагальнення Теореми 2 окреслить діапазон значень компонент нерегулярної стратегії (25) довільного степеня.

Теорема 10. Якою б не була нерегулярна оптимальна стратегія другого гравця (25) у континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12), її k-а компонента задовольняє умові (45).

Доведення. Справедливість цього твердження випливає безпосередньо з того, що нерівність (86) як наслідок нерівності (83) виконується строго. Тому й нерівності (83) усі виконані строго, а це дає (45). Теорему доведено.

Висновок та перспективи подальших досліджень

Доведені у Теоремах 1 – 10 твердження з практичної точки зору є самодостатнім підґрунтям для визначення оптимальної поведінки другого гравця у континуальній антагоністичній грі з ядром (11) на паралелепіпеді (12) як моделі усунення N часткових невизначеностей імовірнісного типу у формі мінімізації максимального дисбалансу. Перспективи подальших досліджень вбачаються у розгляді інших форм усунення невизначеностей на основі антагоністичних моделей, де замість мінімізації максимального дисбалансу відношень справжнього і припущеного значень досліджуваних параметрів мінімізовуватиметься максимум відношень, наприклад, їх квадратів [3].

Література

1. Романюк В.В. Модель усунення часткових невизначеностей імовірнісного типу як мінімізація максимального дисбалансу / В.В. Романюк // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наукових праць. Комп'ютерні системи та компоненти. – Чернівці: ЧНУ, 2011. – Т. 2, вип. 1.

2. Воробьёв Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н.Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.

3. Романюк В.В. Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на N-колонну будівельну конструкцію-опору / В.В. Романюк // Проблеми трибології. – 2011. – № 2. – С. 111 – 114.

4. Пшеничный Б.Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Пшеничный Б.Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 320 с.

Надійшла 9.4.2011 р.

УДК 378.37.01

Я.Т. КІНИЦЬКИЙ, О.В. ГОЛОВКО
Хмельницький національний університет

РЕЙТИНГОВЕ ОЦІНЮВАННЯ ДІЯЛЬНОСТІ НАУКОВО-ПЕДАГОГІЧНИХ ПРАЦІВНИКІВ УНІВЕРСИТЕТУ ТА ЕФЕКТИВНІСТЬ ЇХНЬОЇ НАУКОВОЇ РОБОТИ

В роботі розглядається вплив рейтингового оцінювання діяльності науково-педагогічних працівників університету на ефективність їхньої наукової роботи.

Influence of the rating estimation of the activity of the scientific and pedagogical staff of the university on the effectiveness of their scientific work is considered in this paper.

Ключові слова: наукова діяльність, рейтинг.

Постановка проблеми. На даний час в багатьох вищих навчальних закладах країн світу, в тому числі і в Україні, розробляються та впроваджуються різноманітні методики рейтингового оцінювання діяльності науково-педагогічних кадрів [1– 5]. Хоча така система передбачена наказом Міністерства освіти і науки України № 948 від 29.10.2007 р., проте, на сьогодні немає загальновизнаної методики – простої за формою, об'єктивної за змістом.

Як ми вже відзначали [6-9], в нашому університеті для підвищення трудової активності професорсько-викладацького складу та наукових співробітників (НС) ще в 2003 році запроваджено щорічне рейтингове оцінювання їхньої роботи, що дозволило повніше використовувати інтелектуальний потенціал університету та стимулювати ефективність виконання всіх видів робіт.

Оскільки робота викладача багатогранна, тому, згідно з нашою методикою, її поділили на наступні види: навчальна, навчально-методична, науково-дослідна, організаційно-методична та виховна. В цій роботі ми розглянемо лише вплив рейтингового оцінювання діяльності науково-педагогічних працівників (НПП) університету на ефективність їхньої наукової роботи.

Методика оцінювання наукової роботи науково-педагогічних працівників. При оцінюванні наукової роботи враховуються такі види робіт:

- держбюджетні та госпдоговірні науково-дослідні роботи, участь у міжнародних програмах з проведення в університеті наукових досліджень, у структурних підрозділах, які надають платні науково