матсподівання і дисперсія рівна: $M_{w1} = 0{,}156591$, $D_{w1} = 0{,}001375$, $M_{w2} = 0{,}03272$, $D_{w2} = 0{,}000147$, $M_{w3} = 0{,}363145$, $D_{w3} = 0{,}005969$, $M_{w4} = 0{,}2631$, $D_{w4} = 0{,}000495$, $M_{w5} = 0{,}1084$, $D_{w5} = 0{,}00126$, $M_{w6} = 0{,}0748$, $D_{w6} = 0{,}00434$. $D_{wi} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(M_i - w_i)^2}{m}$

Середньоквадратичне відхилення $s_{wi} = \sqrt{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(w_i - M)^2}$ рівне $s_{w1} = 0{,}0370$, $s_{w2} = 0{,}0212$, $s_{w3} = 0{,}0331$, $s_{w4} = 0{,}0154$, $s_{w5} = 0{,}0292$, $s_{w6} = 0{,}0177$.

2. За умов розв'язуваної задачі встановлено домінування окремого параметра (w_3) об'єкту над іншими, що дає можливість уточнити умову задачі та підвищити ефективність застосування розглянутих методів.

3. Формулювання задачі і проведення окремих досліджень з розробленням (застосування відомих) способів усереднення значень кожного коефіцієнта є недоцільним, оскільки метод Сааті теоретично і за результатами розрахунку виконує ці функції.

Отже, найефективнішим із розглянутих методів для розв'язання поставленої задачі є метод Сааті, який не потребує тривалого часу спілкування з експертами та має високий ступінь узгодженості оцінок для різних експертів. Також згідно з наданим графіком (рис. 1), даний метод "усереднює" значення вагових коефіцієнтів, які знайдені іншими методами.

Література

1. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях / Саати Т.Л. ; [науч. ред. А.В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова]. – М. : Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.

2. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев / Ногин В.Д. – СПб, ПМ-ПУ, СпбГУ, 2004. – С. 1.

3. Черноруцкий И.Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И.Г. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 416 с.

4. Літвінов В.В. Використання методів попарного порівняння для визначення пріоритетності способів забезпечення статичної стійкості асинхронних двигунів в умовах багатокритеріального вибору / В.В. Літвінов, М.В. Костерєв, П.Л. Денисюк // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2010. – № 2 (143). – С. 24–29.

Надійшла 16.9.2011 р.

УДК 681.5.01

О.І. ЛИТВИНЕНКО, А.І. СБІТНЄВ
Військовий інститут Київського національного університету імені Тараса Шевченка

АНАЛІТИЧНЕ ПОДАННЯ ГРАФІВ ДЛЯ ПРОВЕДЕННЯ РОЗРАХУНКІВ НА ЕЛЕКТРОННО-ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ МАШИНАХ

Значна кількість військово-технічних задач розв'язується методами теорії графів. В статті досліджується питання подання графів в аналітичному вигляді. Це надасть можливість використовувати рішення, що отримані завдяки застосуванню теорії графів, в техніці сучасного управління, що базується на електронно-обчислювальних машинах.

Lot of military-technical tasks decides the methods of theory of the graphs. In the article the question of presentation of graphs in analytical kind is probed. It will give possibility to use decisions, those are got due to application of the theory of the graphs, in the technique of modern management which is based on computers.

Keywords: graph models, top points of graphs, tuples.

Вступ. Входження України в суспільство інформаційної цивілізації пов'язане з впровадженням нових інформаційних технологій у діяльність всіх інститутів держави, зокрема, її Збройних Сил. Це стає особливо важливим у даний час в умовах різкого скорочення чисельності війська і необхідності вирішення проблеми збереження бойового потенціалу на необхідному рівні на основі комплексної автоматизації управлінської діяльності всіх ланок: від органів керівництва до мінімального рівня ієрархії – відділення.

Вирішення цього питання пов'язане з розвитком методів проектування комплексів засобів автоматизації управління, інформаційно-розрахункових систем і, насамперед, їх найважливішої складової частини – прикладного програмного забезпечення [1]. Багато військово-технічних завдань вищезгаданих напрямків вирішуються методами теорії графів.

Постановка завдання. Аналіз робіт [1, 2] показав, що безліч рішень, отриманих завдяки використанню теорії графів, не можна реалізувати на практиці через несумісність графічного подання, в якому отримується рішення, з технікою сучасного управління, в основі якої лежить використання електронно-обчислювальних машин (ЕОМ).

Тому дана робота присвячена питанню розроблення ефективного подання задач теорії графів в аналітичному вигляді, тобто такому, що є однаково легко сприйнятливим і для людини, і для комп'ютера.

Результати дослідження. Найбільш звичним є зображення графа за допомогою розташованої на площині картинки у вигляді точок і ліній, що з'єднують деякі з цих точок. Відомо, що не завжди можна зробити так, щоб лінії при цьому не перетиналися у своїх внутрішніх точках, тому, на відміну від поняття геометричної реалізації, такі картинки називаються діаграмами графа. Коли це не буде призводити до непорозумінь, під графом будемо розуміти його діаграму.

Крім геометричної реалізації, існують й інші способи подання графа.

Орієнтованим графом називається і через $L=(X,F)$ позначається пара множин, в якій $X=\{x_i\}$, $i\in I=\{1,2,..., n\}$ — множина вершин графа; $F=\{<x_i,x_j>\},<x_i,x_j>\in X^2$ — множина дуг, причому x_i — початок, а x_j — кінець дуги.

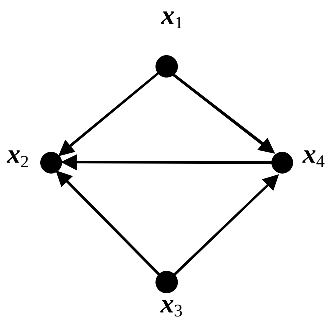
Таке подання називається теоретично-множинним. Інші способи подання (за допомогою матриці суміжності і графічний) розглянемо на прикладі.

Приклад 1. Нехай є граф $\varphi = (X_1, F_1)$, у якого:

$$X_1 =\{x_1, x_2 , x_3, x_4\};$$

$$F_1=\{<x_1,x_2>, <x_1,x_4>, <x_3,x_4>, <x_3,x_2>, <x_4,x_2>\}.$$

На рис. 1 показаний даний граф і його матриця суміжності $\boldsymbol{M}_\varphi$..



$$\boldsymbol{M}_\varphi = \begin{array}{c} \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_3 & \boldsymbol{x}_4 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Рис. 1. Ілюстрація до прикладу 1

Розглянемо основні теоретично-множинні операції над графами.

Нехай $\varphi =(X_1 , F_1)$ і $\psi =(X_2 , F_2)$ – довільні графи, які визначені на одних і тих самих множинах вершин і дуг, $X_1\subseteq X$, $X_2\subseteq X$, $F_1\subseteq F$, $F_2\subseteq F$, а $M_\varphi=\|\, a_{ij}\|$, $M_\psi =\|\, b_{ij}\, \|$ – відповідно їх матриці суміжності.

Об'єднанням графів φ і ψ називають граф $\Phi(X_\Phi, F_\Phi) = \varphi \cup\psi$, такий, що $X_\Phi = X_1 \cup X_2$, $F_\Phi = F_1 \cup F_2$.

Матриця суміжності $M_\Phi =\|\, m_{ij}\, \|$ графа Φ має вигляд $M_\Phi=M_\varphi\cup M_\psi$, причому $m_{ij} = a_{ij}\vee b_{ij}$.

Перетином графів φ і ψ називають граф $\eta(X_\eta, F_\eta) = \varphi \cap\psi$, такий, що $X_\eta = X_1 \cap X_2$; $F_\Phi = F_1 \cap F_2$.

Матриця суміжності $M\eta = \|\, m_{ij}\, \|$ графа η має вигляд $M\eta=M_\varphi\cap M_\psi$, $m_{ij} = a_{ij}\,\&\, b_{ij}$.

Доповненням графа φ називається граф $\rceil\varphi=(X_1, \rceil F_1)$, такий, що $\rceil F = X\times X - F_j$.

У матриці суміжності $M_{\rceil\varphi} = \|\, m_{ij}\, \|$ графа $\rceil\varphi$ елементи визначаються як $m_{ij}=1-a_{ij.}$

Інверсією графа φ називається граф $\varphi^{-1} = (X_1, F^{-1}{}_1)$, такий, що $F^{-1}{}_1$ є інверсією множини дуг, тобто орієнтація дуг змінюється на протилежну, зберігаючи при цьому значення ступенів належності, матриця інверсного графа дорівнює транспонованій матриці початкового графа. На рис. 2 показані графи, що одержані в результаті застосування наведених операцій до графів φ і ψ.

Завдання графів за допомогою матриць суміжності (інцидентності) і плексів (багатозв'язаних списків з використанням покажчиків) при їх поданні в пам'яті ЕОМ є суттєво надмірним, оскільки при застосуванні першого з них має місце велика розрідженість матриць, а другий спосіб вимагає використання спеціальних програмних засобів. Тому потрібні теоретичні пророблення, спрямовані на пошук методів опису графів, що вільні від перелічених недоліків.

Подання графів у вигляді околів і меж вершин. Одним з можливих підходів є завдання графів у вигляді околів і меж вершин [2]. Введемо поняття околів і меж вершин для графів вигляду $L=(X, F)$.

Визначення 1. Першим околом S_i^1 вершини $\boldsymbol{x}_i$ називається множина кінцевих вершин для дуг, інцидентних $\boldsymbol{x}_i$, і сама вершина $\boldsymbol{x}_i$.

Для такої множини істинним є вираз:

$$\forall x_j\in X\{x_j\in S_i^1\leftrightarrow\exists<x_i, x_j> [(<x_i, x_j>\in F<x_i, x_j>) \vee (x_i=x_j)]\},$$

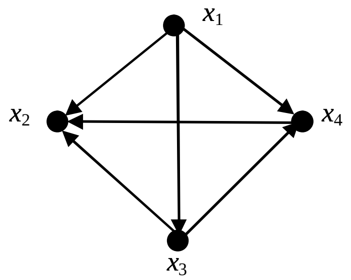
$$i\in I=\{1, 2,..., n\}, j\in J=\{1, 2,..., m\}.$$

Тоді n-й окіл вершини $\boldsymbol{x}_i$ за індукцією визначається:

$$S_i^n = \bigcup_{x_j\in \boldsymbol{S}_i^{n-1}} S_j^1. \tag{1}$$

Це означає, що n-й окіл вершини $\boldsymbol{x}_i$ може бути отриманий шляхом додавання до n–1-го околу множини сусідства, тобто кінцевих вершин дуг, інцидентних з S_i^{n-1}. При цьому

$$S_i^1 \subseteq S_i^2 \subseteq \ldots \subseteq S_i^n. \quad (2)$$

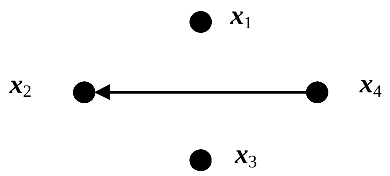


$$M_\varphi = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

а

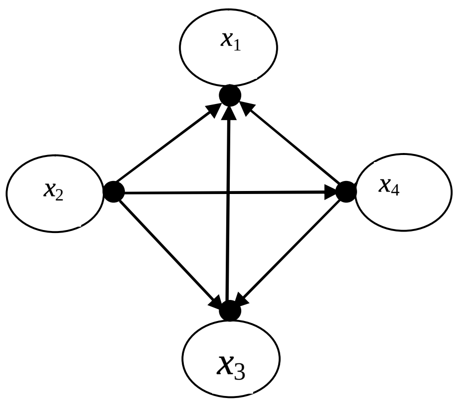
$\phi = \varphi \cup \psi$;

$M\phi = M\varphi$



$$M_\psi = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

б

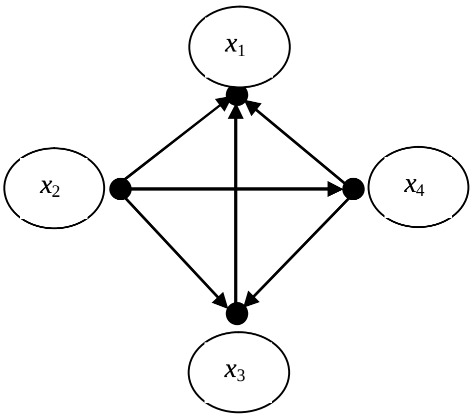


$$M_{\rceil\varphi} = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$\eta = \varphi \cap \psi$

$M_\eta = M_\psi$

в



$$M_\gamma = \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$M_g = M^{\mathbf{T}}{}_j$

г

Рис. 2. Ілюстрація до основних теоретично-множинних операцій над графами: *а* –граф j ; *б* – граф y ; *в* – граф ùj ; *г* – граф g = j^{-1}

Визначення 2. Межею *n*-го околу або *n*-ю межею *i*-ї вершини називається множина

$$B_i^n = S_i^n \setminus S_i^{n-1} = S_i^n \cap \rceil S_i^{n-1}, \quad (3)$$

де $\rceil S$ – доповнення до множини *S*.

Доведемо лему. *Лема* 1.

$B_i^k \cap B_i^l = \varnothing$, при $k \neq l$, що означає: межі різних порядків однієї і тієї самої вершини не збігаються.

Доведення.

Нехай $k < l$. Тоді у відповідності до виразів (2) і (3) маємо:

$$B_i^k = S_i^k \cap \rceil S_i^{k-1},$$
$$B_i^l = S_i^l \cap \rceil S_i^{l-1},$$
$$S_i^k \subseteq S_i^l \rightarrow S_i^k \cap S_i^l = S_i^k,$$
$$\rceil S_i^{l-1} \subseteq \rceil S_i^{k-1} \rightarrow \rceil S_i^{l-1} \cap \rceil S_i^{k-1} = \rceil S_i^{l-1}.$$

Представимо S_i^{l-1} через $S_i^{l-1} = S_i^k \cup S_i^{l-1-k}$ (множина S_i^{l-1-k} може бути і пустою).

Використовуючи дані перетворення і деякі властивості операцій над множинами, остаточно одержимо:

$$B_{xi}^{k} \cap B_{xi}^{l} = (S_{xi}^{k} \cap \rceil S_{xi}^{k-1}) \cap (S_{xi}^{l} \cap \rceil S_{xi}^{l-1}) = S_{xi}^{k} \cap \rceil S_{xi}^{l-1} = S_{xi}^{k} \cap \rceil (S_{xi}^{k} \cup$$
$$\cup S_{xi}^{l-1-k}) = S_{xi}^{k} \cap \rceil S_{xi}^{k} \cap \rceil S_{xi}^{l-1-k} = = \varnothing \cap \rceil S_{xi}^{l-1-k} = \varnothing.$$

Справедлива така теорема.

Теорема 2. Для графів

$$B_i^n = \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \setminus (B_i^{n-1} \cup B_i^{n-2}). \qquad (4)$$

Доведення.

Перетворимо праву частину виразу (4) з урахуванням основних властивостей операцій над множинами і справедливості таких співвідношень:

$$B_i^{n-1} = S_i^{n-1} \setminus S_i^{n-2} = S_i^{n-1} \cap \rceil S_i^{n-2},$$
$$B_i^{n-2} = S_i^{n-2} \setminus S_i^{n-3} = S_i^{n-2} \cap \rceil S_i^{n-3},$$
$$S_i^{n-3} \subseteq S_i^{n-2} \subseteq S_i^{n-1},$$
$$\rceil S_i^{n-1} \cap \rceil S_i^{n-2} = \rceil S_i^{n-1},$$
$$S_i^{n-2} \cap S_i^{n-3} = S_i^{n-3}.$$

З урахуванням цього маємо

$$\bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \setminus (B_i^{n-1} \cup B_i^{n-2}) = \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \cap \rceil [(S_i^{n-1} \cap \rceil S_i^{n-2}) \cup (S_i^{n-2} \cap \rceil S_i^{n-3})] =$$
$$= \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \cap [(\rceil S_i^{n-1} \cap \rceil S_i^{n-2}) \cup (\rceil S_i^{n-1} \cap S_i^{n-3}) \cup (S_i^{n-2} \cap \rceil S_i^{n-2}) \cup (S_i^{n-2} \cap S_i^{n-3})] =$$
$$= \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \cap [\rceil S_i^{n-1} \cup (\rceil S_i^{n-1} \cap S_i^{n-3}) \cup \varnothing \cup S_i^{n-3}] =$$
$$= \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \cap [(\rceil S_i^{n-1} \cup \rceil S_i^{n-1}) \cap (\rceil S_i^{n-1} \cup S_i^{n-3}) \cup S_i^{n-3}] =$$
$$= \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_i^1 \cap (\rceil S_i^{n-1} \cup S_i^{n-3}) = \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} (S_i^1 \cap \rceil S_i^{n-1}).$$

Тут враховано, що

$$\bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} (S_i^1 \cap S_i^{n-3}) = \varnothing$$

Виразимо B_i^n з використанням формул (1) і (3). З формули (3) випливає $S_i^{n-1} = B_i^{n-1} \cup S_i^{n-2}$.

Виходячи з цього, формулу (1) можна записати так:

$$S_i^n = \bigcup_{x_j \in S_i^{n-1}} S_j^1 = \bigcup_{x_j \in (B_i^{n-1} \cup S_i^{n-2})} S_j^1 = (\bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_j^1) \cup (\bigcup_{x_j \in S_i^{n-2}} S_j^1).$$

Але, виходячи з формули (1),

$$\bigcup_{x_j \in S_i^{n-2}} S_j^1 = S_i^{n-1}.$$

Тому

$$S_i^n = (\bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_j^1) \cup S_i^{n-1}.$$

Тоді

$$B_i^n = S_i^n \cap \rceil S_i^{n-1} = [(\bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} S_j^1) \cup S_i^{n-1}] \cap \rceil S_i^{n-1} = \bigcup_{x_i \in B_i^{n-1}} (S_j^1 \cap \rceil S_i^{n-1}) \qquad (5)$$

Права частина виразу (5) збігається з перетвореною правою частиною виразу (4), що і доводить теорему.

Використання теореми дозволяє рекурентно обчислювати межі вершин графів, не обчислюючи околів порядку вище першого.

Аналітичне завдання графів у вигляді околів і меж вершин. **Подання графа L=(X, F) зробимо через перерахування перших околів його вершин:**

$$L=(X, F) = \{S_i^1 | x_i \in X\},$$
$$S_i^1 = \{x_i\},\ i \in I = \{1, 2, \ldots, n\},\quad j \in J = 1\{, 2, \ldots, m\}.$$

Тоді графи φ і ψ, показані на рис. 2 і 3, подаються у вигляді:

$$S_1^1(\varphi) = \{x_1, x_2, x_4\},$$
$$S_2^1(\varphi) = \{x_2\},$$
$$S_3^1(\varphi) = \{x_3, x_2, x_4\},$$
$$S_4^1(\varphi) = \{x_4, x_2\}.$$

$$S_1^1(\psi) = \{x_1, x_3\},$$
$$S_2^1(\psi) = \{x_2\},$$
$$S_3^1(\psi) = \{x_3\},$$
$$S_4^1(\psi) = \{x_4, x_2\}.$$

Тут позначення $S_1^1(\varphi)$ означає не функціональну залежність, а те, що перерахування околів здійснюється стосовно графа φ.

Подання об'єднання графів φ і ψ робиться згідно із залежностями:

$$S_i^1(\Phi) = S_i^1(\varphi) \cup S_i^1(\psi),$$

В результаті одержуємо:

$$S_1^1(\Phi)=\{x_1, x_2, x_4\} \cup \{x_1, x_3\} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$S_2^1(\Phi) = \{x_2\},$$
$$S_3^1(\Phi) = \{x_3, x_2, x_4\},$$
$$S_4^1(\Phi) = \{x_4, x_2\}.$$

Для подання перетину графів φ і ψ використовуються залежності:

$$S_i^1(\Phi) = S_i^1(\varphi) \cap S_i^1(\psi),$$

Маємо:

$$S_1^1(\Phi) = \{x_1, x_2, x_4\} \cap \{x_1, x_3\}=\{x_1\},$$
$$S_2^1(\Phi) = \{x_2\},$$
$$S_3^1(\Phi) = \{x_3\},$$
$$S_4^1(\Phi) = \{x_4, x_2\}.$$

Доповнення $\rceil$j до графа j подається за допомогою співвідношень:

Для графа, показаного на рис. 3*в*, одержимо:

$$S_1^1(\rceil\varphi) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$
$$S_2^1(\rceil\varphi) = \{x_2, x_1, x_3, x_4\},$$
$$S_3^1(\rceil\varphi) = \{x_3, x_2, x_4, x_1\},$$
$$S_4^1(\rceil\varphi) =\{x_4, x_2, x_1, x_3\}.$$

Для визначення меж вершин графа необхідно задати їх околи порядку вище першого. Розглянемо граф, показаний на рис. 4.

Для цього графа одержимо:

$$S_1^1 =\{x_1, x_2, x_3\},$$
$$S_2^1 =\{x_2, x_4\},$$
$$S_3^1 =\{x_3, x_5\},$$
$$S_4^1 =\{x_4, x_6\},$$
$$S_5^1 =\{x_5, x_6\},$$
$$S_6^1 =\{x_6, x_7\},$$
$$S_7^1 =\{x_7\}.$$

Для вершини x_3 згідно з виразом (1) маємо:

$$S_3^2 = S_3^1 \bigcup_5 S_5^1 =\{x_3, x_5, x_6\},$$
$$S_3^3 = S_3^2 \cup S_6^1 = \{x_3, x_5, x_6, x_7\}.$$

З використанням (3) третя межа третьої вершини визначається як:

$$B_3^3 = S_3^3 \setminus S_3^2 =\{x_3, x_5, x_6, x_7\} \setminus \{x_3, x_5, x_6\} =\{x_5, x_6\}.$$

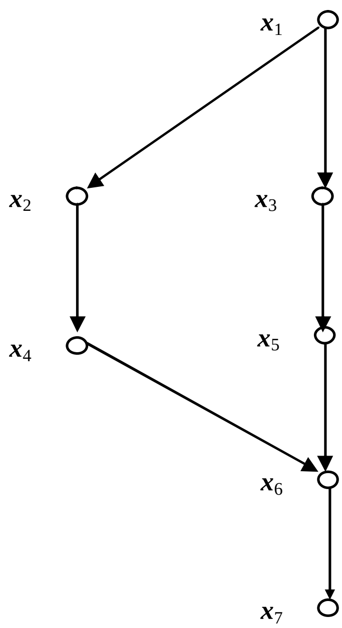


Рис. 4. До визначення меж вершин графа

Подання графів через багатокомпонентні кортежі. Викладений спосіб завдання нечітких графів у вигляді околів і меж вершин відповідає поданню околів вершин через трикомпонентні кортежі. Так, кортеж вершини x_i має вигляд

$$a_i = \langle x_i, |B_i^1|, B_i^1 \rangle . \qquad (6)$$

При розв’язанні різноманітних задач на графах зручно користуватися деякими операціями над кортежами. Це надає алгоритмам компактність і спрощує їх реалізацію.

Відомо [2], що проекцією кортежу на *l*-у вісь називається *l*-а компонента кортежу:

$$\text{пр}_1 a_i = x_i, \quad \text{пр}_2 a_i = |B_i^1|, \quad \text{пр}_3 a_i = B_i^1. \qquad (7)$$

Тобто першою проекцією кортежу (6) є однокомпонентна множина, яка складається з вершини, для якої побудований кортеж.

Друга проекція являє собою потужність (кількість елементів) межі.

Третя проекція являє собою межу першого порядку даної вершини.

Алгебра кортежів. Побудуємо алгебру для кортежів, що розглядаються:

$$(\alpha, \oplus, \theta, \otimes).$$

Носієм алгебри є множина кортежів α. Сигнатура алгебри – сукупність операцій додавання, віднімання і множення кортежів. Операції алгебри *n*-арні.

Перелічені операції виконуються покомпонентно.

А. Операція додавання кортежів ($\oplus$).

$$\alpha_k = \alpha_i \oplus \alpha_j,$$

$$пр_1\alpha_k = пр_1\alpha_i,\ \ пр_3\alpha_k = пр_2\,\alpha_i \cup пр_3\,\alpha_j,\ \ пр_2\alpha_k = \left|\,пр_3\,\alpha_i \cup пр_3\,\alpha_j\right|,$$

Дана операція не комутативна, тому що результуючий кортеж приписується вершині $\boldsymbol{x}_i$.

За допомогою даної операції можуть будуватися околи більш високого порядку. Кортеж

$$\alpha_i^2 = \alpha_i \oplus \alpha_{i1} \oplus\ \ldots\ \oplus \alpha_{ij} \oplus\ \ldots\ \oplus \alpha_{ir},$$

де всі α_{ij} задовольняють вимозі

$$пр_1\alpha_{ij} \in пр_3\alpha_i,$$

описує другий окіл вершини $\boldsymbol{x}_i$.

Дії у такому ланцюжку виконуються зліва направо.

Б. Операція віднімання кортежів (θ).

Кортеж $\alpha_k = \alpha_i\ \theta\ \alpha_j$ будується за такими правилами

$$пр_1\ \alpha_k = пр_1\ \alpha_i\,,$$

тобто результуючий кортеж приписується до вершини x_i,

$$пр_3\alpha_k = пр_3\alpha_i \backslash (пр_3\alpha_i \cap пр_3\alpha_j),$$

$$пр_2\alpha_k = \left|\,пр_3\alpha_i \backslash (пр_3\alpha_i \cap пр_3\alpha_j)\right|.$$

За допомогою операції віднімання кортежів можуть бути побудовані межі вершин більш високих порядків, наприклад

$$B_i^2 = пр_3(\alpha_i^2\ \theta\ \alpha_i).$$

В. Операція множення кортежів ($\otimes$). Кортеж $\alpha_k = \alpha_i \otimes \alpha_j$, будується таким чином:

$$пр_1\alpha_k = пр_1\alpha_i,$$

$$пр_3\alpha_k = пр_3\alpha_i \cap пр_3\alpha_j,$$

$$пр_2\alpha_k = \left|\,пр_3\alpha_i \cap пр_3\alpha_j\right|.$$

Приклад 4. Для графа, показаного на рис. 4, подання через множину кортежів має вигляд:

$$\alpha_1 = \langle x_1, 2, \{x_2, x_3\}\rangle,$$

$$\alpha_2 = \langle x_2, 1, \{x_4\}\rangle,$$

$$\alpha_3 = \langle x_3, 1, \{x_5\}\rangle,$$

$$\alpha_4 = \langle x_4, 1, \{x_6\}\rangle,$$

$$\alpha_5 = \langle x_5, 1, \{x_6\}\rangle,$$

$$\alpha_6 = \langle x_6, 1, \{x_7\}\rangle,$$

$$\alpha_7 = \langle x_7, 0, \{\varnothing\}\rangle.$$

Операція знаходження проекцій:

$$пр_1\alpha_1 = \{x_1\};\ \ пр_3\alpha_1 = \{x_2, x_3\},\ пр_2\alpha_1 = 2;$$

$$пр_1\alpha_2 = \{x_2\};\ \ пр_3\alpha_2 = \{x_4\},\ пр_2\alpha_2 = 1;$$

$$пр_1\alpha_3 = \{x_3\};\ \ пр_3\alpha_3 = \{x_5\},\ пр_2\alpha_3 = 1;$$

$$пр_1\alpha_4 = \{x_4\};\ \ пр_3\alpha_4 = \{x_6\},\ пр_2\alpha_4 = 1;$$

$$пр_1\alpha_5 = \{x_5\},\ \ пр_3\alpha_5 = \{x_6\},\ пр_2\alpha_5 = 1;$$

$$пр_1\alpha_6 = \{x_6\},\ \ пр_3\alpha_6 = \{x_7\},\ пр_2\alpha_6 = 1;$$

$$пр_1\alpha_7 = \{x_7\},\ \ пр_3\alpha_7 = \{\varnothing\},\ пр_2\alpha_1 = 0.$$

Операції над кортежами:

$$\alpha_1 \oplus \alpha_2 = \langle x_1, 2, \{x_2, x_3\}\rangle,$$

$$\alpha_1\ \theta\ \alpha_2 = \langle x_2, 0, \{\varnothing\}\rangle,$$

$$\alpha_1 \otimes \alpha_2 = \langle x_1, 0, \{\varnothing\}\rangle.$$

Конструктивні операції над множинами кортежів. Оскільки графи можуть бути подані через множину багатокомпонентних кортежів, має сенс розглянути деякі конструктивні операції над цими множинами.

А. Операція U з'єднання множини кортежів.

Порядок знаходження множини $\alpha_k = \alpha_i \cup \alpha_j$ такий: множина $\alpha_i \cup \alpha_j$ розбивається на класи еквівалентності за відношенням $пр_1\alpha_i = пр_1\alpha_j$, після цього у кожному класі будується характеристичний кортеж $k\alpha_i = a_i \oplus \ldots \oplus a_l$ за усіма кортежами даного класу (в межах класу операція $\oplus$ комутативна й асоціативна). Одержана множина характеристичних кортежів і буде шуканою множиною $\alpha_k = \{k\alpha_i\}$.

Б. Операція знаходження кортежу з номером $\boldsymbol{i}$ у множині кортежів А ($\alpha_i = \boldsymbol{F}(А, \boldsymbol{i})$) полягає в виділенні у даній множині кортежу, перша проекція якого дорівнює $\boldsymbol{i}$: $пр_1\alpha_i = \boldsymbol{i}$.

В. Операція знаходження проекції множини кортежів А на кортеж α_i^*, тобто $А_i = \boldsymbol{Pr}(А, \alpha_i^*)$, здійснюється таким чином. У множині А виділяється підмножина кортежів, що приписані тій саме вершині, що і α_i^*, або до вершини, що входить до її межі $B_i^1{*}$, тобто підмножина кортежів $А' = \{\alpha_j\}$, для яких:

$$\alpha_j \in А' \leftrightarrow (пр_1\alpha_j = пр_1\alpha_i^*) \vee (пр_1\alpha_j \in пр_3\alpha_i^*).$$

Після цього реалізується операція множення кожного елемента цієї множини на α_i^*. Одержані кортежі утворять шукану множину

$$А_i = \{\alpha_z = \alpha_j \otimes \alpha_i^* \mid \alpha_j \in А'\}.$$

Г. Операція виділення підмножини кортежів $А_c$ з множини А за заданим параметром C.

$$A_{(\geq C)}= Pr_{(\geq C)}(A),\ A_{(>C)}= Pr_{(>C)}(A),\ A_{(<C)}=Pr_{(<C)}(A).$$

У множині A_c залишаються кортежі α_i, для яких пр$_2\alpha_i \geq C$, пр$_2\alpha_i > C$, пр$_2\alpha_i<C$ відповідно.

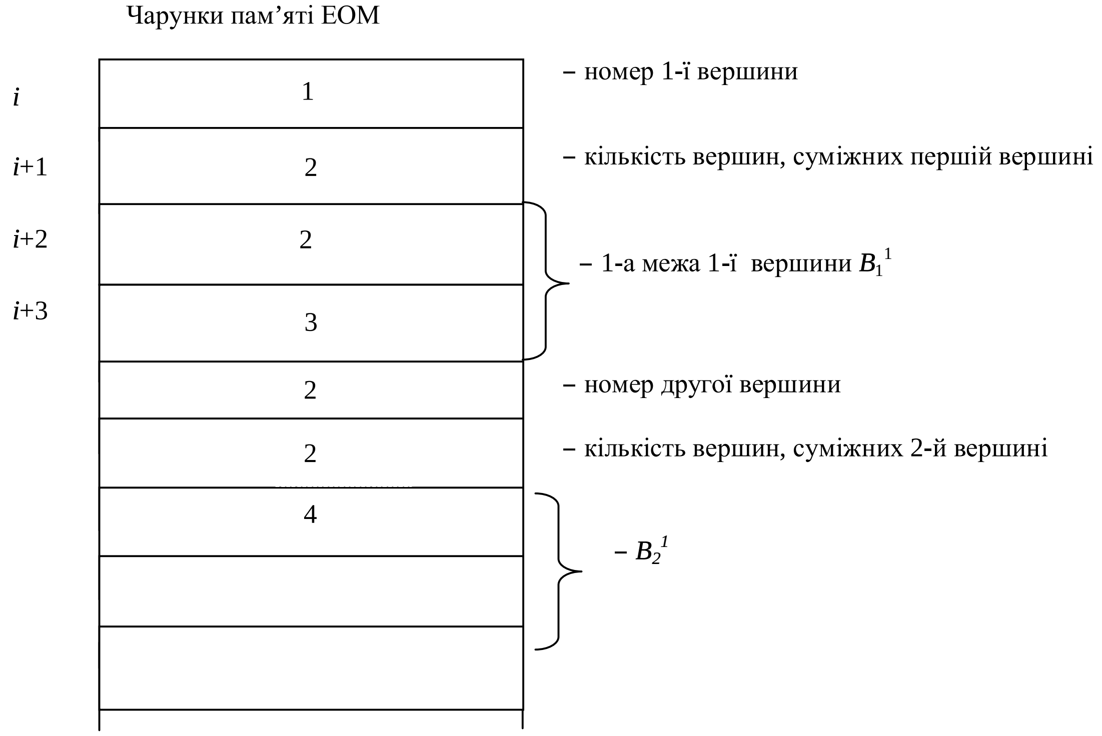


Рис. 5. До представлення графа в пам'яті ЕОМ

Д. Операція вилучення кортежу α_i з множини A (A_i = D(A, α_i)) здійснюється таким чином:

1. Будується $A' = A \backslash \alpha_i$.
2. Будується допоміжний кортеж α_i^*:

$$пр_1\alpha_i^* = пр_1\alpha_i,\ пр_2\alpha_i^* = 1,\ пр_3\alpha_i^* = пр_1\alpha_i.$$

3. Для кожного $\alpha_j \in A'$ здійснюється операція

$$\alpha_z=\alpha_j\ \theta\ \alpha_i^*,\ \ A_i = \{\alpha_z\}.$$

Завдання графів у вигляді багатокомпонентних кортежів дозволяє подати їх в пам'яті ЕОМ у вигляді лінійних одновимірних масивів. При цьому усувається надмірність, притаманна традиційним засобам подання графів.

На рис. 5 показано лінійне зображення графа (рис. 4) у вигляді одновимірного масиву.

У першому осередку записаний номер першої вершини, після цього послідовно номери вершин, що входять до першої нечіткої межі (з їх ступенями належності). У наступному осередку запам'ятовується номер другої вершини і т. ін. Таке подання дозволяє однозначно виділити будь-яку нечітку вершину та її межу.

Пошарове проектування алгоритмів аналізу і синтезу із застосуванням теорії графів. Використання графових моделей для формалізованого подання їх у розрахункових задачах військового призначення дозволяє реалізувати пошарову схему їх проектування (рис. 6).

Алгоритми аналізу і синтезу формують верхній шар. В них використовуються операції, що реалізуються у нижніх шарах:

алгоритми теорії графів, виражені у вигляді околів і меж вершин;

операції над кортежами і конструктивні операції над множинами кортежів;

теоретично-множинні операції;

структурні оператори.

Наступний шар утворюють алгоритми, що використовують операції 3-го, 2-го і 1-го шарів.

Така схема дозволяє реалізувати будь-який алгоритм будь-якого рівня після необхідних підстановок з нижніх шарів у вигляді цілісної програми, що забезпечує спрощення практичної реалізації засобів моделей і алгоритмів, що пропонуються.

Висновки

Як апарат формалізованого вирішення багатьох військово-технічних задач пропонується використовувати графові моделі.

Реалізація запропонованих моделей вимагає використання інструментальних програмних засобів, які дозволяють автоматизувати процес проектування. Це, у свою чергу, вимагає розроблення відповідних способів аналітичного подання графів.

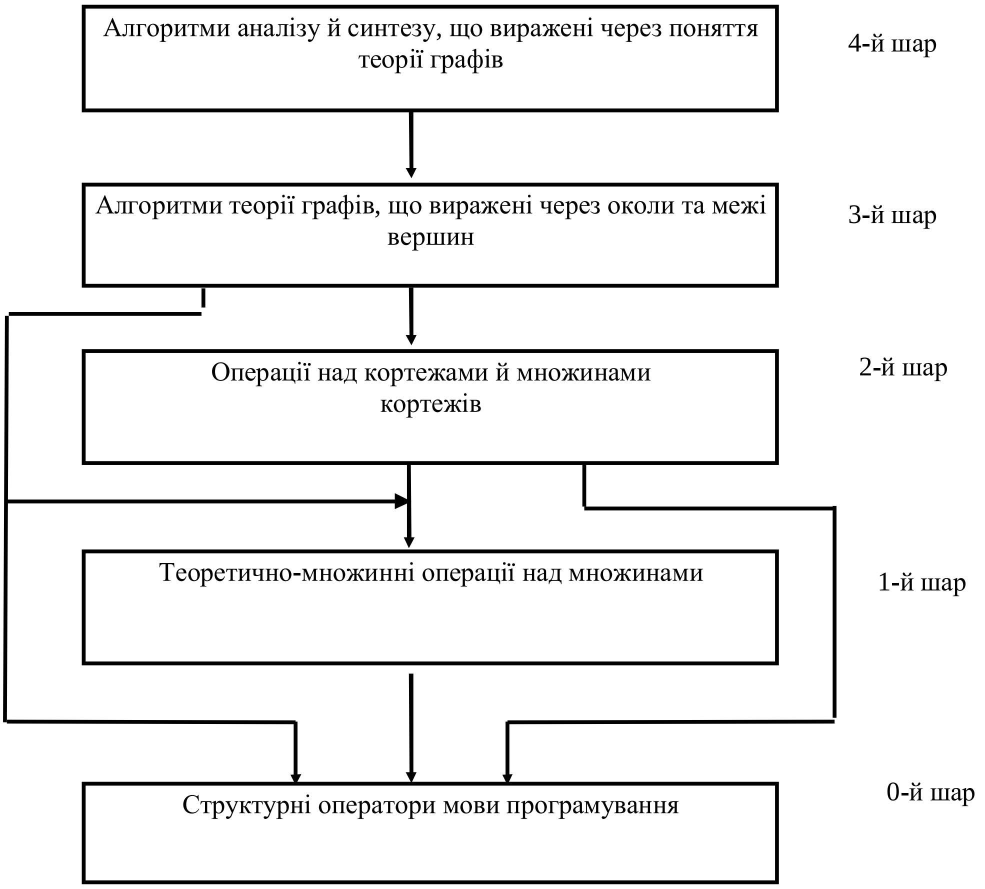


Рис. 6. Пошарове проектування алгоритмів аналізу і синтезу ППЗ

Розвинутий у статті підхід до завдання графів через околи і межі вершин дозволив вирішити цю задачу, уникнувши при цьому надмірності, притаманній традиційним способам подання. Доведені у роботі теореми показують обгрунтованість такого підходу.

Для спрощення фізичної реалізації одержаних рішень запропоновано подання околів вершин графів через багатокомпонентні кортежі. Це дозволило інтерпретувати подання графів у пам'яті ЕОМ у вигляді лінійних структур даних і, в наслідок цього, суттєво скоротити необхідний обсяг пам'яті у порівнянні з традиційними способами подання. Аналіз алгоритмів теорії графів дозволив визначити основні типові і конструктивні операції над кортежами і множинами кортежів.

Алгебра кортежів, яка наведена у роботі, дозволяє реалізувати пошарову схему розроблення програмних інструментальних засобів, яка складається з таких шарів:

алгоритми аналізу і синтезу ППЗ, які виражені через поняття теорії графів;
алгоритми теорії графів, які виражені у вигляді околів і меж вершин;
операції над кортежами і конструктивні операції над множинами кортежів;
теоретично-множинні операції;
структурні оператори.

Література

1. Толубко В.Б.Методологічні основи проектування прикладного програмного забезпечення для АСУ воєнного призначення : [монографія] / Толубко В. Б., Сбітнєв А. І., Пермяков О. Ю. – К. : НАОУ, 2004. – 249 с.

2. Сбитнев А.И. Структурная организация и проектирование математического обеспечения АСУ ТП : дис. … д-ра техн. наук : 05.13.11, 05.13.06 / Сбитнев А.И. – К., 1989. – 447 с.

3. Шиханович Ю.А. Введение в современную математику / Шиханович Ю.А. – М. : Наука, 1965. – 376 с.

Надійшла 18.9.2011 р.