УДК 517.923+539.375.6+004.421

В.В. РОМАНЮК
Хмельницький національний університет

ПРОГРАМНА MATLAB-ПІДТРИМКА ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ ВИЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЕЛЕМЕНТАРНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ДЛЯ ОДНІЄЇ МОДЕЛІ ЗНОШУВАННЯ

Розглядається елементарне стохастичне диференціальне рівняння з функціями зносу і дифузії як функціями часу як модель зношування робочої поверхні. Для визначення розв'язку цього рівняння використовується стандартна чисельна процедура, для котрої спроектовано MATLAB-функцію, п'ять вхідних аргументів якої дозволяють змінювати або контролювати параметри досліджуваного стохастичного диференціального рівняння. Наведено приклади роботи з розробленою MATLAB-функцією, що допомагають користувачу опанувати запропоновану MATLAB-підтримку у визначенні залежності зношування від часу як розв'язку елементарного стохастичного диференціального рівняння.

There is considered an elementary stochastic differential equation with functions of drift and diffusion as functions of time as a model of work surface wear. For determining the solution of this equation there is used the standard numerical procedure, for which there has been projected MATLAB-function, whose five input arguments help in varying or controlling parameters of the being investigated stochastic differential equation. There have been exemplified illustrations of working along with the developed MATLAB-function, which help a user to handle the suggested MATLAB-support in determining the dependence of wear against time as the solution of the elementary stochastic differential equation.

Ключові слова: зношування, модель зношування, випадковий процес, стохастичне диференціальне рівняння, чисельні методи визначення розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь, елементарне стохастичне диференціальне рівняння з функціями зносу і дифузії як функціями часу, MATLAB-функція, програмний контроль параметрів стохастичного диференціального рівняння.

Щодо проблеми контролю зношування робочих поверхонь

Строк експлуатації будь-якої робочої поверхні обмежений граничним значенням її зношування u. Утім, визначення строку експлуатації залежить також від середньої інтенсивності або швидкості зношування [1, 2], котру можна оцінити, зокрема, за умови, якщо відома функція часу $u(t)$. Іншими словами, зношування робочих поверхонь має бути під контролем, а це реалізується за допомогою як вимірювань, так і відповідних математичних моделей та розрахунків [3, 4]. Однак проводити вимірювання повсякчас неможливо, тому контроль зношування робочої поверхні за допомогою математичного моделювання є виключно пріоритетним, хоча вибір конкретної моделі зношування представляє додаткову задачу. Крім цього, оскільки процес зношування частково носить випадковий характер [2], то зазвичай функція $u(t)$ є невідомою функцією у диференціальному рівнянні зі стохастичною складовою [5, 6]. А визначення розв'язку стохастичного диференціального рівняння практично неможливе у суто аналітичному виді, тому доводиться застосовувати чисельні методи [7 — 10].

Аналіз останніх відомих досліджень у напрямку чисельного моделювання розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь

Основи теорії чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь були закладені у монографіях [7, 10] й [11], що узагальнило відомі фундаментальні результати, отримані в основному авторами цих книг раніше. У монографіях [12, 13], як й у монографіях [7, 10, 11], використовується підхід до чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь, що заснований на скінченній дискретизації часового інтервалу і чисельному моделюванні розв'язування стохастичного диференціального рівняння у дискретні моменти часу за допомогою стохастичних аналогів формули Тейлора і спеціальних методів апроксимації повторних стохастичних інтегралів. Також в рамках даного підходу у монографіях [12, 13] пропонується ряд нових методів чисельного розв'язування систем лінійних і нелінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Зокрема, викладено метод апроксимації повторних стохастичних інтегралів Стратоновича, оснований на кратних рядах Фур'є; метод Мільштейна розкладу повторних стохастичних інтегралів Стратоновича; розклад повторних стохастичних інтегралів з використанням поліномів Ерміта; метод апроксимації повторних стохастичних інтегралів Іто, оснований на кратних інтегральних сумах; розклад повторних симетризованих стохастичних інтегралів за пуасонівськими процесами, оснований на кратних рядах Фур'є; методи, основані на уніфікованому розкладі Тейлора — Іто; чисельні методи, основані на розкладі Тейлора — Іто у формі Вагнера і Платена; чисельні методи, основані на розкладі Тейлора — Стратоновича; скінченно-різницеві чисельні методи, основані на розкладах Тейлора — Іто; неявні однокрокові сильні методи чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто; неявні сильні однокрокові скінченно-різницеві методи чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто; явні двокрокові сильні методи чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто; неявні двокрокові сильні методи чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто; двокрокові сильні скінченно-різницеві методи чисельного розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь Іто; метод чисельного моделювання розв'язування стаціонарних систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, оснований на формулі Коші та спектральному розкладі; метод чисельного моделювання розв'язування стаціонарних систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, оснований на кусково-постійній апроксимації білого шуму. Але перераховані методи є дуже громіздкими, тому їх доцільно використовувати для складних за структурою стохастичних диференціальних рівнянь або їх систем. Простіші стохастичні диференціальні рівняння потребують більш легких чисельних процедур для їх відповідної комп'ютерної реалізації. У монографіях [12, 13] представлено цілу бібліотеку MATLAB-функцій чисельного розв'язування стаціонарних систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь з функціями уводу — виводу, перегляду і редагування вихідних даних, з функціями обчислення матриць детермінованої, динамічної та випадкової складових стаціонарних систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь, а також з функціями вибору й обчислення зовнішнього детермінованого впливу. У цьому ж джерелі можна знайти чимало прикладів чисельного MATLAB-моделювання стохастичних інтегралів і розв'язування стохастичних диференціальних рівнянь та стаціонарних систем лінійних стохастичних диференціальних рівнянь. Проте представлені MATLAB-функції та відповідна MATLAB-бібліотека не дають можливості змінювати параметри або структуру стохастичного диференціального рівняння програмно, а лише у самому коді програмних модулів (скриптів). Тому для простих стохастичних диференціальних рівнянь є потреба у створенні програмної підтримки визначення розв'язку, де допускатиметься можливість зміни (варіації або контролю) його параметрів, а сам розв'язок виводитиметься у формі вектора або матриці на фоні його візуалізації. Така програмна підтримка надасть більш широкі можливості у контролюванні зношування робочих поверхонь, яке моделюється за відповідними стохастичними диференціальними рівняннями.

Мета статті та постановка завдання

Розглядатимемо елементарне стохастичне диференціальне рівняння виду

$$\frac{du(t)}{dt} = m(t) + \sigma(t)\zeta(t) \tag{1}$$

відносно шуканого випадкового процесу $u(t)$ за відомих функції зносу $m(t)$ і функції дифузії $\sigma(t)$ цього процесу [5], визначеними на сегменті $[0; T] \subset \mathbb{R}$, де $\zeta(t)$ є випадковим процесом таким, що випадковий процес $\int_0^t \zeta(s)ds$ є вінеровським. Вважається, що функції $m(t)$ та $\sigma(t)$ є визначеними і вимірними $\forall\, t \in [0; T]$, інтеграли $\int_0^T |m(t)|dt$ та $\int_0^T \sigma^2(t)dt$ є скінченними, а інтеграл $\int_0^T \zeta^2(t)dt$ є скінченним з рівною одиниці імовірністю. Початкова умова

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

є незалежною від стохастичної складової рівняння (1). Визначатимемо розв'язок рівняння (1), використовуючи відому чисельну процедуру, у програмному середовищі MATLAB, для чого спроектуємо спеціальну MATLAB-функцію, де передбачимо можливість програмного контролю функції зносу $m(t)$ і функції дифузії $\sigma(t)$ шуканого випадкового процесу $u(t)$ при відомій структурі стохастичної складової $\zeta(t)$.

MATLAB-функція esdes для чисельного визначення розв'язку елементарного стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2)

Перш за все помітимо, що функції $m(t)$ та $\sigma(t)$ є детермінованими, тобто не залежать від випадкового процесу $u(t)$ і не містять стохастичних складових. Це означає, що розв'язок стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2) у неявній (інтегральній) формі

$$u(t) = u_0 + \int_0^t m(s)ds + \int_0^t \sigma(s)\zeta(s)ds \tag{3}$$

можна визначити чисельно для скінченної множини аргументів $t \in [0; T]$ за відомої структури стохастичної складової $\zeta(t)$.

Нехай відомі відліки

$$\left\{\zeta(t_j) = \zeta_j\right\}_{j=1}^{L} \quad \forall\; t_{i+1} = t_i + \frac{T}{L-1} \quad \text{при} \quad i = \overline{1, L-1} \quad \text{та} \quad t_1 = 0 \quad \text{і} \quad t_L = T \tag{4}$$

випадкового процесу $\zeta(t)$. Вони можуть бути, наприклад, реалізацією розіграної у середовищі MATLAB L-вимірної випадкової величини (зокрема, з нормальним розподілом). Тоді

$$u(t_j)=u_0+\frac{T}{L-1}\sum_{k=2}^{j}m(t_k)+\frac{T}{L-1}\sum_{k=2}^{j}\sigma(t_k)\zeta_k \quad \text{для} \quad j=\overline{1,\,L} \tag{5}$$

за відомим принципом чисельного інтегрування вимірної на сегменті числової прямої функції. Процедуру (5) для визначення чисельного розв'язку елементарного стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2) у формі відліків

$$\left\{u(t_j)=u_{j-1}\right\}_{j=1}^{L} \quad \forall\; t_{i+1}=t_i+\frac{T}{L-1} \quad \text{при} \quad i=\overline{1,\,L-1} \tag{6}$$

легко запрограмувати у коді MATLAB [12, 13]. На рис. 1 представлено скріншот коду відповідної MATLAB-функції **esdes** (Elementary Stochastic Differential Equation Solution) для чисельного визначення розв'язку елементарного стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2). Вхідними аргументами функції **esdes** є п'ять MATLAB-змінних (рядок 1 коду): детермінована функція $m(t)$ як змінна **m**, детермінована функція $\sigma(t)$ як змінна **sigma**, початкова умова (2) як значення **x0**, правий кінець сегмента $[0;T]$ як значення **T** та відліки (4) випадкового процесу $\zeta(t)$ як значення **dzeta**. Вихідним аргументом функції **esdes** є одна MATLAB-змінна **x**, котра є набором L відліків (6) шуканого випадкового процесу $u(t)$. Окрім того, що у командне вікно MATLAB виводяться відліки (6), чисельний розв'язок у формі (6) візуалізується (рядки 32 — 37 коду).

```
E:\MATLAB7p0p1\work\esdes.m
File Edit Text Cell Tools Debug Desktop Window Help

1   function [x] = esdes(m, sigma, x0, T, dzeta)
2   %Elementary Stochastic Differential Equation (Numerical) Solution
3   % dx/dt = m(t) + sigma(t)*dzeta(t), where dzeta(t) is a stochastic process (mostly Wiener process)
4   % x(t) = x0 + int(m(tau), tau=0.....t) + int(sigma(tau).*dzeta(tau), tau=0.....t) is the analytical solution
5   K = length(dzeta) - 1;
6   if ischar(m) == 1
7      t=0:T/K:T;
8      eval(['m_real=' m ';']);
9   else
10     if length(m) == length(dzeta)
11        m_real = m;
12     else
13        m_real=repmat(m, 1, K + 1);
14     end
15  end
16  if ischar(sigma) == 1
17     t=0:T/K:T;
18     eval(['sigma_real=' sigma ';']);
19  else
20     if length(m) == length(dzeta)
21        sigma_real = sigma;
22     else
23        sigma_real=repmat(sigma, 1, K + 1);
24     end
25     sigma_real=repmat(sigma, 1, K + 1);
26  end
27  counter = 0;
28  for t=0:T/K:T
29      counter = counter + 1;
30      x(counter) = x0 + (T/K)*sum(m_real(2:counter)) + (T/K)*sum(sigma_real(2:counter).*dzeta(2:counter));
31  end
32  fh=figure;
33  plot(0:T/K:T, x)
34  xlabel('time t');
35  ylabel('Solution x(t)');
36  set(fh,'HandleVisibility','Off','IntegerHandle','Off','NumberTitle','Off', ...
37        'Name','Numerical Solution x(t) of Elementary Stochastic Differential Equation')

esdes    Ln 37    Col 88
```

Рис. 1. Код MATLAB-функції esdes для чисельного визначення розв'язку елементарного стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2)

Приклади чотирикратного використання MATLAB-функції **esdes** з функцією зносу

$$m(t)=3\sin t+\cos(6t) \tag{7}$$

і функцією дифузії

$$\sigma(t)=t \tag{8}$$

для початкової умови $u_0 = 0$ наведені на рис. 2, де $T = 13$, а $L = 10000$ відліків (4) випадкового процесу $\zeta(t)$ є нормально розподіленими з нульовим математичним сподіванням й одиничною дисперсією. При збільшенні дисперсії цих відліків у чотири рази стохастичність розв'язку рівняння (1), що природно, стає більш явною (рис. 3). Також на кожному з восьми графіків відліків (6) помічаємо, що з плином часу стохастичність розв'язку рівняння (1) посилюється, що обумовлено лінійним збільшенням дифузії (8). Проте при таких параметрах рівняння (1) його розв'язок є достатньо "схожим" на розв'язок рівняння (1) з функцією зносу (7) і $\zeta(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0; T]$.

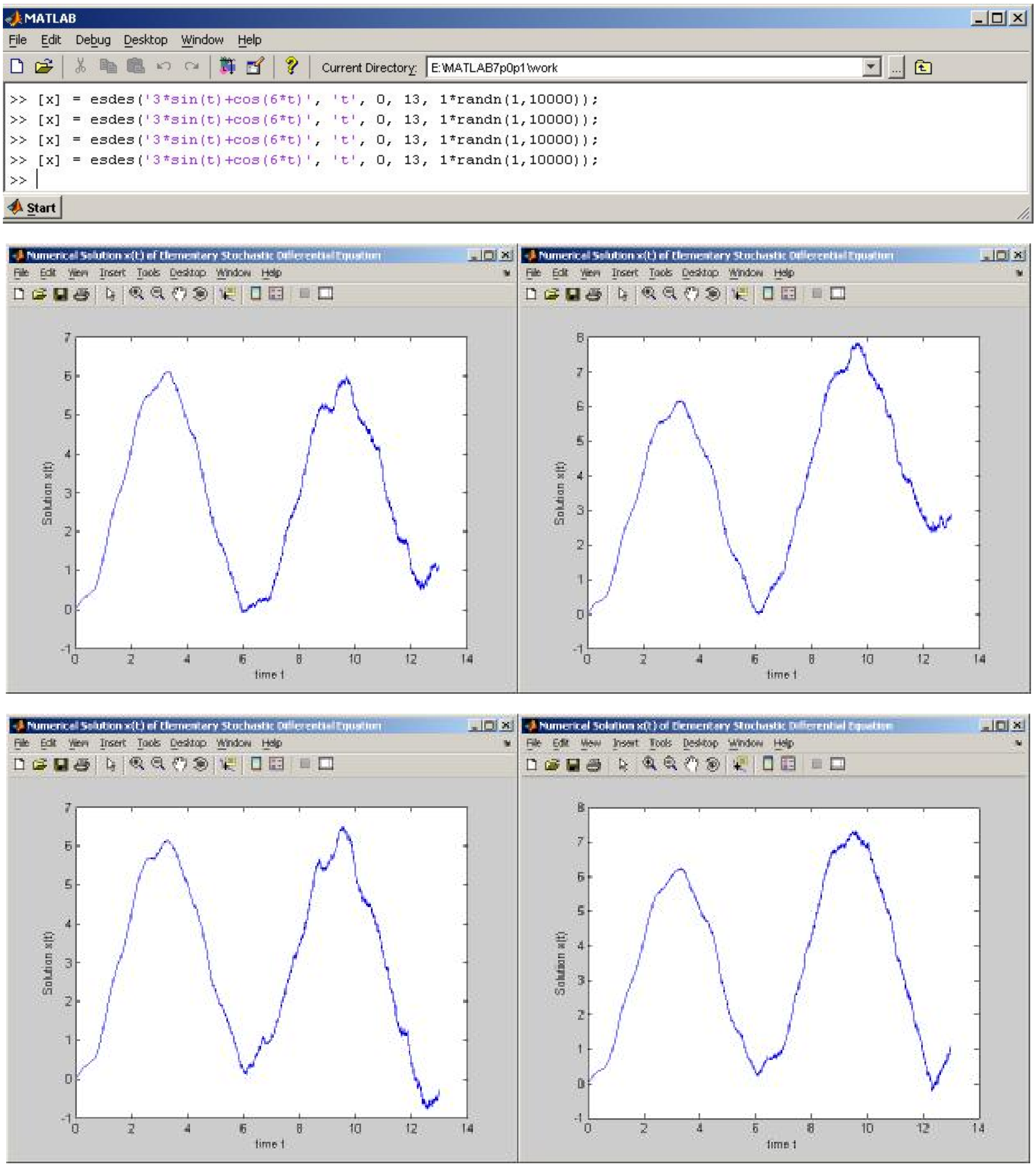

Рис. 2. Розв'язок рівняння (1) за початкової умови $u_0 = 0$ для (7) і (8) при одиничній дисперсії $L = 10000$ відліків (4)

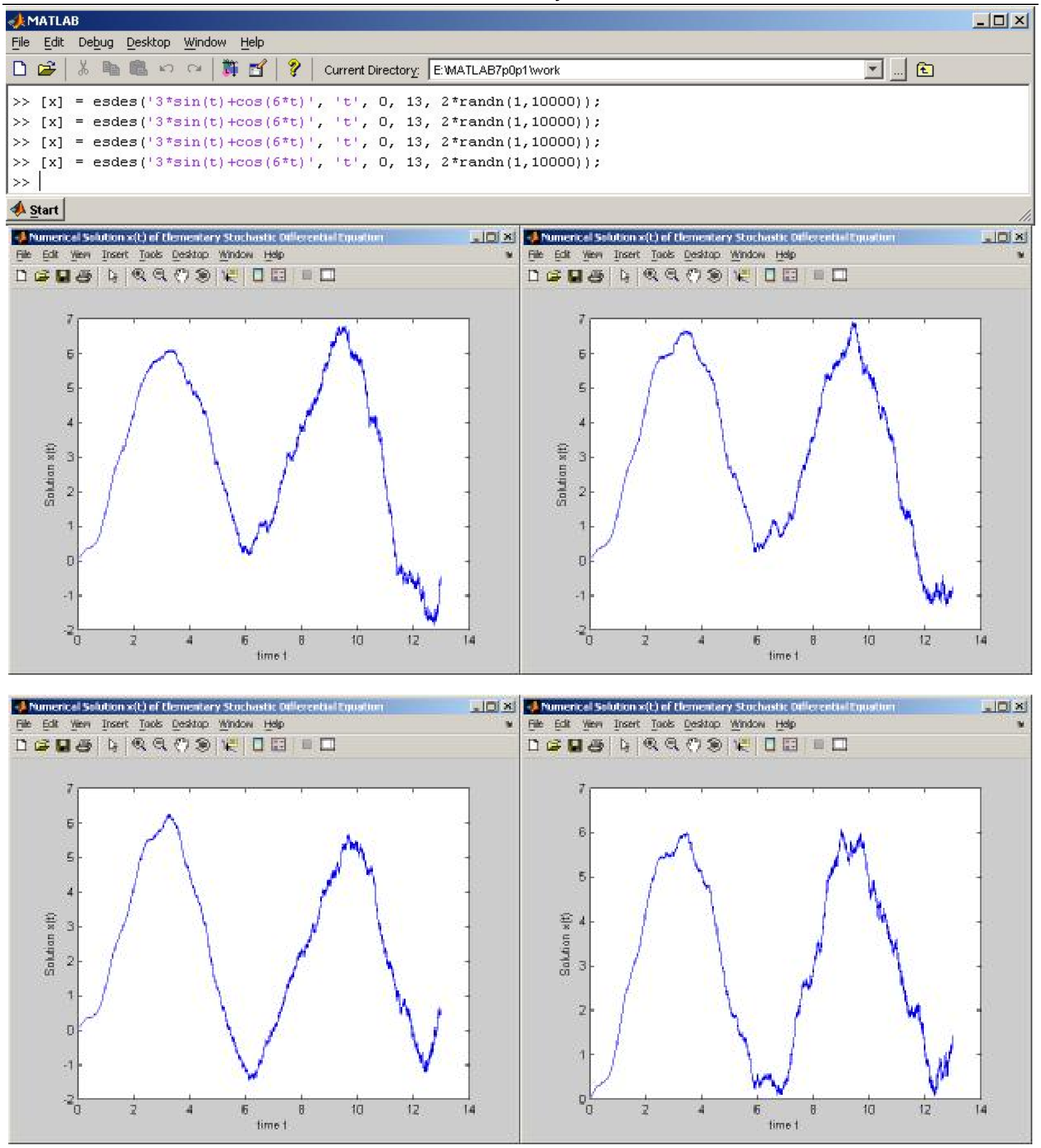

Рис. 3. Розв'язок рівняння (1) за початкової умови $u_0 = 0$ для (7) і (8) при збільшеній у чотири рази дисперсії $L = 10000$ відліків (4)

Звичайно, для розв'язків рівняння (1), основу яких складають компоненти з більшими квазічастотами, як-от для функції зносу

$$m(t) = 5\sin(3t) + 4\cos(7t), \tag{9}$$

теж можна виокремлювати детерміновану складову (рис. 4), що отримується як розв'язок рівняння (1) з відповідною функцією зносу $m(t)$ і $\zeta(t) = 0 \quad \forall\, t \in [0; T]$. Втім, зі збільшенням дисперсії відліків (4) до значної кількості локальних екстремумів детермінованої складової додаються псевдоекстремуми за рахунок зростання потужності дифузії. І, взагалі кажучи, математичне сподівання випадкового процесу $u(t)$ як розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2)

$$\mathbf{M}\left[u(t) - u_0\right] = \int_0^t m(s)\,ds\,. \tag{10}$$

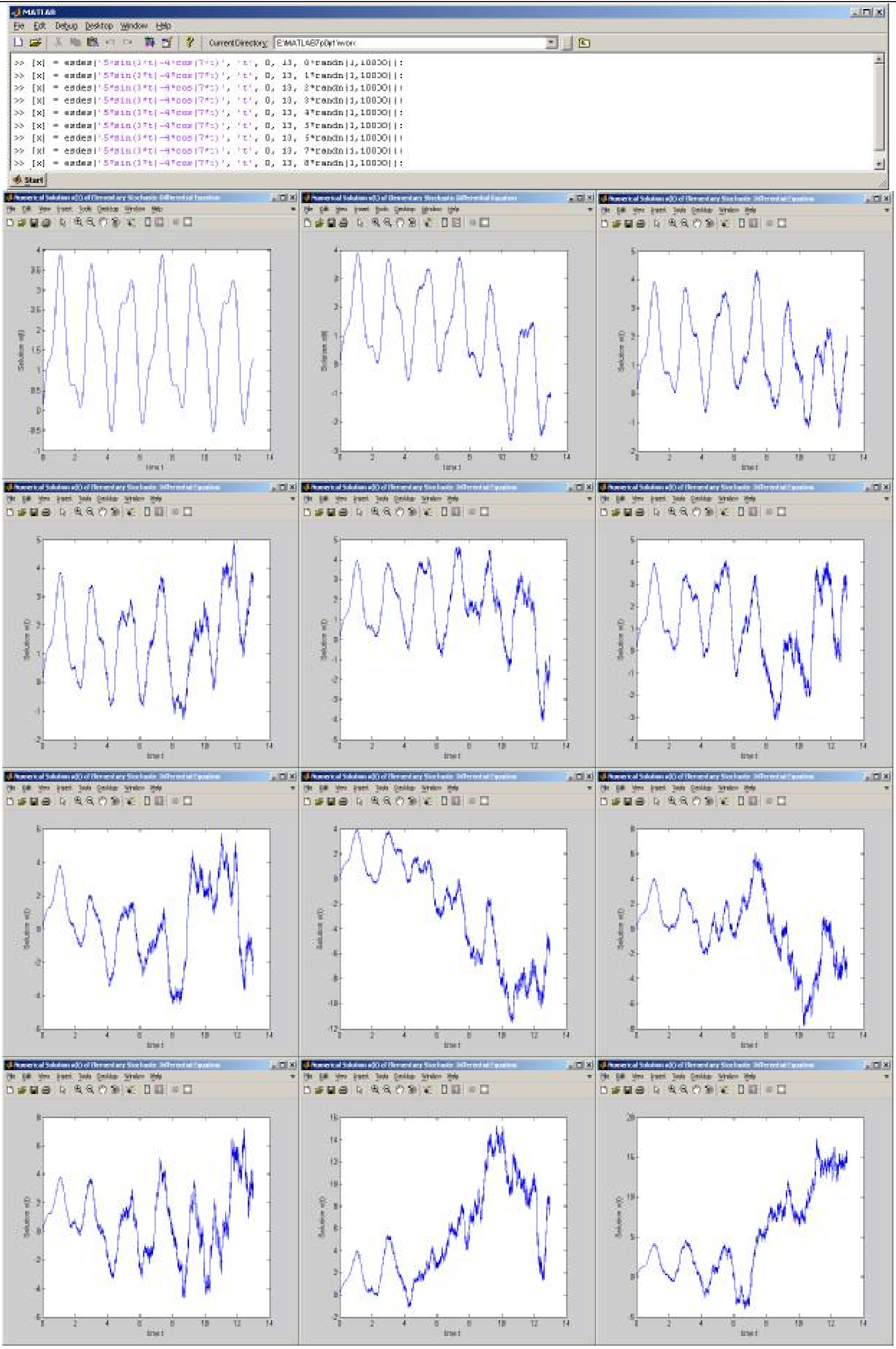

Рис. 4. Детермінована складова і розв'язки рівняння (1) за початкової умови $u_0 = 0$ для (9) і (8) при збільшуванні дисперсії $L = 10000$ відліків (4)

А для стандартного вінеровського процесу $\int_0^t \zeta(s)ds$ дисперсія випадкового процесу $u(t)$ як розв'язку стохастичного диференціального рівняння (1) за початкової умови (2)

$$\mathbf{D}\left[u(t)-u_0\right]=\int_0^t \sigma^2(s)ds\,. \tag{11}$$

Зокрема, для функції дифузії (8) зі стандартним вінеровським процесом дисперсією (11) є $\mathbf{D}\left[u(t)\right]=\frac{t^3}{3}$.

Висновок

Спроектовану MATLAB-функцію **esdes**, п'ять вхідних аргументів якої дозволяють змінювати або контролювати параметри стохастичного диференціального рівняння (1), можна використовувати для дослідження зношування робочих поверхонь $u(t)$, де під u можна розуміти і нормоване зношування таке, що $0\leqslant|u(t)|\leqslant 1$. Початкова умова (2) при $u_0=0$ відповідатиме абсолютно новій робочій поверхні, а випадок $u=1$ означатиме те, що ця поверхня є вже повністю зношеною, непридатною до експлуатації. Наведені на рис. 2 — 4 приклади роботи з розробленою MATLAB-функцією **esdes** допомагають користувачу опанувати запропоновану MATLAB-підтримку у визначенні залежності зношування від часу. Зауважимо, що час на проміжку $[0;T]$ може бути і нормованим, тобто $T=1$. У разі використання нормованого часу і нормованого зношення результати роботи MATLAB-функції **esdes** у формі відліків (6) та їх зображень можна буде порівнювати для різних об'єктів дослідження щодо їх зношуваності.

Література

1. Jankauskas V. Analysis of abrasive wear performance of arc welded hard layers / V. Jankauskas, R. Kreivaitis, D. Milčius, A. Baltušnikas // Wear. — 2008. — Volume 265, Issues 11 — 12. — P. 1626 — 1632.
2. Andersson S. A random wear model for the interaction between a rough and a smooth surface / S. Andersson, A. Söderberg, U. Olofsson // Wear. — 2008. — Volume 264, Issues 9 — 10. — P. 763 — 769.
3. Tassini N. A numerical model of twin disc test arrangement for the evaluation of railway wheel wear prediction methods / N. Tassini, X. Quost, R. Lewis, R. Dwyer-Joyce, C. Ariaudo, N. Kuka // Wear. — 2010. — Volume 268, Issues 5 — 6. — P. 660 — 667.
4. Икрамов У. А. Расчетные методы оценки абразивного износа / Икрамов У. А. — М. : Машиностроение, 1987. — 288 с.
5. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наукова думка, 1968. — 354 с.
6. Milstein G. N. Stochastic numerics for mathematical physics / G. N. Milstein, M. V. Tretyakov. — Berlin : Springer-Verlag, 2004. — 596 p.
7. Мильштейн Г. Н. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений : [монография] / Мильштейн Г. Н. — Свердловск : Изд-во Уральского ун-та, 1988. — 225 с.
8. Кузнецов Д. Ф. Конечно-разностные сильные численные методы порядков точности 1.5 и 2.0 для стохастических дифференциальных уравнений Ито с неаддитивным многомерным шумом / Д. Ф. Кузнецов // Проблемы управления и информатики. — 2001. — № 4. — С. 59 — 73.
9. Кузнецов Д. Ф. Трехшаговые сильные численные методы для стохастических дифференциальных уравнений Ито / Д. Ф. Кузнецов // Проблемы управления и информатики. — 2002. — № 6. — С. 104 — 119.
10. Kloeden P. E. Numerical solution of stochastic differential equations : [monograph] / P. E. Kloeden, E. Platen. — Berlin : Springer-Verlag, 1992. — 632 p.
11. Kloeden P. E. Numerical Solution of SDE Through Computer Experiments : [monograph] / P. E. Kloeden, E. Platen, H. Schurz. — Berlin : Springer-Verlag, 1994. — 292 p.
12. Кузнецов Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений : [монография] / Кузнецов Д. Ф. — СПб. : Изд-во С.-Петербургского государственного университета, 2001. — 712 с.
13. Кузнецов Д. Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения / Кузнецов Д. Ф. — [4-е изд., испр. и доп.]. — СПб. : Изд-во Политехнического университета, 2010. — 816 с.

Надійшла 11.12.2011 р.
Рецензент: д.т.н. Рудницький В.Б.