Література

1. Чумакова С.В. Аналітичний огляд способів та обладнання для встановлення металевої фурнітури у вироби легкої промисловості / Світлана Чумакова, Олег Поліщук // Вісник КНУТД. – 2010. – №5, т.2. – С. 142-148.
2. Поліщук О.С. Перспективи застосування імпульсного лінійного електромагнітного приводу в пресовому обладнанні для вставки металевої фурнітури при виготовленні виробів легкої промисловості / О.С. Поліщук, Д.В. Прибега, С.В. Чумакова // Вісник ХНУ. – 2009. - №5. – С.11-14.
3. Поліщук О.С. Використання інформаційних технологій "National Instruments" для лабораторних і наукових досліджень машин легкої промисловості та електропобутової техніки / О.С. Поліщук, С.Л. Горященко, Д.В. Прибега // Вісник ХНУ. – 2008. – №2. – С. 175-180.
4. Стронгин Б.М. Конструирование технологической оснастки : [учебник для средних специальных учебных заведений легкой промышленности] / Стронгин Б.М. – Москва: Легкая и пищевая промышленность, 1983. – 104 с.
5. Прибега Д.В. Удосконалення технології розкроювання та перфорування деталей верху взуття: дис. … кандидата технічних наук: 05.19.06 / Прибега Дмитро Володимирович. – Хмельницький, 2006. – 178 с.
6. Абрамов В.Ф., Костылева В.В., Литвин Е.В., Соколов В.Н.,Соколов И.В. и др. Технологические процессы производства изделий легкой промышленности. Часть 1. / Под общей ред. проф., д.т.н. Фукина В.А./: – М.: Московский государственный университет дизайна и технологии, 2003. – 572 с.
7. Базюк Г.П. Резание и режущий инструмент в швейном производстве / Базюк Г.П. – Москва: Легкая индустрия, 1980. – 192 с.
8. Поліщук О.С. Підвищення ефективності застосування пресового обладнання в легкій промисловості: дис. … кандидата технічних наук: 05.05.10/ Поліщук Олег Степанович. – Київ, 2001. – 145 с.
9. Кармаліта А.К. Дослідження процесу перфорування деталей взуття / А.К. Кармаліта, Є.Р.Пильник, Д.В.Прибега // Вісник ХНУ. – 2010. - №3. – С.95-98.

Надійшла 26.9.2011 р.

УДК 519.832.4

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

КОНТИНУУМ ОПТИМАЛЬНИХ СТРАТЕГІЙ ПРОЕКТУВАЛЬНИКА У МОДЕЛІ УСУНЕННЯ ЧОТИРЬОХЕЛЕМЕНТНИХ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ З ЧАСТКОВОЮ НЕДООЦІНКОЮ ЇХ ВЕРХНІХ МЕЖ ЯК АНТАГОНІСТИЧНІЙ ГРІ НА ШЕСТИВИМІРНОМУ ГІПЕРПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ ДЛЯ ОПТИМІЗАЦІЇ КОНСТРУЮВАННЯ ЧОТИРЬОХОПОРНОЇ ПЛАТФОРМИ

Розглядається проблема усунення невизначеностей при частковій недооцінці їх верхніх меж. Доводяться твердження про континууми оптимальних стратегій проектувальника в антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи.

There is investigated a problem of removing uncertainties by partial underestimation of their upper boundaries. There are proved claims on continuums of the projector optimal strategies in the antagonistic game on six-dimensional hyperparallelepiped for optimizing the four-propped platform construction.

Ключові слова: опорна платформа, площа поперечного перетину, часткова невизначеність, опукла антагоністична гра, шестивимірний гіперпаралелепіпед, оптимальна стратегія проектувальника, часткова недооцінка.

Вступ та узагальнений опис проблематики

Вертикальні опорні або горизонтальні з’єднувальні платформи є одним з найважливіших вузлів монтажних конструкцій. Найбільш часто використовують чотири опори, адже виготовляти опору суцільною і збитково, і невигідно з точки зору збільшення масогабаритів, що особливо небажано для багатоповерхових вертикальних опорних конструкцій. Розрахунок площі поперечного перетину (ППП) опор ведеться, очевидно, з урахуванням передбачуваного навантаження на платформу. Але бувають такі експлуатаційні умови, що навантаження на кожну з чотирьох опор є різним, а його оцінки можливо дати тільки як інтервали або відрізки. Тоді величини тиску та ППП нормуються так, що сумарне навантаження на платформу і сумарні ППП дорівнюють одиницям: тиск на i -ту опору

$$x_i \in [a_i;\, b_i] \subset (0;\, 1) \subset [0;\, 1] \tag{1}$$

та її ППП

$$y_i \in [a_i;\, b_i] \subset (0;\, 1) \subset [0;\, 1] \tag{2}$$

при $\mu_{\ell}([a_i;\, b_i]) > 0 \;\; \forall\, i = \overline{1,\, 4}$ та

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 1, \ \sum_{i=1}^{4} y_i = 1. \tag{3}$$

Якщо $r_i(x_i, y_i)$ є рівнем або показником потенційного перевантаження на i-ту опору при експлуатації платформи, то моделлю усунення $\{[a_i; b_i]\}_{i=1}^{4}$-невизначеностей є використання проектувальником оптимальної стратегії (ОС) другого гравця в антагоністичній грі (АГ) з ядром

$$\max\left(\{r_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}\right) = T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) \tag{4}$$

на декартовому добутку

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} \times \boldsymbol{\mathcal{Y}} = \prod_{p=1}^{2} [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{p=1}^{2} \left(\prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \right) \subset \prod_{l=1}^{6} (0; 1) \subset \prod_{l=1}^{6} [0; 1] \subset \mathbb{R}^6 \tag{5}$$

паралелепіпеда

$$\boldsymbol{\mathcal{X}} = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0; 1) \subset \prod_{d=1}^{3} [0; 1] \subset \mathbb{R}^3 \tag{6}$$

чистих стратегій

$$\mathbf{X} = [x_1 \ \ x_2 \ \ x_3] \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{X}} \tag{7}$$

першого гравця і паралелепіпеда

$$\boldsymbol{\mathcal{Y}} = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \prod_{d=1}^{3} [a_d; b_d] \subset \prod_{d=1}^{3} (0; 1) \subset \prod_{d=1}^{3} [0; 1] \subset \mathbb{R}^3 \tag{8}$$

чистих стратегій

$$\mathbf{Y} = [y_1 \ \ y_2 \ \ y_3] \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}} \tag{9}$$

другого гравця, де змінні x_4 й y_4 завдяки (3) виключаються. Визначення ОС проектувальника, якщо така існуватиме в АГ з ядром (4) на гіперпаралелепіпеді (5), і становить описувану проблему, хоча питання практичної реалізації змішаної ОС у такій ситуації потребуватиме глибшого дослідження.

Огляд першоджерел та виділення невирішеного питання

В [1] зазначається про модель відносного (нормованого) перевантаження i-ї опори як $r_i(x_i, y_i) = x_i y_i^{-2}$, звідки ядро (4) розглядуваної АГ на гіперпаралелепіпеді (5) набуває виду

$$T(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = T(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \max\left(\{r_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}\right) = \max\left\{ x_1 y_1^{-2}, \ x_2 y_2^{-2}, \ x_3 y_3^{-2}, \ \frac{1 - x_1 - x_2 - x_3}{(1 - y_1 - y_2 - y_3)^2} \right\}. \tag{10}$$

Зазначається, що оскільки функції $\{r_i(x_i, y_i)\}_{i=1}^{4}$ є строго опуклими функціями змінних $\{y_i\}_{i=1}^{4}$, то АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) є опуклою, й у ній проектувальник має чисту ОС

$$\mathbf{Y}_* = [y_1^* \ \ y_2^* \ \ y_3^*] \in [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3] = \boldsymbol{\mathcal{Y}}, \tag{11}$$

завдяки якій можливо розподілити ППП опор раціональним чином як компоненти ОС (11), причому $y_4^* = 1 - \sum_{d=1}^{3} y_d^*$. Такий результат мінімізації максимальних перевантажень є відображенням відомого принципу рівноміцності [1, с. 258]. Тоді, коли АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) виявляється умовно строго (або псевдострого) опуклою (тобто її ядро як функція від чистих стратегій другого гравця має єдину точку мінімуму), проектувальник має єдину чисту ОС (11), і питання розподілення ППП опор стає вирішеним. Утім, за деяких умов ядро (10) на гіперпаралелепіпеді (5) може не бути навіть й умовно строго опуклою функцією чистих стратегій (9), чому зазвичай передує некоректне [2, 3] сегментне оцінювання $\{[a_i; b_i]\}_{i=1}^{4}$-невизначеностей. А питання визначення ОС (11) у таких випадках є досі невисвітленим.

Мета статті та завдання для її досягнення

Однією з умов, що викликають зміну звичного мінімаксного порядку розв’язування АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5), є недооцінка одного або двох з правих кінців $\{[a_d; b_d]\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей (часткова недооцінка), котрі попередньо задаються. Тому мета статті полягає у знаходженні ОС (11) саме для такої ситуації. Для досягнення поставленої мети слід показати, коли розглядувана АГ перестає бути умовно строго опуклою і, відштовхуючись від цього, визначити оптимальну поведінку проектувальника у випадку вказаної часткової недооцінки верхніх меж невизначеностей.

Умови, за яких в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) проектувальник має континуум ОС

Теорема 1. Якщо в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) $\exists\, k \in \{\overline{1, 3}\}$ таке, що

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}>b_k\,, \tag{12}$$

причому серед значень $\{b_d\}_{d=1}^{3}$ є хоча б два неоднакових, то за умов

$$\frac{\sqrt{b_r}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}\geqslant a_r \quad \forall\, r\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\setminus\{k\} \tag{13}$$

у цій грі проектувальник має континуум ОС (11).

Доведення. Умовою опуклості АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) є

$$\frac{\partial^2}{\partial y_d^2}T(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\geqslant 0 \quad \forall\,\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}} \text{ та } \forall\,\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ при } d=\overline{1,\,3}. \tag{14}$$

Зауважимо, що функція (10) не є диференційовною у точках паралелепіпеда (8), спільних для гіперболічних поверхонь (ГБП) під знаком максимуму у (10). Але множина таких точок складається з не більше, ніж з шести ліній, а отже, вона є нуль-вимірною на $\mathbb{R}^3$. Тому майже скрізь на (8) перші частинні похідні

$$\frac{\partial}{\partial y_d}T(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\in\left\{-2x_d y_d^{-3},\,0,\,\frac{2(1-x_1-x_2-x_3)}{(1-y_1-y_2-y_3)^3}\right\} \quad \forall\,\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}} \text{ та } \forall\,\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ при } d=\overline{1,\,3} \tag{15}$$

за припущення існування аргументу y_d у функції $T(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})$. І тоді другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2}{\partial y_d^2}T(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})\in\left\{6x_d y_d^{-4},\,0,\,\frac{6(1-x_1-x_2-x_3)}{(1-y_1-y_2-y_3)^4}\right\} \quad \forall\,\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}} \text{ та } \forall\,\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}} \text{ при } d=\overline{1,\,3} \tag{16}$$

майже скрізь на (8). На нуль-вимірній множині, де функція (10) не є диференційовною, її перші частинні похідні (15) як функції від аргументів $\{y_d\}_{d=1}^{3}$ стрибкоподібно збільшують свої значення так, що ліві похідні завжди менші за праві. Тому там значення других похідних є нескінченно великими, що не суперечить умові опуклості (14). Якщо АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) є опуклою, то

$$\min_{\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}}\max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}}T(\mathbf{X},\,\mathbf{Y})=\min_{\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}}\max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left(\max\left\{x_1y_1^{-2},\,x_2y_2^{-2},\,x_3y_3^{-2},\,\frac{1-x_1-x_2-x_3}{(1-y_1-y_2-y_3)^2}\right\}\right)=$$

$$=\min_{\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}}\left(\max\left\{\max_{x_1\in[a_1;\,b_1]}\left\{x_1y_1^{-2}\right\},\,\max_{x_2\in[a_2;\,b_2]}\left\{x_2y_2^{-2}\right\},\,\max_{x_3\in[a_3;\,b_3]}\left\{x_3y_3^{-2}\right\},\,\max_{\mathbf{X}\in\boldsymbol{\mathcal{X}}}\left\{\frac{1-x_1-x_2-x_3}{(1-y_1-y_2-y_3)^2}\right\}\right\}\right)=$$

$$=\min_{\mathbf{Y}\in\boldsymbol{\mathcal{Y}}}\left(\max\left\{b_1y_1^{-2},\,b_2y_2^{-2},\,b_3y_3^{-2},\,\frac{1-a_1-a_2-a_3}{(1-y_1-y_2-y_3)^2}\right\}\right), \tag{17}$$

де припускається, що оптимальне значення гри

$$v_{\mathrm{opt}}=b_1\left(y_1^*\right)^{-2}=b_2\left(y_2^*\right)^{-2}=b_3\left(y_3^*\right)^{-2}=\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-y_1^*-y_2^*-y_3^*\right)^2}\,, \tag{18}$$

звідки

$$1-y_1^*-y_2^*-y_3^*=\sqrt{(1-a_1-a_2-a_3)v_{\mathrm{opt}}^{-1}}\,,\ y_d^*=\sqrt{b_dv_{\mathrm{opt}}^{-1}} \quad \forall\, d=\overline{1,\,3}\,,$$

$$1=\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_dv_{\mathrm{opt}}^{-1}}+\sqrt{(1-a_1-a_2-a_3)v_{\mathrm{opt}}^{-1}}=\sqrt{v_{\mathrm{opt}}^{-1}}\left(\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right),$$

$$v_{\mathrm{opt}}=\left(\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}\right)^2, \tag{19}$$

$$y_k^*=\sqrt{\frac{b_k}{v_{\mathrm{opt}}}}=\frac{\sqrt{b_k}}{\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}+\sqrt{1-a_1-a_2-a_3}}=\frac{\sqrt{b_k}}{\sum_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum_{d=1}^{3}a_d}}\,,\ k=\overline{1,\,3}\,. \tag{20}$$

Звісно, тільки за умов

$$\frac{\sqrt{b_k}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} \in [a_k;\, b_k] \quad \forall\, k=\overline{1,\,3} \tag{21}$$

значення (20) є компонентами єдиної ОС (11), а припущення (18) справджується. Та якщо $\exists\, k\in\{\overline{1,\,3}\}$ таке, що виконано (12), рівність (18) виконуватиметься за межами паралелепіпеда (8). Тоді, за умови коректних оцінок лівих кінців $\{[a_d;\, b_d]\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей як (13), які б компоненти y_k^* ми не брали у межах паралелепіпеда (8), буде

$$b_k\left(y_k^*\right)^{-2} \geqslant b_r\left(y_r^*\right)^{-2} \quad \forall\, r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}\,,\quad b_k\left(y_k^*\right)^{-2} \geqslant \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-y_1^*-y_2^*-y_3^*\right)^2} \tag{22}$$

для всіх $\mathbf{Y}\in\mathbf{\Upsilon}$, за яких $v_{\text{opt}}=\max\limits_{k\in\{\overline{1,\,3}\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}$, адже знаменник у дробі $b_k\left(y_k^*\right)^{-2}$ знижуватиметься, а взяття компонент $\{y_r^*\}_{r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}}$ такими, що $b_r\left(y_r^*\right)^{-2}$ або $\dfrac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-y_1^*-y_2^*-y_3^*\right)^2}$ перевищить $b_k\left(y_k^*\right)^{-2}$, суперечитиме принципу оптимальної поведінки другого гравця (ПОПДГ), де треба мінімізувати значення гри. Згідно з ПОПДГ для

$$k_{\max}\in \arg\max_{k\in\{\overline{1,\,3}\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\} \tag{23}$$

необхідно брати $y_{k_{\max}}^*=b_{k_{\max}}$. І тут зрозуміло, що при

$$y_r^*=\frac{\sqrt{b_r}}{\sum\limits_{d=1}^{3}\sqrt{b_d}+\sqrt{1-\sum\limits_{d=1}^{3}a_d}} \quad \forall\, r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\} \tag{24}$$

буде

$$v_{\text{opt}}=b_{k_{\max}}\left(y_{k_{\max}}^*\right)^{-2}=\frac{1}{b_{k_{\max}}}>b_{k_{\text{nonmax}}}\left(y_{k_{\text{nonmax}}}^*\right)^{-2}>b_r\left(y_r^*\right)^{-2}>\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{\overline{1,\,3}\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}}b_n-\sum\limits_{m\notin\arg\max\limits_{k\in\{\overline{1,\,3}\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}}b_m-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2}$$

$$\forall\, r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\} \quad \text{та} \quad \forall\, k_{\text{nonmax}}\notin\arg\max_{k\in\{\overline{1,\,3}\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}. \tag{25}$$

Якщо існує тільки одне $k\in\{\overline{1,\,3}\}$ таке, що виконується (12), то (25) набуде наступної форми:

$$v_{\text{opt}}=b_k\left(y_k^*\right)^{-2}=\frac{1}{b_k}>b_r\left(y_r^*\right)^{-2}>\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-b_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2} \quad \forall\, r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}\,. \tag{26}$$

Звідси в (11) будуть компоненти $y_k^*=b_k$ й, окрім (24), також такі $\{y_r^*\}_{r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}}$, котрі задовольнятимуть нерівностям

$$v_{\text{opt}}=\frac{1}{b_k}\geqslant b_r\left(y_r^*\right)^{-2} \quad \forall\, r\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\} \tag{27}$$

та

$$v_{\text{opt}}=\frac{1}{b_k}\geqslant\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-b_k-\sum\limits_{t\in\{\overline{1,\,3}\}\setminus\{k\}}y_t^*\right)^2}. \tag{28}$$

Тому у цьому випадку, очевидно, проектувальник має континуум ОС (11). Якщо існує два $k\in\{\overline{1,\,3}\}$ таких, що виконується (12), то (25) перепишеться у формі

$$v_{\text{opt}} = b_{k_{\max}} \left(y^*_{k_{\max}} \right)^{-2} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} > b_{k_{\text{nonmax}}} \left(y^*_{k_{\text{nonmax}}} \right)^{-2} > b_r \left(y^*_r \right)^{-2} > \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{\left(1 - \sum\limits_{n \in \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_n - \sum\limits_{m \notin \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_m - y^*_r \right)^2}$$

$$\forall\ r \in \left\{\overline{1,\,3}\right\} \setminus \{k\} \quad \text{та} \quad \forall\ k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}, \tag{29}$$

звідки випливає, що в (11) будуть компоненти $y^*_{k_{\max}} = b_{k_{\max}}$ та, окрім (24) й $y^*_{k_{\text{nonmax}}} = b_{k_{\text{nonmax}}}$, також такі y^*_r й $y^*_{k_{\text{nonmax}}}$, котрі задовольнятимуть нерівностям

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant b_{k_{\text{nonmax}}} \left(y^*_{k_{\text{nonmax}}} \right)^{-2} \quad \forall\ k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}, \tag{30}$$

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant b_r \left(y^*_r \right)^{-2} \quad \forall\ r \in \left\{\overline{1,\,3}\right\} \setminus \{k\} \tag{31}$$

та

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{\left(1 - \sum\limits_{n \in \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_n - \sum\limits_{m \notin \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} y^*_m - y^*_r \right)^2}. \tag{32}$$

Тому і тут очевидно, що проектувальник має континуум ОС (11). Якщо ж (12) виконується $\forall\ k = \overline{1,\,3}$, то (25) предстане у формі

$$v_{\text{opt}} = b_{k_{\max}} \left(y^*_{k_{\max}} \right)^{-2} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} > b_{k_{\text{nonmax}}} \left(y^*_{k_{\text{nonmax}}} \right)^{-2} > \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{\left(1 - \sum\limits_{n \in \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_n - \sum\limits_{m \notin \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_m \right)^2}$$

$$\forall\ k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}, \tag{33}$$

де множина $\arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}$ згідно з умовами твердження теореми є непорожньою, звідки випливає, що в (11) будуть компоненти $y^*_{k_{\max}} = b_{k_{\max}}$ та, окрім $y^*_{k_{\text{nonmax}}} = b_{k_{\text{nonmax}}}$, також такі $y^*_{k_{\text{nonmax}}}$, котрі задовольнятимуть нерівностям

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant b_{k_{\text{nonmax}}} \left(y^*_{k_{\text{nonmax}}} \right)^{-2} \quad \forall\ k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\} \tag{34}$$

та

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{\left(1 - \sum\limits_{n \in \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} b_n - \sum\limits_{m \notin \arg\max\limits_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}} y^*_m \right)^2} \quad \forall\ k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}} \left\{ b_k \left(y^*_k \right)^{-2} \right\}. \tag{35}$$

Очевидно, що й у такому випадку проектувальник має континуум ОС (11). Теорему доведено.

Надалі випадок, коли (12) виконано $\forall\ k = \overline{1,\,3}$ одночасно, не розглядатимемо, оскільки він відповідає повній недооцінці $\left\{ \left[a_d ;\, b_d \right] \right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей. Для випадків же з частковою недооцінкою, коли існує одне або два $k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ таких, що виконано (12), знайдемо усі ОС (11).

Континуум ОС (11) в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5)
за умови існування єдиного $k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ у (12)

Теорема 2. Якщо в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) існує єдине $k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ таке, що виконано (12), причому ліві кінці $\left\{ \left[a_d ;\, b_d \right] \right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей оцінені коректно як (13), то проектувальник має континуум ОС (11) з компонентами $y_k^* = b_k$ та

$$y_r^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_k b_r} + a_r + \left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \operatorname{sign}\left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \right);\ b_r \right] \tag{36}$$

за умови

$$1 - b_k - \sqrt{b_k \left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d \right)} \geqslant \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} b_t \tag{37}$$

й

$$y_r^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_k b_r} + a_r + \left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \operatorname{sign}\left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \right);\ y_r^{\langle \max \rangle} \right] \tag{38}$$

за умови

$$1 - b_k - \sqrt{b_k \left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d \right)} < \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} b_t \tag{39}$$

при

$$\sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^{\langle \max \rangle} = 1 - b_k - \sqrt{b_k \left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d \right)},\quad y_r^{\langle \max \rangle} \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_k b_r} + a_r + \left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \operatorname{sign}\left(\sqrt{b_k b_r} - a_r \right) \right);\ b_r \right], \tag{40}$$

де $r \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}$.

Доведення. Маємо співвідношення (26) для (24), де, згідно з Теоремою 1, $y_k^* = b_k$. З нерівності (27) відразу маємо

$$y_r^* \geqslant \sqrt{b_r b_k} \quad \forall\ r \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}. \tag{41}$$

Тепер розв'яжемо нерівність (28) відносно суми $\sum\limits_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^*$. Маємо:

$$(1 - b_k)^2 - 2(1 - b_k) \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* + \left(\sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* \right)^2 \geqslant b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3), \tag{42}$$

$$\left(\sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* \right)^2 - 2(1 - b_k) \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* + (1 - b_k)^2 - b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3) \geqslant 0, \tag{43}$$

де дискримінантом відповідного квадратного рівняння

$$\left(\sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* \right)^2 - 2(1 - b_k) \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* + (1 - b_k)^2 - b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3) = 0 \tag{44}$$

є

$$D = 4(1 - b_k)^2 - 4\left[(1 - b_k)^2 - b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3) \right] = 4 b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3). \tag{45}$$

Звідси коренями рівняння (44) відносно невідомої суми $\sum\limits_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^*$ є

$$\frac{2(1 - b_k) - \sqrt{D}}{2} = \frac{2(1 - b_k) - 2\sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)}}{2} = 1 - b_k - \sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)} \tag{46}$$

або

$$\frac{2(1 - b_k) + \sqrt{D}}{2} = \frac{2(1 - b_k) + 2\sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)}}{2} = 1 - b_k + \sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)}. \tag{47}$$

Значить, нерівність (28) або, що те саме, (42) чи (43) виконана при (37) або при

$$\sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* \geqslant 1 - b_k - \sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)}. \tag{48}$$

Але, беручи корінь (47), отримуватимемо

$$1 - b_k - \sum_{t \in \{\overline{1,3}\} \setminus \{k\}} y_t^* = 1 - b_k - \left(1 - b_k + \sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)} \right) = -\sqrt{b_k (1 - a_1 - a_2 - a_3)} < 0, \tag{49}$$

тому корінь (47) не може бути сумою $\sum\limits_{t\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\{k\}} y_t^*$ і надалі не братиметься до уваги, а нерівність (48) ніколи не виконується. Отже, за умови (37) можна брати довільні компоненти $\left\{y_r^*\right\}_{r\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\{k\}}$ такі, щоб виконувалось (41), тобто буде (36). Якщо ж виконається (39), то максимальна сума компонент $\left\{y_r^*\right\}_{r\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\{k\}}$ має дорівнювати лівій частині в (37), задовольняючи при цьому умові (41). А це дає (38) і (40), де $r\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\{k\}$. Теорему доведено.

Слід зауважити, що доведена щойно теорема за своєю структурою може бути використана для визначення континууму ОС (11) за умови існування двох $k\in\left\{\overline{1,3}\right\}$ таких, що виконуватиметься (12).

Континуум ОС (11) в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) за умов існування двох $k\in\left\{\overline{1,3}\right\}$ у (12)

Теорема 3. Якщо в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) існують два $k\in\left\{\overline{1,3}\right\}$ такі, що виконано (12), причому ліві кінці $\left\{\left[a_d\,;\,b_d\right]\right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей оцінені коректно як (13), то проектувальник має континуум ОС (11) з компонентами $y_{k_{\max}}^* = b_{k_{\max}}$ для (23),

$$y_{k_{\text{nonmax}}}^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_{k_{\text{nonmax}}}} + a_{k_{\text{nonmax}}} + \left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_{k_{\text{nonmax}}}} - a_{k_{\text{nonmax}}}\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_{k_{\text{nonmax}}}} - a_{k_{\text{nonmax}}}\right)\right);\ b_{k_{\text{nonmax}}}\right] \tag{50}$$

для

$$k_{\text{nonmax}} \notin \arg\max_{k\in\left\{\overline{1,3}\right\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\} \tag{51}$$

та

$$y_r^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_r} + a_r + \left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_r} - a_r\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_r} - a_r\right)\right);\ b_r\right] \tag{52}$$

за умови

$$1 - b_{k_{\max}} - \sqrt{b_{k_{\max}}\left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d\right)} \geqslant b_{k_{\text{nonmax}}} + b_r \tag{53}$$

й

$$y_t^* \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} + a_t + \left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} - a_t\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} - a_t\right)\right);\ y_t^{\langle\max\rangle}\right] \tag{54}$$

за умови

$$1 - b_{k_{\max}} - \sqrt{b_{k_{\max}}\left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d\right)} < b_{k_{\text{nonmax}}} + b_r \tag{55}$$

при

$$y_r^{\langle\max\rangle} + y_{k_{\text{nonmax}}}^{\langle\max\rangle} = 1 - b_{k_{\max}} - \sqrt{b_{k_{\max}}\left(1 - \sum_{d=1}^{3} a_d\right)},$$

$$y_t^{\langle\max\rangle} \in \left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} + a_t + \left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} - a_t\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_{k_{\max}} b_t} - a_t\right)\right);\ b_t\right], \tag{56}$$

де $t\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\left\{k_{\max}\right\}$.

Доведення. Маємо співвідношення (29) для (24), де, згідно з Теоремою 1, $y_{k_{\max}}^* = b_{k_{\max}}$. З нерівностей (30) і (31) відразу маємо

$$y_{k_{\text{nonmax}}}^* \geqslant \sqrt{b_{k_{\text{nonmax}}} b_{k_{\max}}} \tag{57}$$

для (51) й

$$y_r^* \geqslant \sqrt{b_r b_{k_{\max}}} \quad \forall\ r\in\left\{\overline{1,3}\right\}\setminus\{k\} \tag{58}$$

відповідно. Нерівність (32) перепишемо у виді

$$v_{\text{opt}} = \frac{1}{b_{k_{\max}}} \geqslant \frac{1 - a_1 - a_2 - a_3}{\left(1 - b_{k_{\max}} - y_{k_{\text{nonmax}}}^* - y_r^*\right)^2} \tag{59}$$

і розв’яжемо її відносно суми $y_{k_{\text{nonmax}}}^* + y_r^*$. Маємо аналогічну нерівності (43) нерівність

$$\left(y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\right)^2-2\left(1-b_{k_{\max}}\right)\left(y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\right)+\left(1-b_{k_{\max}}\right)^2-b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\geqslant 0, \tag{60}$$

де дискримінантом відповідного квадратного рівняння

$$\left(y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\right)^2-2\left(1-b_{k_{\max}}\right)\left(y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\right)+\left(1-b_{k_{\max}}\right)^2-b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)=0 \tag{61}$$

є

$$D=4\left(1-b_{k_{\max}}\right)^2-4\left[\left(1-b_{k_{\max}}\right)^2-b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\right]=4b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right), \tag{62}$$

звідки коренями рівняння (61) відносно невідомої суми $y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r$ є

$$\frac{2\left(1-b_{k_{\max}}\right)-\sqrt{D}}{2}=\frac{2\left(1-b_{k_{\max}}\right)-2\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2}=1-b_{k_{\max}}-\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)} \tag{63}$$

або

$$\frac{2\left(1-b_{k_{\max}}\right)+\sqrt{D}}{2}=\frac{2\left(1-b_{k_{\max}}\right)+2\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2}=1-b_{k_{\max}}+\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\,. \tag{64}$$

Значить, нерівність (59) або, що те саме, нерівність (60) виконана при (53) або при

$$y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\geqslant 1-b_{k_{\max}}+\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\,. \tag{65}$$

Але, беручи корінь (64), отримуватимемо

$$1-b_{k_{\max}}-\left(y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r\right)=1-b_{k_{\max}}-\left(1-b_{k_{\max}}+\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\right)=-\sqrt{b_{k_{\max}}\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}<0\,, \tag{66}$$

тому корінь (64) не може бути сумою $y^*_{k_{\text{nonmax}}}+y^*_r$ і надалі не братиметься до уваги, а нерівність (65) ніколи не виконується. Отже, за умови (53) можна брати довільні компоненти $\left\{y^*_t\right\}_{t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\setminus\left\{k_{\max}\right\}}$ такі, щоб виконувалось (57) і (58), тобто буде (50) для (51) і (52). Якщо ж виконається (55), то максимальна сума компонент $y^*_{k_{\text{nonmax}}}$ й y^*_r має дорівнювати лівій частині в (53), задовольняючи при цьому умовам (57) і (58). А це дає (54) і (56), де $t\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\setminus\left\{k_{\max}\right\}$. Теорему доведено.

Теорема 4. Якщо в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) існують два $k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}$ такі, що виконано (12), причому множина аргументів в (51) серед цих двох $k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}$ є порожньою, а ліві кінці $\left\{\left[a_d\,;\,b_d\right]\right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей оцінені коректно як (13), то проектувальник має континуум ОС (11) з компонентами $y^*_k=b_k$ та компонентою (36) за умови

$$1-\sum_{n\in\arg\max\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}}\left\{b_k\left(y^*_k\right)^{-2}\right\}}b_n-\sqrt{b_k\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}\geqslant b_r \tag{67}$$

й

$$y^*_r\in\left[\frac{1}{2}\left(\sqrt{b_kb_r}+a_r+\left(\sqrt{b_kb_r}-a_r\right)\operatorname{sign}\left(\sqrt{b_kb_r}-a_r\right)\right);\,1-\sum_{n\in\arg\max\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}}\left\{b_k\left(y^*_k\right)^{-2}\right\}}b_n-\sqrt{b_k\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}\right] \tag{68}$$

за умови

$$1-\sum_{n\in\arg\max\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}}\left\{b_k\left(y^*_k\right)^{-2}\right\}}b_n-\sqrt{b_k\left(1-\sum_{d=1}^{3}a_d\right)}<b_r\,, \tag{69}$$

де $\quad r\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\setminus\left\{k\right\}$.

Доведення. У даному випадку, де множина аргументів в (23) буде двоелементною, нерівність (29) для (24) набуде вигляду

$$v_{\text{opt}}=b_k\left(y^*_k\right)^{-2}=\frac{1}{b_k}>b_r\left(y^*_r\right)^{-2}>\frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}}\left\{b_k\left(y^*_k\right)^{-2}\right\}}b_n-y^*_r\right)^2}\quad\forall\ r\in\left\{\overline{1,\,3}\right\}\setminus\left\{k\right\}, \tag{70}$$

де, згідно з Теоремою 1, $y^*_k=b_k$. З нерівності (27) відразу маємо (41). Нерівність (32) перепишемо у виді

$$v_{kr} = \frac{1}{b_k} \geqslant \frac{1-a_1-a_2-a_3}{\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n - y_r^*\right)^2}\,. \tag{71}$$

і розв’яжемо її відносно компоненти y_r^*. Маємо нерівність

$$\left(y_r^*\right)^2 - 2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)y_r^* + \left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)^2 - b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right) \geqslant 0\,, \tag{72}$$

де дискримінантом відповідного квадратного рівняння

$$\left(y_r^*\right)^2 - 2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)y_r^* + \left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)^2 - b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right) = 0 \tag{73}$$

є

$$D = 4\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)^2 - 4\left[\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)^2 - b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\right] = 4b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)\,, \tag{74}$$

звідки коренями рівняння (73) відносно невідомої компоненти y_r^* є

$$\frac{2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)-\sqrt{D}}{2} = \frac{2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)-2\sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2} =$$
$$= 1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n - \sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)} \tag{75}$$

або

$$\frac{2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)+\sqrt{D}}{2} = \frac{2\left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n\right)+2\sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}}{2} =$$
$$= 1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n + \sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\,. \tag{76}$$

Значить, нерівність (71) або, що те саме, нерівність (72) виконана при (67) або при

$$y_r^* \geqslant 1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n + \sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\,. \tag{77}$$

Але, беручи корінь (76), отримуватимемо

$$1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n - y_r^* = 1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n - \left(1-\sum\limits_{n\in\arg\max\limits_{k\in\{1,\,3\}}\left\{b_k\left(y_k^*\right)^{-2}\right\}} b_n + \sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)}\right) =$$
$$= -\sqrt{b_k\left(1-a_1-a_2-a_3\right)} < 0\,, \tag{78}$$

тому корінь (76) не може бути компонентою y_r^* і надалі не братиметься до уваги, а нерівність (77) ніколи не виконується. Отже, за умови (67) можна брати довільну компоненту y_r^* таку, щоб виконувалось (41), тобто буде (36). Якщо ж виконається (69), то це дасть (68), де $r \in \left\{\overline{1,\,3}\right\} \setminus \{k\}$. Теорему доведено.

Висновок і перспективи подальшого дослідження

Звичайно, доведені твердження чотирьох теорем можна об’єднувати в одну загальну теорему з твердженнями й умовами про континуум ОС проектувальника. Можна дати й означення тим ОС (11), компоненти яких задовольняють умовам доведених теорем, для подальшого оперування ними: якщо в АГ з ядром (10) на гіперпаралелепіпеді (5) $\exists\, k \in \left\{\overline{1,\,3}\right\}$ таке, що виконано (12), причому серед значень $\left\{b_d\right\}_{d=1}^{3}$ є хоча б два неоднакових, а ліві кінці $\left\{\left[a_d\,;\,b_d\right]\right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей оцінені коректно як (13), то кожну ОС (11) називатимемо нерегулярною праворуч, де кожну її k-ту компоненту назвемо простою нерегулярною компонентою (ПНК) за умови $v_{\mathrm{opt}} = \dfrac{1}{b_k}$, а кожну r-ту компоненту при $r \in \left\{\overline{1,\,3}\right\} \backslash \left\{k\right\}$ назвемо вільною або зміщуваною нерегулярною компонентою (ВНК або ЗНК). Перспективи подальшого дослідження вбачаються у розгляді питань щодо випадків, коли не всі ліві кінці $\left\{\left[a_d\,;\,b_d\right]\right\}_{d=1}^{3}$-невизначеностей оцінені коректно, де, можна припустити, не завжди буде континуум ОС (11). Крім того, питання єдиноможливого вибору проектувальником оптимальної поведінки [4] серед континууму його ОС (11) також залишається відкритим.

Література

1. Романюк В. В. Теорія антагоністичних ігор : [навчальний посібник] / Романюк В. В. – Львів : “Новий Світ – 2000”, 2010. – 294 с.

2. Романюк В. В. Про особливі компоненти оптимальної стратегії проектувальника у моделі дії нормованого одиничного навантаження на триколонну будівельну конструкцію / В. В. Романюк // Проблеми трибології. – 2011. – № 1. – С. 44 – 46.

3. Романюк В. В. Нерегулярна ліворуч оптимальна стратегія проектувальника першого степеня у моделі усунення чотирьохелементних невизначеностей як антагоністичній грі на шестивимірному гіперпаралелепіпеді для оптимізації конструювання чотирьохопорної платформи / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 4. – С. 74 – 82.

4. Романюк В. В. Питання виокремлення підмножини раціональних чистих стратегій гравців у деяких антагоністичних іграх / В. В. Романюк // Інформаційні технології та комп’ютерна інженерія. – 2009. – № 3 (17). – С. 47 – 52.

Надійшла 22.9.2011 р.