

ЙМОВІРНІСНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА ІМІТАЦІЯ НА ЕОМ ЦИКЛІЧНОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ІЗ ЦИКЛІЧНИМИ РЕАЛІЗАЦІЯМИ НА БАЗІ АДИТИВНОЇ МОДЕЛІ

У роботі досліджено ймовірнісні характеристики підкласу циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що утворені шляхом адитивного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини, зокрема, встановлено у яких саме ймовірнісних характеристиках цих випадкових процесів має місце циклічна структура. Обґрунтовано метод імітації таких циклічних випадкових процесів на ЕОМ.

In work probabilistic characteristics of a subclass of cyclical casual processes with the cyclical realisations, organised by an additive combination of the determined cyclical function and a random variable are investigated, in particular, is established in which probabilistic characteristics of these casual processes the cyclical structure takes place. The method of imitation of such cyclical casual processes on the computer is justified.

Ключові слова: циклічний випадковий процес із циклічними реалізаціями, адитивна модель, ймовірнісні характеристики, імітаційне моделювання.

Вступ

Проектування та створення інформаційних систем аналізу, аутентифікації та прогнозу за сигналами та процесами, які мають циклічну ймовірнісну структуру є актуальною науково-технічною проблемою сучасної біометрії (зокрема, кардіометрії), економетрики, біометричної аутентифікації, радіотехніки та телекомунікації [1, 2]. У цьому контексті важливим завданням є розробка адекватних математичних моделей, які б враховували такі властивості досліджуваних сигналів як їх циклічність, стохастичність, змінність та спільність ритму.

У роботі [3] означено та досліджено ймовірнісні характеристики циклічних випадкових процесів, зокрема, циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями.

Постановка завдання

Дана робота присвячена дослідженню ймовірнісних характеристик циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, які утворені шляхом адитивного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини, а також питанню імітаційного моделювання цього підкласу циклічних випадкових процесів на ЕОМ.

Результати дослідження

Однією із найпростіших математичних моделей, що задають у конструктивній формі циклічний випадковий процес із циклічними реалізаціями є адитивне поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини $A(\omega)$, а саме:

$$\xi(\omega, t) = f(t) + A(\omega), \omega \in \Omega, t \in \mathbf{R}. \quad (1)$$

Розглянемо ймовірнісні характеристики випадкового процесу (1). Так, математичне сподівання випадкового процесу (1) описується виразом:

$$m_{\xi}(t) = f(t) + m_A = f(t + T(t, n)) + m_A = m_{\xi}(t + T(t, n)), t \in \mathbf{R}, \quad (2)$$

де m_A – математичне сподівання випадкової величини $A(\omega)$. Тобто, математичне сподівання випадкового процесу (1) є циклічною числовою функцією із функцією ритму $T(t, n)$, яка згідно роботи [4] задовольняє таким умовам.

1.
 - а) $T(t, n) > 0$, якщо $n > 0$ ($T(t, 1) < \infty$);
 - б) $T(t, n) = 0$, якщо $n = 0$;
 - в) $T(t, n) < 0$, якщо $n < 0$, $t \in \mathbf{R}$.

2. Для будь-яких $t_1 \in \mathbf{R}$ та $t_2 \in \mathbf{R}$, для яких $t_1 < t_2$, для функції $T(t, n)$ виконується строга нерівність:

$$T(t_1, n) + t_1 < T(t_2, n) + t_2, \forall n \in \mathbf{Z}. \quad (4)$$

3. Функція $T(t, n)$ є найменшою за модулем ($|T(t, n)| \leq |T_{\gamma}(t, n)|$) серед усіх таких функцій $\{T_{\gamma}(t, n), \gamma \in \Gamma\}$, які задовольняють умови (3) та (4).

Дисперсія випадкового процесу (1) є константною, яка дорівнює дисперсії D_A випадкової величини $A(\omega)$, а саме:

$$D_{\xi}(t) = D_A = \text{const}. \quad (5)$$

Початкові моментні функції випадкового процесу (1) представляються виразом:

$$a_{\xi}^k(t) = \sum_{l=0}^k C_k^l \cdot f^l(t) \cdot a_A^{k-l} = \sum_{l=0}^k C_k^l \cdot f^l(t + T(t, n)) \cdot a_A^{k-l} = a_{\xi}^k(t + T(t, n)), t \in \mathbf{R}, \quad (6)$$

де a_A^{k-l} – початковий момент порядку $k-l$ випадкової величини процесу $A(\omega)$. Отже, початкові моментні функції випадкового процесу (1) є циклічними функціями.

Одновимірні функція розподілу $F_{\xi}(x, t)$ та щільність розподілу $p_{\xi}(x, t)$ випадкового процесу (1) є циклічними функціями за аргументом t , а саме:

$$F_{\xi}(x, t) = F_A(x + f(t)) = F_A(x + f(t + T(t, n))) = F_{\xi}(x, t + T(t, n)), x, t \in \mathbf{R}, \quad (7)$$

$$p_{\xi}(x, t) = p_A(x + f(t)) = p_A(x + f(t + T(t, n))) = p_A(x, t + T(t, n)), x, t \in \mathbf{R}, \quad (8)$$

де $F_A(x)$ та $p_A(x)$ – функція розподілу та щільність розподілу випадкової величини $A(\omega)$.

Коваріаційна функція випадкового процесу (1) представляється у вигляді виразу:

$$\begin{aligned} C_{\xi}(t_1, t_2) &= \mathbf{M}\{\xi(\omega, t_1) \cdot \xi(\omega, t_2)\} = \mathbf{M}\{(A(\omega) + f(t_1)) \cdot (A(\omega) + f(t_2))\} = \\ &= \mathbf{M}\{A(\omega) \cdot A(\omega) + A(\omega) \cdot f(t_2) + A(\omega) \cdot f(t_1) + f(t_1) \cdot f(t_2)\} = \\ &= a_A^2 + m_A \cdot (f(t_1) + f(t_2)) + f(t_1) \cdot f(t_2). \end{aligned}$$

$$C_{\xi}(t_1, t_2) = a_A^2 + m_A \cdot (f(t_1) + f(t_2)) + f(t_1) \cdot f(t_2) =$$

$$\begin{aligned} a_A^2 + m_A \cdot (f(t_1 + T(t_1, n)) + f(t_2 + T(t_2, n))) + f(t_1 + T(t_1, n)) \cdot f(t_2 + T(t_1, n)) = \\ = C_{\xi}(t_1 + T(t_1, n), t_2 + T(t_2, n)), t_1, t_2 \in \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (9)$$

У формулі (9), a_A^2 є другим початковим моментом випадкової величини $A(\omega)$. Отже, коваріаційна функція випадкового процесу (1) є циклічною за сукупністю її двох аргументів.

Кореляційна функція випадкового процесу (1) представляється у вигляді виразу:

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t_1, t_2) &= C_{\xi}(t_1, t_2) - m_{\xi}(t_1) \cdot m_{\xi}(t_2) = \\ &= a_A^2 + m_A \cdot (f(t_1) + f(t_2)) + f(t_1) \cdot f(t_2) - (f(t_1) + m_A)(f(t_2) + m_A) = a_A^2 - m_A^2 = D_A. \end{aligned} \quad (10)$$

Тобто, кореляційна функція випадкового процесу (1) не залежить від циклічної числової функцій $f(t)$, і для $\forall t_1, \forall t_2 \in \mathbf{R}$ дорівнює дисперсії випадкової величини $A(\omega)$, тобто є константою.

Розглянемо конкретні приклади імітації циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, які базуються на адитивній моделі (1) та утворені шляхом дії оператора перетворення шкали [5] на періодичні випадкові процеси із періодичними реалізаціями, що є продовженням результатів робіт [6, 7].

На рисунку 1, подано графіки декількох реалізацій 2π -періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t) = A(\omega) + \cos(t), t \in (0, \infty)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t) = A(\omega) + \sin(t) + 0.7 \cdot \cos(2 \cdot t) + 0.4 \cdot \cos(3 \cdot t), t \in (0, \infty)$ із 2π -періодичними реалізаціями. Відзначимо, що дані випадкові процеси та всі їх реалізації, мають однаковий стабільний ритм, оскільки описуються однаковою функцією ритму $T(t, 1) = 2\pi$, тому вони є строго ритмічно пов'язаними.

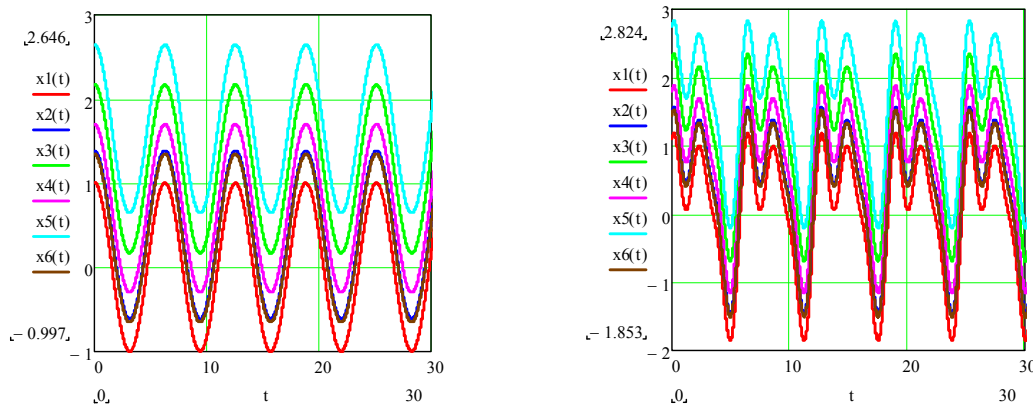


Рис. 1. Графіки реалізацій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$ із періодичними реалізаціями

На рисунках 2-5, подано графіки математичних сподівань, дисперсій, коваріаційних та кореляційних функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$ із періодичними реалізаціями

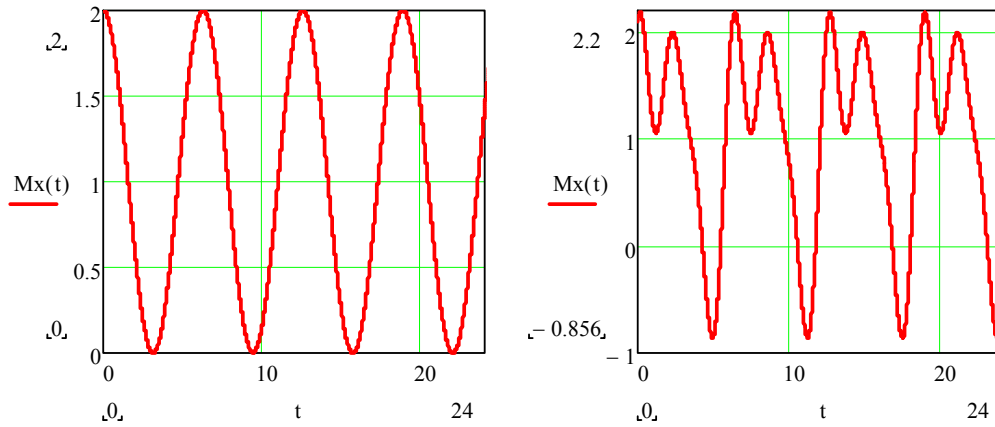


Рис. 2. Графіки математичних сподівань періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$

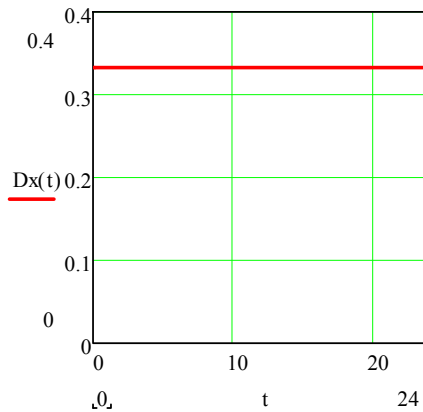


Рис. 3. Графік дисперсії періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$

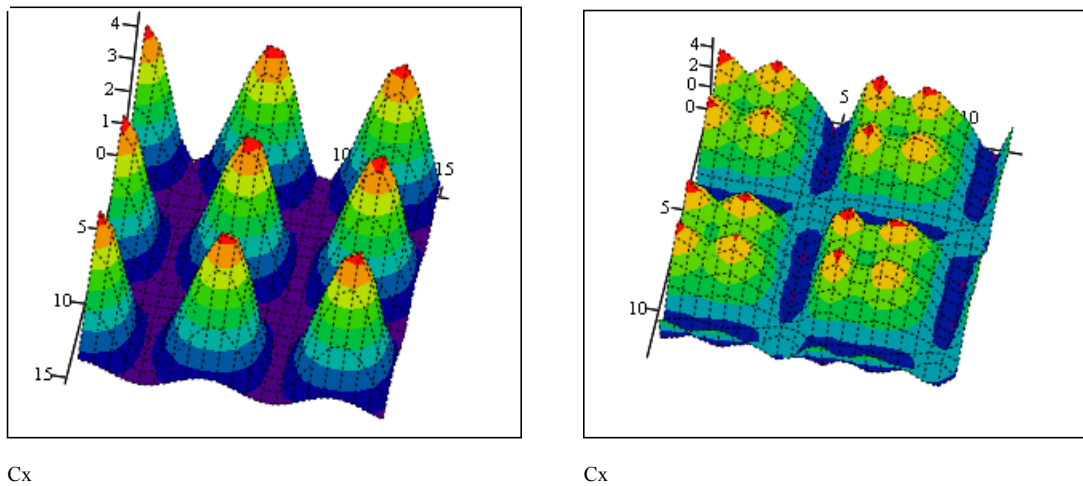


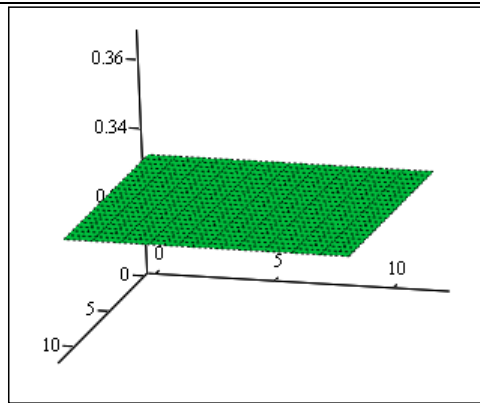
Рис. 4. Графіки коваріаційних функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$

На рисунку 6, подано графіки взаємної коваріаційної та кореляційної функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$ із періодичними реалізаціями

На рисунку 7, подано графік реалізацій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями, які отримані шляхом дії оператора перетворення шкали із функцією перетворення шкали $y(t) = t^2 + t, t \in (0, \infty)$ на процеси $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$, а саме:

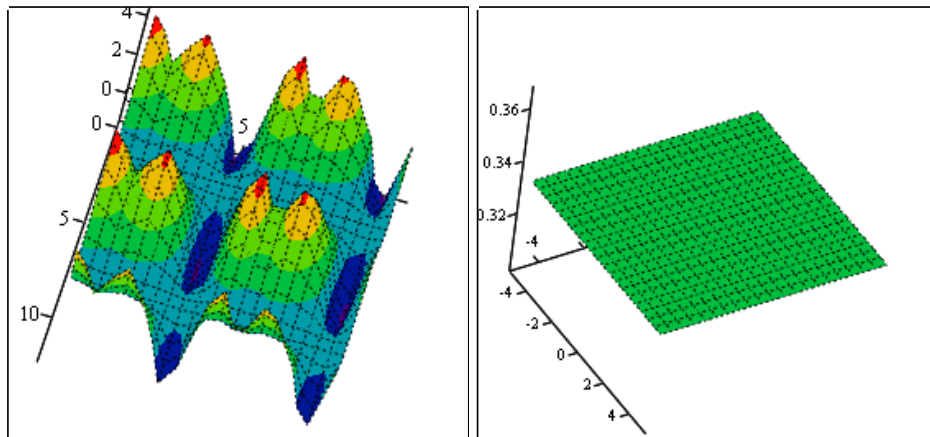
$$\xi(\omega, t) = \xi_{2\pi}(\omega, y(t)) = A(\omega) + \cos(t^2 + t), t \in (0, \infty), \quad (11)$$

$$\tilde{\xi}(\omega, t) = \tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, y(t)) = A(\omega) + \sin(t^2 + t) + 0.7 \cdot \cos(2 \cdot t^2 + 2 \cdot t) + 0.4 \cdot \cos(3 \cdot t^2 + 3 \cdot t). \quad (12)$$



Rx

Рис. 5. Графік кореляційної функції випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$.



Cxy

Rxy

Рис. 6. Графіки взаємних коваріаційної та кореляційної функцій періодичних випадкових процесів $\xi_{2\pi}(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}_{2\pi}(\omega, t)$

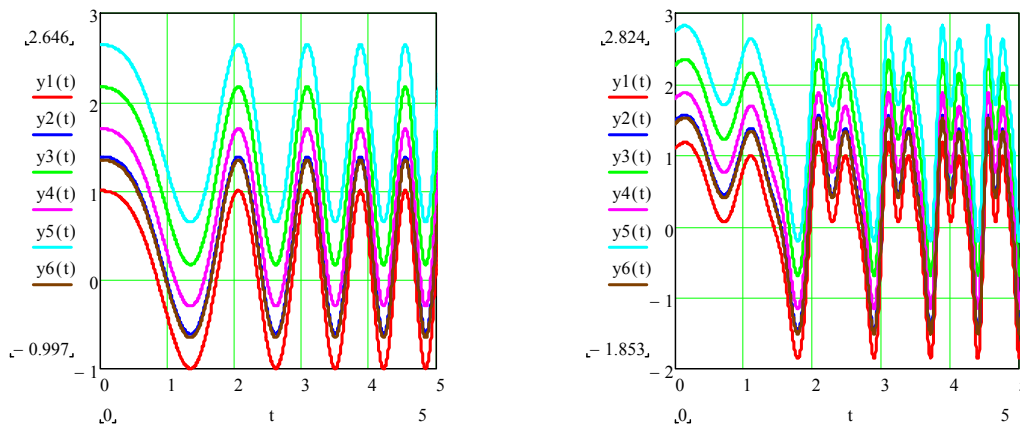


Рис. 7. Графіки реалізацій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями

На рисунках 8-13, подано графіки математичних сподівань, дисперсій, перерізів коваріаційних та кореляційних функцій циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними реалізаціями

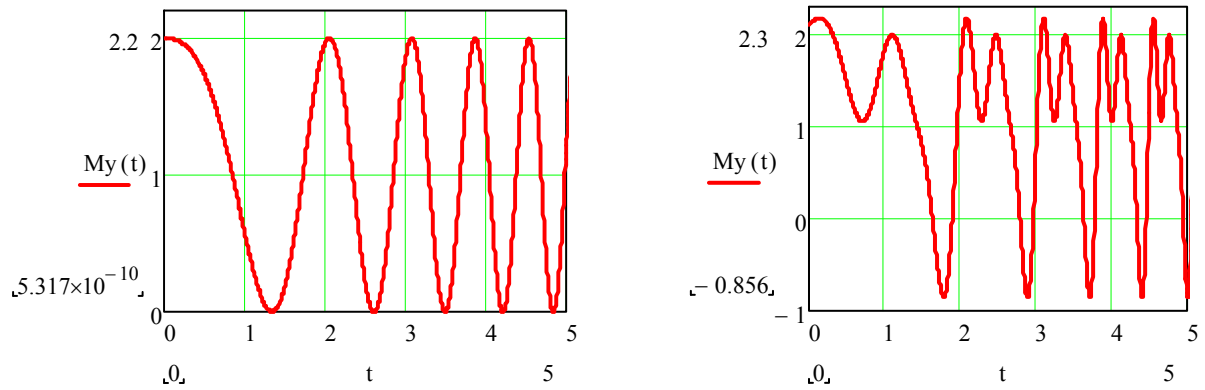


Рис. 8. Графіки математичних сподівань циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$

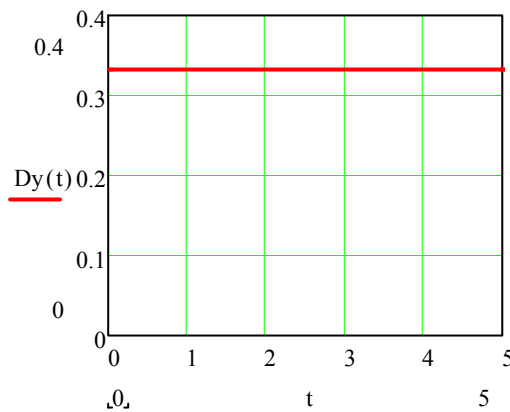


Рис. 9. Графік дисперсії циклічних ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$

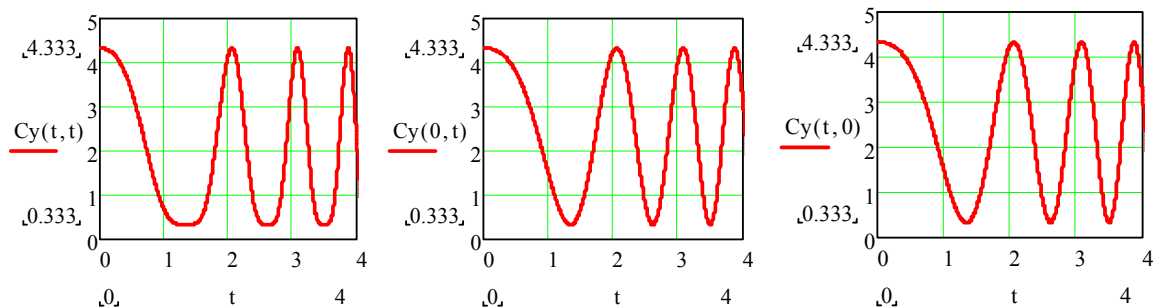


Рис. 10. Графіки перерізів коваріаційної функції циклічного випадкового процесу $\xi(\omega, t)$ із циклічними реалізаціями

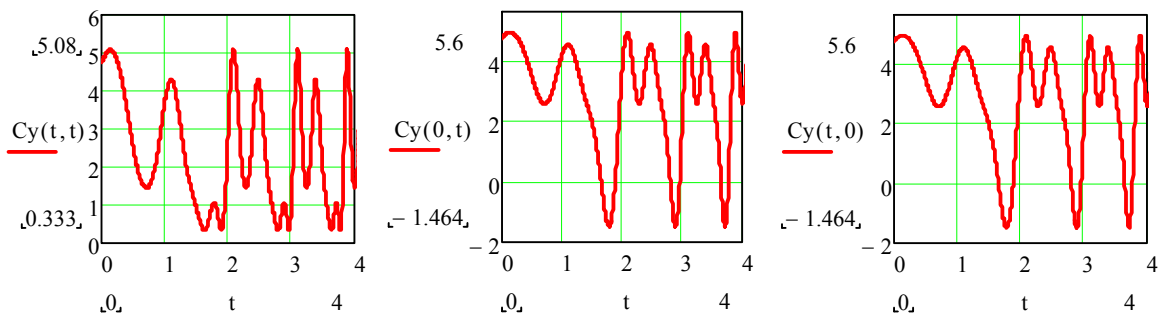
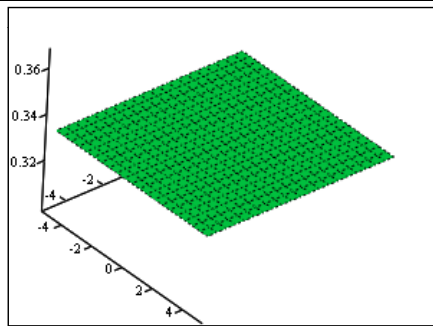


Рис. 11. Графіки перерізів коваріаційної функції циклічного випадкового процесу $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними реалізаціями



Ry

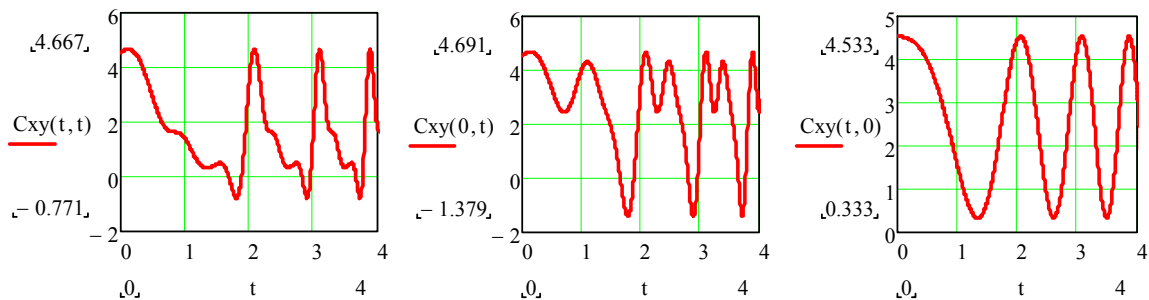
Рис. 12. Графік кореляційної функції циклічного випадкового процесу $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними реалізаціями

Рис. 13. Графіки перерізів взаємної коваріаційної функції циклічних

ритмічно пов'язаних випадкових процесів $\xi(\omega, t)$ та $\tilde{\xi}(\omega, t)$ із циклічними ритмічно пов'язаними реалізаціями

Висновки

1. Досліджено ймовірнісні характеристики підкласу циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що утворені шляхом адитивного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини, зокрема, встановлено у яких саме ймовірнісних характеристиках цих випадкових процесів має місце циклічна структура.

2. Обґрунтовано метод імітаційного моделювання підкласу циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, що утворені шляхом адитивного поєднання детермінованої функції та випадкової величини.

3. Наведено приклади циклічних випадкових процесів із циклічними реалізаціями, зокрема, ритмічно пов'язаних процесів, які утворені шляхом адитивного поєднання детермінованої циклічної функції та випадкової величини.

Література

1. Gardner W. A. Cyclostationarity: Half a century of research / W. A. Gardner, A. Napolitano, L. Paura // Signal Processing. – 2005. – № 86 (2006). – P. 639–697.
2. Ghysels E. On the Periodic Structure of the Business Cycle / E. Ghysels // Cowles Foundation, Yale Universiti. – 1992. – No. 1028.
3. Лупенко С. А. Детерминированные и случайные циклические функции как модели колебательных явлений и сигналов: определение и классификация / С. А. Лупенко // Электронное моделирование / Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. – Киев, 2006. – Т. 28, № 4. – С. 29–45.
4. Лупенко С. Циклічне функціональне відношення як основа математичного формалізму теорії моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2007. – Т. 12, № 3. – С. 183–195.
5. Лупенко С. Оператор перетворення шкали в задачах моделювання та аналізу циклічних сигналів / С. Лупенко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. – Тернопіль, 2007. – Т. 12, № 4. – С. 141–152.
6. Лупенко С. А. Імітаційне моделювання циклічних випадкових процесів на ЕОМ / С. А. Лупенко, А. М. Луцків // Науковий вісник НЛТУ: Зб. наук. – техн. праць. – Львів, 2006. – Вип. 16.6 – С. 110–119.
7. Лупенко С. А. Концептуально-методологічні основи імітаційного моделювання циклічних сигналів на ЕОМ із використанням їх моделі у вигляді циклічного функціонального відношення / С. А. Лупенко, Н. Р. Дем'янчук, А. С. Сверстюк // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький, 2008. – № 2. – С. 101–111.

Надійшла 17.4.2011 р.