УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

НЕРЕГУЛЯРНА ЛІВОРУЧ ОПТИМАЛЬНА СТРАТЕГІЯ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА ПЕРШОГО СТЕПЕНЯ У МОДЕЛІ УСУНЕННЯ ЧОТИРЬОХЕЛЕМЕНТНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ ЯК АНТАГОНІСТИЧНІЙ ГРІ НА ШЕСТИВИМІРНОМУ ГІПЕРПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУЮВАННЯ ЧОТИРЬОХОПОРНОЇ ПЛАТФОРМИ

Розглядається проблема усунення невизначеностей при завищенні сегментних оцінок. Доводяться твердження про компоненти оптимальної стратегії проектувальника в антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи.

There is investigated a problem of removing uncertainties by overestimation of segment evaluations. There are proved claims on components of the projector optimal strategy in the antagonistic game on six-dimensional hyperparallelepiped for optimizing the four-propped platform construction.

Ключові слова: розподіл обмежених ресурсів, опорна платформа, площа поперечного перетину, невизначеність, опукла антагоністична гра, шестивимірний гіперпаралелепіпед, оптимальна стратегія проектувальника, нерегулярні компоненти.

Вступ (проблематика у загальному)

У світі практично все влаштовано так, що побажання і прагнення, потреби і необхідності завжди значно перевищують можливості та доступні ресурси. Тому розподіл обмежених ресурсів беззаперечно породжує конфліктні явища, події, об’єкти, системи [1, 2]. Моделями вирішення таких конфліктних процесів виступають безкоаліційні або кооперативні ігри [1, 3, 4]. Зокрема, фундаментальною основою улагоджування протиріч проектувальних робіт [5, 6] є антагоністичні ігри, за допомогою чого усуваються невизначеності й оптимізуються витрати.

Аналітичний огляд першоджерел

Одним з найбільш важливих вузлів монтажних конструкцій є опорні (вертикальні) або з’єднувальні (горизонтальні) платформи. Кількість опор є фактично натуральним числом, але вона розраховується за спеціальними методиками [7]. Виготовляти опору суцільною не тільки збитково, а й невигідно з точки зору збільшення масогабаритів (що особливо небажано для “верхніх поверхів”). Тому й опора дробиться на окремі стовпці, балки, колони чи підпорки, площа поперечного перетину (ППП) яких також вираховується з урахуванням потенційних перевантажень у майбутньому. Існує мікромодель перевантаження у формі співвідношення [8] r_i сили або тиску x_i, котрі діють на i-ту опору, та площі y_i її поперечного перетину, де $r_i = x_i y_i^{-2}$ при $i \in \mathbb{N}$. Величини тиску та ППП нормуються так, що сумарне навантаження на платформу дорівнює одиниці. Але можливий тиск на i-ту опору не може бути оцінений точково, тому й незрозуміло, яким буде ППП i-ї опори. Втім, для i-ї опори намагаються дати інтервальну оцінку тиску та ППП, за якою $x_i \in [a_i; b_i] \subset (0; 1) \subset [0; 1]$ й $y_i \in [a_i; b_i] \subset (0; 1) \subset [0; 1]$. І, як уже зазначалось, сегмент $[a_i; b_i]$ не може бути стягнутий у точку: $\mu_{\mathbb{R}}([a_i; b_i]) > 0$.

Для класичних чотирьохопорних платформ моделлю усунення $\{[a_i; b_i]\}_{i=1}^{4}$-невизначеностей є використання проектувальником чистої оптимальної стратегії (ОС)

$$\mathbf{Y}_* = \begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* & y_3^* \end{bmatrix} \subset [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \qquad (1)$$

другого гравця в антагоністичній грі (АГ) з ядром

$$\max\left(\{r_i\}_{i=1}^{4}\right) = \max\left\{x_1 y_1^{-2},\, x_2 y_2^{-2},\, x_3 y_3^{-2},\, \frac{1 - x_1 - x_2 - x_3}{(1 - y_1 - y_2 - y_3)^2}\right\} = T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \qquad (2)$$

на декартовому добутку

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \prod_{p=1}^{2} [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{p=1}^{2} \left(\prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \right) \subset \prod_{i=1}^{6} (0; 1) \subset \prod_{i=1}^{6} [0; 1] \subset \mathbb{R}^6 \qquad (3)$$

паралелепіпеда

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0; 1) \subset \prod_{d=1}^{3} [0; 1] \subset \mathbb{R}^3 \qquad (4)$$

чистих стратегій

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{X}} \qquad (5)$$

першого гравця і паралелепіпеда

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0; 1) \subset \prod_{d=1}^{3} [0; 1] \subset \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

чистих стратегій

$$\mathbf{Y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \tag{7}$$

другого гравця. При побудові ядра (2) використано те, що $\sum_{i=1}^{4} x_i = 1$ та $\sum_{i=1}^{4} y_i = 1$ в силу нормування. Оскільки АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) є опуклою [8], то ОС (1) існує. Звідси, якщо визначено ОС (1), то проектувальник отримує у розпорядження оптимальні ППП $\{y_1^*, y_2^*, y_3^*\}$ й $y_4^* = 1 - \sum_{d=1}^{3} y_d^*$ усіх опор, які є результатом мінімізації максимальних перевантажень, що діятимуть на них. Такий гарантований мінімаксний результат є принципово необхідним і зручним, але через те, що не завжди гіперболічні гіперповерхні (ГБГП) під знаком максимуму у (2) мають спільну точку усередині або на гранях паралелепіпеда (6), пошук компонент ОС (1) потребує додаткового обґрунтування.

Мета та завдання статті

З вищезазначеного випливає мета статті — вказати напрямок розв'язування АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3), взявши до уваги можливу умову порушення того, що ГБГП під знаком максимуму у (2) мають спільну точку у паралелепіпеді (6). При цьому покладатимемо, що теоретично матиме місце лише переоцінка одного або декількох з лівих кінців $\{[a_d; b_d]\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей, котрі задаються. Для досягнення поставленої мети слід розглянути основний (аналітичний) спосіб розв'язання досліджуваної АГ, відштовхування від якого дозволить врахувати цю переоцінку.

Регулярна оптимальна стратегія проектувальника

Основний спосіб розв'язання АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) полягає у застосуванні принципу мінімаксу і відповідному визначенні ОС (1):

$$\min_{\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \max_{\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}} T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \min_{\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \max_{\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}} \left\{ \max \left\{ x_1 y_1^{-2}, x_2 y_2^{-2}, x_3 y_3^{-2}, \frac{1 - x_1 - x_2 - x_3}{(1 - y_1 - y_2 - y_3)^2} \right\} \right\} =$$

$$= \min_{\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \left(\max \left\{ \max_{x_1 \in [a_1; b_1]} \{x_1 y_1^{-2}\}, \max_{x_2 \in [a_2; b_2]} \{x_2 y_2^{-2}\}, \max_{x_3 \in [a_3; b_3]} \{x_3 y_3^{-2}\}, \max_{\mathbf{X} \in \boldsymbol{\mathcal{X}}} \left\{ (1 - x_1 - x_2 - x_3)(1 - y_1 - y_2 - y_3)^{-2} \right\} \right\} \right) =$$

$$= \min_{\mathbf{Y} \in \boldsymbol{\mathcal{Y}}} \left(\max \left\{ b_1 y_1^{-2}, b_2 y_2^{-2}, b_3 y_3^{-2}, (1 - a_1 - a_2 - a_3)(1 - y_1 - y_2 - y_3)^{-2} \right\} \right). \tag{8}$$

За припущення того, що ГБГП під знаком екстремумів у (8) мають спільну точку у паралелепіпеді (6), маємо

$$b_1 (y_1^*)^{-2} = b_2 (y_2^*)^{-2} = b_3 (y_3^*)^{-2} = (1 - a_1 - a_2 - a_3)(1 - y_1^* - y_2^* - y_3^*)^{-2} = v_*, \tag{9}$$

звідки

$$1 - y_1^* - y_2^* - y_3^* = \sqrt{(1 - a_1 - a_2 - a_3) v_*^{-1}}, \; y_d^* = \sqrt{b_d v_*^{-1}} \quad \forall\, d = \overline{1, 3}. \tag{10}$$

Далі, сумуючи чотири праві частини в (10), які за справедливості (9) є оптимальними ППП, маємо:

$$1 = \sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d v_*^{-1}} + \sqrt{(1 - a_1 - a_2 - a_3) v_*^{-1}} = \sqrt{v_*^{-1}} \left(\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d} \right), \tag{11}$$

$$v_* = \left(\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d} \right)^2. \tag{12}$$

Підставивши оптимальне значення (12) АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) у (10), отримуємо компоненти

$$y_k^* = \frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \sqrt{b_3} + \sqrt{1 - a_1 - a_2 - a_3}} = \frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}}, \; k = \overline{1, 3}. \tag{13}$$

Означення 1. Якщо в АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3)

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3} \sqrt{b_d} + \sqrt{1 - \sum_{d=1}^{3} a_d}} \in [a_k; b_k] \quad \forall\, k = \overline{1, 3} \tag{14}$$

одночасно, то компоненти (13) ОС (1) називатимемо регулярними. При цьому сама ОС (1) називатиметься регулярною.

Нерегулярна ліворуч оптимальна стратегія проектувальника з нерегулярними компонентами першого степеня

Звичайно, якщо $\exists\, k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ таке, що

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}<a_k\,, \tag{15}$$

то ОС (1) не є регулярною. І можна легко навести контрприклад того, що в АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) проектувальник може мати ОС (1) в умовах таких, що для одного, двох або $\forall\, k=\overline{1,\,3}$ виконуватиметься (15). Мають місце наступні твердження.

Теорема 1. Якщо в АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) $\exists\, r \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ таке, що виконано

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}\in\left[a_r;\,b_r\right] \tag{16}$$

та

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}<a_k \quad \forall\, k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}, \tag{17}$$

причому множина $\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}$ є двоелементною, то ОС (1) має компоненти

$$y_k^*=a_k \quad \forall\, k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\} \tag{18}$$

та r -ту компоненту

$$y_r^*=\frac{\left(1-\sum\limits_{t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}a_t\right)\sqrt{b_r}}{\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}} \tag{19}$$

за умови

$$y_r^*\in\left[a_r;\,b_r\right). \tag{20}$$

Доведення. З умов (16) і (17) випливає, що (9) не виконується і, які б компоненти $\left\{y_k^*\right\}_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}$ ми не брали, буде

$$b_k\left(y_k^*\right)^{-2}<b_r\left(y_r^*\right)^{-2}<\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\left(1-y_1^*-y_2^*-y_3^*\right)^{-2}, \tag{21}$$

адже знаменник в першому дробі у (21) підвищуватиметься, а в останньому — знижуватиметься. Якщо у якості компонент $\left\{y_k^*\right\}_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}$ брати не (18), а інші значення, то останній дріб у (21) буде більший, ніж такий же дріб зі знаменником $\left(1-\sum\limits_{t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}a_t-y_r^*\right)^2$. Тому тут (18) є оптимальними компонентами ОС (1) за умов (17). Отже, на оптимальне значення гри v_* впливає тільки вибір y_r^*, який дасть найменше значення дробу

$$\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-\sum\limits_{t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}a_t-y_r^*\right)^2}, \tag{22}$$

причому значення $b_r\left(y_r^*\right)^{-2}$ не повинно перевищити (22). Тоді припустимо, що має місце

$$b_k\left(a_k\right)^{-2}<b_r\left(y_r^*\right)^{-2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-\sum\limits_{t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}}a_t-y_r^*\right)^2}=v_*,\quad k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\backslash\left\{r\right\}. \tag{23}$$

З передбачуваної рівності у (23) маємо рівняння відносно y_r^*:

$$b_r\left(y_r^*\right)^{-2}=\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t-y_r^*\right)^{-2},$$

$$b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2-2b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)y_r^*+b_r\left(y_r^*\right)^2=\left(y_r^*\right)^2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right),$$

$$\left(y_r^*\right)^2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)+2b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)y_r^*-b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2=0\,. \tag{24}$$

Дискримінант квадратного рівняння (24)

$$D=4b_r^2\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2+4\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2=$$

$$=4b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2\left(b_r+1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)=4b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right). \tag{25}$$

Використовуючи те, що $\sum_{d=1}^{3}a_d<\sum_{d=1}^{3}b_d<1$ в паралелепіпеді (6), матимемо $1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t>0$. Тоді коренями квадратного рівняння (24) є

$$y_r^*=y_r^{*\langle 1\rangle}=\frac{-2b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)+\sqrt{D}}{2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)}=\frac{-2b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)+\sqrt{4b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)^2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}}{2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)}=$$

$$=\frac{-b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)+\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}}{1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r}=\frac{\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r}\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\sqrt{b_r}\right)}{1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r}=$$

$$=\frac{\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r}\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\sqrt{b_r}\right)}{\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_r}\right)\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\sqrt{b_r}\right)}=\frac{\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r}}{\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_r}} \tag{26}$$

або

$$y_r^*=y_r^{*\langle 2\rangle}=\frac{-2b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)-\sqrt{D}}{2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r\right)}=\frac{-b_r\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)-\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}}{1-\sum_{d=1}^{3}a_d-b_r}=$$

$$=\frac{\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r}\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_r}\right)}{b_r-\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}=\frac{\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\right)\sqrt{b_r}\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_r}\right)}{\left(\sqrt{b_r}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right)\left(\sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right)}=$$

$$
=\frac{\left(1-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)\sqrt{b_r}}{\sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}}\,. \tag{27}
$$

Припустимо, що $1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d - b_r < 0$, тобто $y_r^{*\langle 2\rangle} > 0$. Знову припустимо, що $y_r^{*\langle 2\rangle} \leqslant b_r$. Матимемо

$$
1-\sum_{d=1}^{3} a_d - b_r = \left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}\right)\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}-\sqrt{b_r}\right)<0\,,\;\; \sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}>0\,, \tag{28}
$$

після чого

$$
y_r^{*\langle 2\rangle}=\frac{\left(1-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)\sqrt{b_r}}{\sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}}\leqslant b_r\,,\;\; \frac{1-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t}{\sqrt{b_r}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}}\leqslant \sqrt{b_r}\,,\;\; 1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t \leqslant b_r-\sqrt{b_r}\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}\,,
$$

$$
\sqrt{b_r}\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}\leqslant b_r+\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t - 1<0\,. \tag{29}
$$

Але співвідношення (29) неможливе. Тому $y_r^{*\langle 2\rangle} > b_r$ за умови $1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d - b_r < 0$. Якщо ж $1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d - b_r > 0$, то $y_r^{*\langle 2\rangle} < 0$. А при $1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d = b_r$ в (27) буде нескінченно велике значення. Отже, корінь (27) надалі не розглядатимемо, оскільки $y_r^{*\langle 2\rangle} \notin [a_r;\, b_r]$. А значення (26) буде r-ю компонентою (19) ОС (1) за умови (20), адже (19) має бути меншим, ніж (16), для зменшування дробу (22). Справді,

$$
y_r^{*}=y_r^{*\langle 1\rangle}=\frac{\left(1-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)\sqrt{b_r}}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}}<\frac{\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}}\,,\;\; \frac{1-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}}<\frac{1}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3} a_d}}\,,
$$

$$
\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)<\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}\,,
$$

$$
\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)-\sqrt{b_r}<\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}\left(1-1+\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right),
$$

$$
\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)-\sqrt{b_r}\left(\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)<\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}\left(\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right),
$$

$$
\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}\left(1-\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\right)<\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}\right)\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\,,
$$

$$
\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}<\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}+\sqrt{b_r}+\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}\right)\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\,,
$$

$$
\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}<\left(\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3} a_d}+\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}\right)\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}} a_t\,,
$$

$$\frac{\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}\sqrt{b_t}}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}}<\sum_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{r\}}a_t\,. \tag{30}$$

Підсумовуючи вихідні умови (17) за тими двома індексами, що не дорівнюють r, отримуємо (30). Отже, за умови (16) отримуємо $y_r^* < b_r$, тому за умови (20) r-а компонента ОС (1) визначається як (19), а оптимальним значенням гри буде (23). Теорему доведено.

Теорема 2. Якщо в АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) $\exists\, k\in\{\overline{1,3}\}$ таке, що виконано (15) та

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}\in[a_r;\,b_r]\quad\forall\, r\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}, \tag{31}$$

причому множина $\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}$ є двоелементною, то ОС (1) має k-ту компоненту

$$y_k^* = a_k \tag{32}$$

та компоненти

$$y_r^*=\frac{(1-a_k)\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}}\sqrt{b_t}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}\quad\forall\, r\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\} \tag{33}$$

за умов

$$y_r^*\in[a_r;\,b_r)\quad\forall\, r\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}. \tag{34}$$

Доведення. З умов (15) і (31) випливає, що (9) не виконується і, яку б компоненту y_k^* ми не брали, буде (21), адже знаменник в першому дробі у (21) підвищуватиметься, а в останньому — знижуватиметься. Якщо у якості компоненти y_k^* брати не (32), а інше значення, то останній дріб у (21) буде більший, ніж такий же дріб зі знаменником $\left(1-a_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2$. Тому тут (32) є оптимальною компонентою ОС (1) за умови (15). Отже, на оптимальне значення гри v_* впливає тільки вибір y_r^*, який дасть найменше значення дробу

$$\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2}, \tag{35}$$

причому кожне зі значень $b_r\left(y_r^*\right)^{-2}$ не повинно перевищити (35). Тоді припустимо, що має місце

$$b_k(a_k)^{-2}<b_r\left(y_r^*\right)^{-2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2}=v_*,\quad r\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}. \tag{36}$$

З передбачуваної рівності у (36)

$$b_{r_1}\left(y_{r_1}^*\right)^{-2}=b_{r_2}\left(y_{r_2}^*\right)^{-2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_k-y_{r_1}^*-y_{r_2}^*\right)^2}=v_*,\quad \{r_1,\,r_2\}\in\{\overline{1,3}\}\setminus\{k\}, \tag{37}$$

маємо

$$\left(y_{r_2}^*\right)^2=b_{r_2}\left(y_{r_1}^*\right)^2\left(b_{r_1}\right)^{-1},\quad b_{r_1}\left(y_{r_1}^*\right)^{-2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-a_k-y_{r_1}^*-y_{r_1}^*\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}\right)^2}, \tag{38}$$

що дає рівняння відносно $y_{r_1}^*$:

$$b_{r_1}\left(1-a_k-y^*_{r_1}-y^*_{r_1}\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}\right)^2=\left(y^*_{r_1}\right)^2\left(1-a_1-a_2-a_3\right),$$

$$b_{r_1}\left(1-a_k\right)^2-2b_{r_1}\left(1-a_k\right)\left(1+\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}\right)y^*_{r_1}+b_{r_1}\left(1+\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}\right)^2\left(y^*_{r_1}\right)^2=\left(y^*_{r_1}\right)^2\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right),$$

$$\left(y^*_{r_1}\right)^2\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]+2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)y^*_{r_1}-b_{r_1}\left(1-a_k\right)^2=0\,. \qquad (39)$$

Дискримінант квадратного рівняння (39)

$$D=4\left(1-a_k\right)^2 b_{r_1}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2+4\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]b_{r_1}\left(1-a_k\right)^2=$$

$$=4\left(1-a_k\right)^2 b_{r_1}\left[\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2+1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]=4\left(1-a_k\right)^2 b_{r_1}\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right). \qquad (40)$$

Тоді коренями квадратного рівняння (39) є

$$y^*_{r_1}=y^{*\langle 1\rangle}_{r_1}=\frac{-2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)+\sqrt{D}}{2\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]}=\frac{-2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)+2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}}{2\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]}{1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2}=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]}{\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]}=$$

$$=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}} \qquad (41)$$

або

$$y^*_{r_1}=y^{*\langle 2\rangle}_{r_1}=\frac{-2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)-\sqrt{D}}{2\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]}=\frac{-2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)-2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}}{2\left[1-\sum_{d=1}^{3}a_d-\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2\right]}=$$

$$=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]}{\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2-\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left[\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}+\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)\right]}{\left[\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right]\left[\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right]}=$$

$$=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}\,. \qquad (42)$$

Припустимо, що $\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}>0$, тобто $y^{*\langle 2\rangle}_{r_1}>0$. Знову припустимо, що $y^{*\langle 2\rangle}_{r_1}\leqslant b_{r_1}$, тобто (42) може бути оптимальною r_1-ю компонентою ОС (1). Зауважимо, що у такому випадку

$$y^{*\langle 2\rangle}_{r_1}-y^{*\langle 1\rangle}_{r_1}=\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}-\frac{\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}=\frac{2\left(1-a_k\right)\sqrt{b_{r_1}}\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}{\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)^2-\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}>0\,,$$

тобто $y_{r_1}^{*\langle 2\rangle} > y_{r_1}^{*\langle 1\rangle} > 0$, і потенційне оптимальне значення гри досягатиметься саме на $y_{r_1}^{*\langle 2\rangle}$, адже тут $b_{r_1}\left(y_{r_1}^{*\langle 1\rangle}\right)^{-2} > b_{r_1}\left(y_{r_1}^{*\langle 2\rangle}\right)^{-2}$. Але тоді у знаменнику під знаком квадрата дробу у (38) буде

$$1-a_k-y_{r_1}^*-y_{r_1}^*\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}=1-a_k-y_{r_1}^{*\langle 2\rangle}\left(1+\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}\right)=1-a_k-\frac{(1-a_k)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}\cdot\frac{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}}{\sqrt{b_{r_1}}}=$$

$$=\frac{(1-a_k)\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)-(1-a_k)\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}-(1-a_k)\left(\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}\right)}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}=\frac{-(1-a_k)\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}{\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}<0, \quad (43)$$

що неможливо, оскільки (43) має бути рівним $y_4^*=1-\sum\limits_{d=1}^{3}y_d^*>0$ (ППП четвертої опори). Якщо ж $\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}<0$, то $y_{r_1}^{*\langle 2\rangle}<0$, а при $\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}=\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}$ в (42) буде нескінченно велике значення. Отже, корінь (42) надалі не розглядатимемо, оскільки $y_{r_1}^{*\langle 2\rangle}\notin\left[a_{r_1};b_{r_1}\right]$ або отримаємо (43). А значення (41) буде r_1-ю компонентою ОС (1) за умови $y_{r_1}^{*\langle 1\rangle}\in\left[a_{r_1};b_{r_1}\right)$, адже (41) має бути меншим, ніж $\dfrac{\sqrt{b_{r_1}}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}$ в (16), для зменшування дробу (35). Справді,

$$y_r^*=y_{r_1}^{*\langle 1\rangle}=\frac{(1-a_k)\sqrt{b_{r_1}}}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}}<\frac{\sqrt{b_{r_1}}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}},$$

$$\frac{1-a_k}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}}<\frac{1}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}},$$

$$(1-a_k)\left(\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}\right)<\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}},$$

$$\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}-a_k\left(\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}\right)<\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}},$$

$$\sqrt{b_k}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}-a_k\left(\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}\right)<\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}},$$

$$\sqrt{b_k}<a_k\left(\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}\right), \quad (44)$$

а (44) випливає з (15). З (38) отримуємо r_2-гу компоненту

$$y_{r_2}^*=y_{r_1}^*\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}=\frac{(1-a_k)\sqrt{b_{r_1}}\sqrt{b_{r_2}\left(b_{r_1}\right)^{-1}}}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}}=\frac{(1-a_k)\sqrt{b_{r_2}}}{\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}+\sqrt{b_{r_1}}+\sqrt{b_{r_2}}}. \quad (45)$$

Компоненти (41) і (45) компактно запишуться як (33), а (45) є меншим, ніж $\dfrac{\sqrt{b_{r_2}}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}}$ в (16), завдяки симетричним міркуванням на кшталт (44). Отже, за умови (31) отримуємо $y_r^* < b_r \quad \forall\, r \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}$, тому за умов (34) r-і компоненти ОС (1) визначаються як (33), а оптимальним значенням гри буде (36) або (37). Теорему доведено.

Дамо означення тим ОС (1), компоненти яких задовольняють умовам доведених теорем.

Означення 2. Якщо в АГ з ядром (2) на гіперпаралелепіпеді (3) $\exists\, K \subset \{\overline{1,3}\}$ така, що $|K| \in \{1, 2\}$ і виконано (15) $\forall\, k \in K$, причому

$$y_r^* = \frac{\left(1 - \sum\limits_{k \in K} a_k\right)\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus K} \sqrt{b_t} + \sqrt{1 - \sum\limits_{d=1}^{3} a_d}} \quad \forall\, r \in \{\overline{1,3}\} \setminus K, \tag{46}$$

то ОС (1) називатимемо нерегулярною ліворуч (з нерегулярними компонентами першого степеня) першого степеня, де кожну k-ту компоненту (32) назвемо простою нерегулярною компонентою першого степеня (ПНКПС), а кожну r-ту компоненту (46) — зміщеною нерегулярною компонентою першого степеня (ЗНКПС).

Нерегулярність першого степеня підкреслена тому, що (46) мають місце лише при (20) $\forall\, r \in \{\overline{1,3}\} \setminus K$ одночасно. Якщо ж умову (20) порушено, то слідуватиме новий "перерахунок" зміщених нерегулярних компонент ОС (1), що означатиме перехід до другого степеня.

Висновок і перспективи подальшого дослідження

Доведені теореми можна об'єднувати в одну теорему з твердженнями й умовами про одну або дві ПНКПС (32) та дві або одну ЗНКПС (46) відповідно. Випадок з трьома ПНКПС (32), де (15) виконано $\forall\, k = \overline{1,3}$, трапляється вкрай рідко і, головним чином, свідчить про невдале попереднє оцінювання можливих тисків на опори платформи. Випадок з трьома ЗНКПС для чотирьохопорних платформ неможливий, оскільки ЗНКПС з'являються лише там, де є принаймні одна ПНКПС. Перспективи подальшого дослідження вбачаються у розгляді питань щодо можливого "зсуву" компонент ОС (1) праворуч, коли деякі з попередньо знайдених з рівності (9) значень (13) виявляться більшими за відповідні праві кінці сегментів $\{[a_d; b_d]\}_{d=1}^{3}$.

Література

1. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. – М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. – 272 с.
2. Теория игр : [учеб. пособие для ун-тов] / Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Семина Е. А. – М. : Высшая школа, Книжный дом "Университет", 1998. – 304 с. : ил.
3. Романюк В. В. Рекомендації щодо використання нерівноважної симетричної ситуації у діадичній грі як моделі охорони навколишнього середовища з трьома суб'єктами забруднення довкілля / В. В. Романюк // Екологічна безпека та природокористування. – 2010. – Вип. 5. – С. 144–159.
4. Romanuke V. V. Environment guard model as dyadic three-person game with the generalized fine for the reservoir pollution / V. V. Romanuke // Екологічна безпека та природокористування. – 2010. – Вип. 6. – С. 77–94.
5. Романюк В. В. Модель визначення оптимального рішення проектувальника у задачі про розрахунок повздовжньої стійкості двох елементів будівельної конструкції при дії на них нормованого стискаючого зусилля / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 1. – С. 42–56.
6. Романюк В. В. Моделювання дії нормованого одиничного навантаження на три колони однакової висоти у будівельній конструкції і знаходження оптимальної площі кожної опори / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2010. – № 3. – С. 18–25.
7. Дарков А. В. Строительная механика : [учебник для строит. спец. вузов] / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – [8-е изд., перераб. и доп.]. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с. : ил.
8. Романюк В. В. Регулярна оптимальна стратегія проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на N-колонну будівельну конструкцію-опору / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2011. – № 2. – С. 111–114.

Надійшла 22.7.2011 р.