

УДОСКОНАЛЕННЯ РОЗРАХУНКІВ НА МІЦНІСТЬ В МАШИНОБУДУВАННІ

Викладено суть авторських робіт, присвячених розрахунку на міцність детермінованими методами опору матеріалів. В роботах розроблено методу побудови повної діаграми граничних амплітуд напружень; показано значну відмінність границь плинності конструкційної сталі при статичних розтязі і згині. З урахуванням залежності величини критерію міцності від виду деформації і характеру навантаження виведено формули коефіцієнта запасу міцності, компонентами яких є частинні коефіцієнти; запропоновано поняття "віртуальний" і "дійсний" напружені стани (ВНС і ДНС), "використана опірність матеріалу руйнуванню" (ВОМР); за допомогою ВОМР розв'язано задачу на міцність в загальній постановці – незалежно від кількості простих опорів і характеру навантаження: статичного, циклічного чи змішаного.

Essence of the authorial works sanctified to the calculation on durability by the determined methods of material resistance has been expounded. Methodology of construction of complete diagram of maximum tension amplitudes has been worked out; the considerable difference of borders of fluidity of construction steel at static tension and bend has been shown. Taking into account dependence of criterion size of durability on the type of deformation and character of loading the formulas of coefficient of safety margin have been shown out, their components are the part coefficients; the concepts "virtual" and "actual" tense states (VTS and ATS), "used resistibility of material to destruction" (URMD) have been offered; by means of URMD a problem has been solved on the general raising – regardless of amount of simple resistances and character of loading: static, cyclic or mixed.

Ключові слова: напруження (віртуальне, дійсне), напружений стан (віртуальний, дійсний), гіпотези міцності, використана опірність матеріалу руйнуванню (ВОМР).

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів машин і споруд за відомим напруженим станом [1, с.180].

Кількісно міцність оцінюють коефіцієнтом запасу міцності (надалі – коефіцієнтом запасу).

Проблема визначення коефіцієнта запасу в машинобудуванні була і залишається однією з найгостріших. Особливо це стосується складного напруженого стану, навіть за статичного навантаження.

При циклічному навантаженні в умовах складного напруженого стану, коли може реалізуватись безліч співвідношень компонентів напружень, що змінюються за величиною, знаком, частотою, задача розрахунку на міцність стає ще складнішою і в загальній постановці поки що не розв'язана [2, с.276].

Мета роботи – підвищення надійності розрахунків, що проявляється у зменшенні розбіжності між дослідними і розрахунковими даними, за умови використання існуючої бази даних, тобто без проведення додаткових експериментів.

При розв'язанні поставленої задачі використано літературні дані і традиційні детерміновані методи розрахунку, оскільки методи розрахунку в ймовірнісній постановці, особливо розрахунки на витривалість, перебувають на стадії розробки.

Використані припущення:

1) граничним напруженням для матеріалу в крихкому стані є границя міцності, а в пластичному – границя плинності;

2) між напруженням і деформацією до моменту настання граничного стану існує лінійна залежність;

3) при визначенні напружень і деформацій справедливий принцип суперпозиції.

Робота має комплексний характер. Нижче наведено пропозиції удосконалення розрахунків, що стосуються окремих розділів опору матеріалів і теорії пружності.

І. Напружений стан в точці, віртуальний і дійсний

Про суть віртуального і дійсного напружених станів та залежність між їхніми параметрами викладено в [3, с.32].

Як відомо, в околі довільної точки деталі, що зазнає зовнішнього впливу, можна виділити принаймні один елементарний прямокутний паралелепіпед, грані якого вільні від дотичних напружень [1, с.154]. Ці грані (площинки) називаються *головними*. А нормальні напруження в таких площинках – *головними напруженнями*.

Напруження, в тому числі головні, визначені як результат зовнішніх впливів без врахування деформації матеріалу, характеризують *віртуальний* напружений стан (ВНС).

Дійсний напружений стан (ДНС) залежить як від зовнішніх впливів, так і від деформівних властивостей матеріалу, показниками яких є модуль поздовжньої пружності E , модуль зсуву G і коефіцієнт Пуассона μ .

Надалі поняття "ВНС" і "напружений стан", а також "віртуальне напруження" і "напруження" слід вважати рівнозначними. Параметри ДНС мають позначку (*).

Головні напруження мають властивість екстремальності. Найбільше з них (в алгебраїчному розумінні) позначають S_1 , найменше – S_3 , проміжне – S_2 . Отже

$$S_1 \geq S_2 \geq S_3. \quad (1)$$

Головні напруження ДНС визначають за законом Гука:

$$s_i^* = Ee_i \quad (i=1, 2, 3), \quad (2)$$

де e_i – головна деформація в напрямку головного напруження s_i , яку обчислюють згідно з узагальненим законом Гука. Наприклад, в напрямку s_1

$$e_1 = (s_1 - m(s_2 + s_3)) / E. \quad (3)$$

Тоді найбільше дійсне головне напруження, відповідно до (2) і (3),

$$s_1^* = s_1 - m(s_2 + s_3). \quad (4)$$

Для прикладу порівняємо ВНС і ДНС матеріалу в деякій точці поперечного перерізу стержня, що зазнає одновісного розтягу (рис. 1).

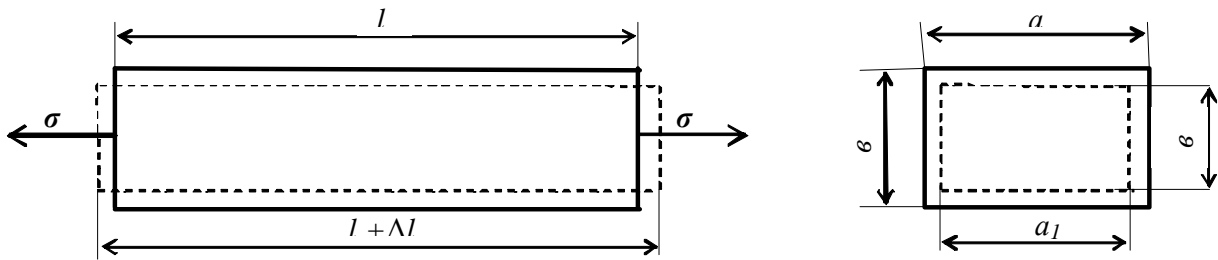


Рис. 1.

$$e = \Delta l / l. \quad e_n = \Delta a / a = \Delta b / b; \quad e_n = -me = -ms / E.$$

ВНС є лінійним (рис. 2, а). Головні напруження: $s_1 = s; \quad s_2 = s_3 = 0$.



Рис. 2: а – ВНС: $s_1 = s; \quad s_2 = s_3 = 0$.

б – ДНС: $s_1^* = s; \quad s_2^* = s_3^* = -ms$.

ДНС. Деформації в напрямку головних напружень ВНС складають:

$$e_1 = s / E; \quad e_2 = e_3 = -ms / E. \quad (5)$$

Головні напруження ДНС згідно із (2) і (5):

$$s_1^* = s; \quad s_2^* = s_3^* = -ms.$$

Отже лінійному ВНС відповідає об'ємний ДНС (рис. 2, б).

Результати дослідження залежності між параметрами ВНС і ДНС [3, с. 37].

- 1) Лінійний ДНС не можливий теоретично.
- 2) Здебільшого ДНС є об'ємним, за винятком чистого зсуву. Віртуальному чистому зсуву відповідає дійсний чистий зсув.

3) Між першими інваріантами тензорів напружень існує залежність:

$$I_1^* = (1 - 2m)I_1. \quad (6)$$

4) Напрямки екстремальних головних напружень ВНС і відповідного ДНС збігаються.

5) Величини не нулевих екстремальних головних напружень лінійного ВНС і відповідного об'ємного ДНС рівні.

6) При $I^* = I = 0$ між головними напруженнями ДНС і відповідними напруженнями ВНС існує залежність:

$$s_i^* = (1 + m)s_i \quad (i=1, 2, 3) \quad (7)$$

7) Між максимальними дотичними напруженнями співвідношення

$$t_{\max}^* = (1 + m)t_{\max} \quad (8)$$

справедливе завжди.

II. Прості опори

A. Визначення коефіцієнта запасу

Коефіцієнти запасу за простих опорів розтягу (стиску), згину і крученню, визначені з використанням компонентів віртуального і дійсного напружених станів (ВНС і ДНС), однакові, незалежно від характеру навантаження (статичне чи циклічне) [4, с. 14].

Б. Циклічне навантаження

1. Запропоновано модифікацію діаграми Кінасашвілі.

Р.С.Кінасашвілі запропонував (1944 р.) схематизувати діаграму граничних амплітуд напружень Хейя у разі пластичного матеріалу у вигляді двох відтинків BK і KD прямої (рис. 3) [5, с. 421].

Пряма KD проведена через т. D під кутом 45° до осі абсцис. Оскільки т. D зображає границю плинності S_m при розтязі, точки відтинку KD зображають граничні цикли з границею витривалості $S_R = S_m$.

Наприклад, промінь, проведений через т. M , що зображає робочий цикл напружень (S_a , S_{cp} – номінальні амплітудне і середнє напруження циклу відповідно; K_D – загальний коефіцієнт зниження межі витривалості деталі при симетричному циклі), перетинає граничну лінію діаграми BKD в т. N_m , що зображає граничний цикл, подібний до робочого циклу M . Границя витривалості

$$S_R = S_{cpR} + s_{aR} = \overline{ON'_m} + \overline{N'_m N'_m} = \overline{ON'_m} + \overline{N'_m D} = S_m.$$

Пряма BK проведена через точки B і C , які зображають границі витривалості S_{-1} і S_0 при симетричному і розтягуючому віднульовому циклах відповідно.

Модифікація полягає в заміні точки K точкою C .

Обґрунтування такої заміни. а) Т. C розмежовує граничні знакопостійні і знакозмінні цикли, які зображають точки відтинків CD і BC відповідно.

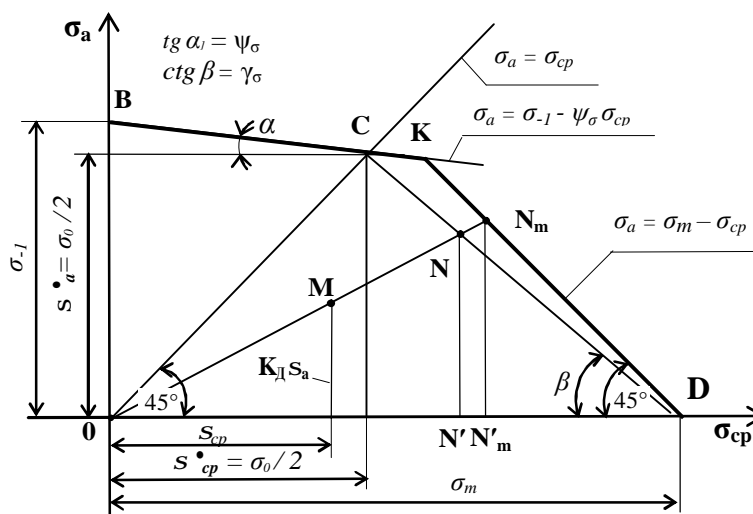


Рис. 3. Схематизовані діаграми граничних амплітуд напружень. Циклічний розтяг–стиск. BKD – діаграма Кінасашвілі, BCD – її модифікація. Сталь 20: $S_a=420$; $S_m=250$; $S_{-1}=120$ (с в МПа); $\gamma_s=0,104$; $g_s=1,300$

Зміна напрямку деформації при кожному знакозмінному циклі напружень різко зменшує опір матеріалу циклічному навантаженню.

б) Як свідчать дослідні дані, границя витривалості S_R матеріалу завжди менша граничного статичного напруження, в даному разі – границі плинності S_m .

З рис. 3 видно, що межа витривалості S'_R при робочому циклі M , визначена з використанням діаграми BCD , менша S_m :

$$(\overline{ON'} + \overline{NN'}) = S'_R < S_m = (\overline{ON'_m} + \overline{N'_m N'_m}),$$

оскільки кожна з координат т. N менша відповідних координат т. N_m .

Таким чином, діаграму Хейя доцільно схематизувати у вигляді двох відтинків BC і CD прямої.

Параметри $y_s = \operatorname{tg} a$ і $g_s = \operatorname{ctg} b$ діаграми BCD пов'язані співвідношенням [6, с. 234]:

$$g_s = \frac{S_m}{S_{-1}}(1 + y_s) - 1. \quad (9)$$

На нашу думку, коефіцієнти y_s і g_s із формули (9) можна трактувати як параметри, що характеризують опір матеріалу знакозмінним і знакопостійним циклам напружень відповідно.

2. Побудовано повну схематизовану діаграму граничних амплітуд напружень (рис. 4) [7, с. 25].

Діаграма дозволяє визначити коефіцієнт запасу графічним способом і вивести формули для його визначення аналітично при довільному коефіцієнті не симетрії циклу напружень [7, с. 26].

Виведено формули коефіцієнта запасу при циклах напружень з від'ємним середнім напруженням. Конструкція формули залежить від механічних характеристик матеріалу і параметрів циклу напружень [8, с. 16].

В. Статичне навантаження

1. Доведено неправомірність припущення про рівність граничних напружень конструкційних сталей при статичних деформаціях згину і розтягу [9, с. 19].

Аргумент 1-й. Межа витривалості конструкційних сталей при симетричному згині в середньому на 37 % вища порівняно з симетричним розтягом–стиском, $S_{-1z} / S_{-1p} = 1,37$ [10, с. 42]. Єдиним чинником, що може спричинити такий ефект, є градієнт напружень. При згині відносний градієнт напружень $h = d / 2$ (d – діаметр деталі). При розтязі–стиску $h = 0$. При статичному навантаженні вплив цього чинника аналогічний, як це видно на прикладі механічних характеристик крихких сірих чавунів марки СЧ і пластичних ковких чавунів марки КЧ, наведених в табл. 1 і 2 [11, с. 652].

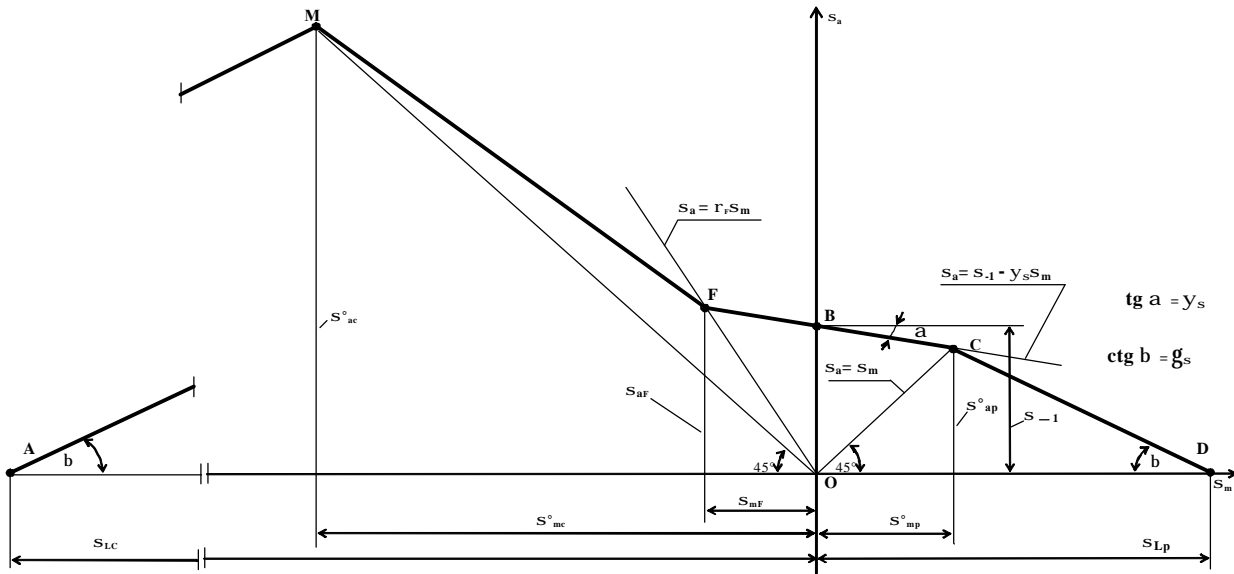


Рис. 4. Повна схематизована діаграма граничних амплітуд напружень

Аргумент 2-й. Використано суміщені схематизовані діаграми граничних амплітуд напружень (рис. 5): розтягу–стиску (BKD – діаграма Кінасошвілі і BCD – її схематизація, які зображені також на рис. 3, і модифікована діаграма B_1C_1D згину.

Діаграма B_1C_1D побудована за умови рівності границь плинності матеріалу при статичних згині і розтязі, $S_{mz} = S_{mp}$.

Параметри робочого циклу M при розтязі–стиску і згині однакові. Граничні цикли при використанні зазначених діаграм зображають точки N, N_m, N_1 .

Як відмічено вище, експериментально точка N_m , що зображає граничний цикл із $S_{\max} = S_R(N_m) = S_m$, не підтверджується: границя витривалості при циклічному навантаженні завжди менша границі плинності. Тим більше це стосується граничного циклу N_1 . З рис. 5 видно, що максимальне напруження цього циклу

$$S'_{\max} = S_R(N_1) = (\overline{ON'_1} + \overline{NN'_1}) > (\overline{ON'_m} + \overline{N_mN'_m}) = S_m.$$

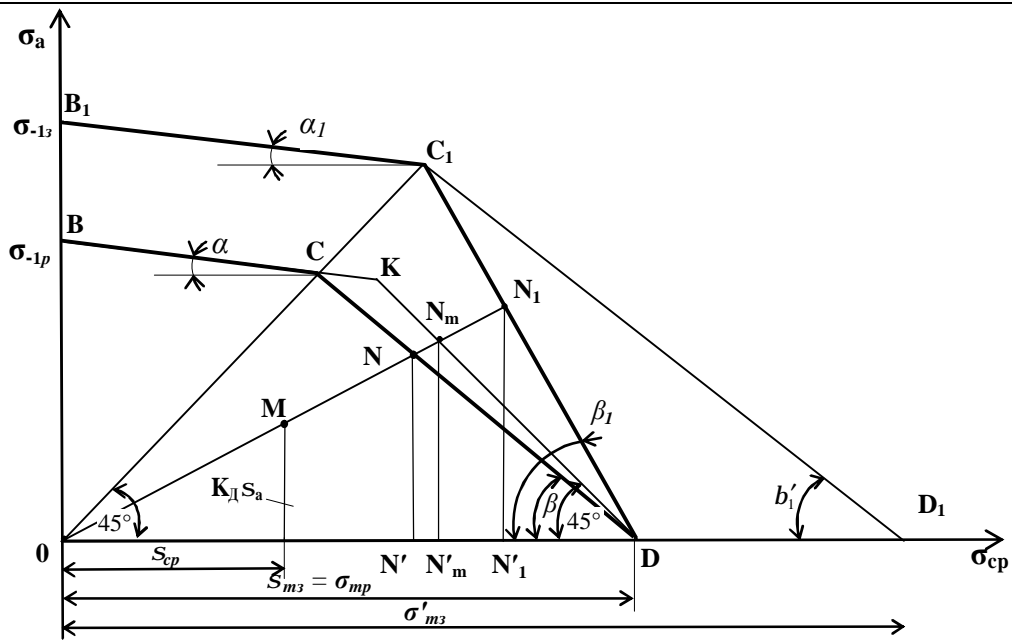


Рис. 5. Схематизовані діаграми граничних амплітуд напружень.
 Розтяг–стиск: BKD – діаграма Кінасошвілі, BCD – її модифікація.
 Згин: B_1C_1D – модифікована діаграма Кінасошвілі. Сталь 20: $S_{mp}=420$; $S_{mp}=250$;
 $S_{-1p}=120$; $S_{-1}=170$ (с в МПа); $y_s=tga=0,104$; $g_s=ctgb=1,300$; $g'_s=ctgb_1=0,624$.

Отже т. D не може зобразити границю плинності S_{mz} при згині.

2. Зроблено припущення про дійсну величину границі плинності S'_{mz} при згині.

Припущення базується на логічних посилках і експериментальних даних, викладених нижче.

а) Згідно із співвідношенням (9) між параметрами y_s і g_s модифікованої діаграми Кінасошвілі існує лінійна залежність. Оскільки при згині і розтязі–стиску коефіцієнти y_s рівні, то рівними повинні бути і коефіцієнти g_s . Тобто рівність кутів $a = a_1$ обумовлює рівність кутів $b = b_1$ (рис. 5). Отже $BC \parallel B_1C_1$ і $CD \parallel C_1D_1$, а $DOBC \sim DOB_1C_1$ і $DOCD \sim DOC_1D_1$. З подібності трикутників маємо:

$$\frac{OB_1}{OB} = \frac{OC_1}{OC} = \frac{OD_1}{OD} \Rightarrow \frac{OB_1}{OB} = \frac{OD_1}{OD} \Rightarrow \frac{S_{-13}}{S_{-1p}} = \frac{S'_{mz}}{S_{mp}} \quad (10)$$

б) Про високу ймовірність співвідношення (10) свідчать механічні характеристики сірих і ковких чавунів, наведені в таблицях 1 і 2.

У разі крихких сірих чавунів відношення середніх значень величин S_{-13}/S_{-1p} і S_{mz}/S_{mp} складає $2,08/1,75 = 1,19$ рази. У разі пластичних ковких чавунів відношення величини S_{-13}/S_{-1p} до величини S_{mz}/S_{mp} складає $1,70/1,57 = 1,08$ рази.

Можна сподіватись, що у разі більш пластичних конструкційних сталей (порівняно з ковкими чавунами) вказане відношення буде меншим 1,08.

Таблиця 1

Механічні характеристики сірих чавунів

Марка	S_{mp}	S_{mz}	S_{-1p}	S_{-13}	$\frac{S_{mz}}{S_{mp}}$	$\frac{S_{-13}}{S_{-1p}}$
	МПа					
СЧ 18–36	180	360	35	90	2,00	2,57
СЧ 24–44	240	440	65	120	1,83	1,85
СЧ 28–48	280	480	75	150	1,71	2,00
СЧ 32–52	320	520	70	140	1,63	2,00
СЧ 35–56	350	560	75	150	1,60	2,00
Ср.					1,75	2,08

Механічні характеристики ковких чавунів

Марка	S_{mp}	S_{m3}	S_{mp}	S_{m3}	S_{-1p}	S_{-13}	$\frac{S_{m3}}{S_{mp}}$	$\frac{S_{m3}}{S_{mp}}$	$\frac{S_{-13}}{S_{-1p}}$
	МПа						S_{mp}	S_{mp}	S_{-1p}
КЧ 30–6	300	490	190	310	70	120	1,63	1,63	1,71
КЧ 33–8	330	530	210	330	80	130	1,61	1,57	1,63
КЧ 35–10	350	570	220	340	80	140	1,63	1,55	1,75
КЧ 37–12	370	580	230	350	80	140	1,57	1,52	1,75
КЧ 50–4	500	720	270	420	110	180	1,44	1,56	1,64
Ср.							1,58	1,57	1,70

III. Складні опори

Складний опір можна представити як сукупність двох або більше простих опорів.

Варіантів співвідношень напружень, спричинених в небезпечній точці деталі навіть двома простими опорами, може бути безліч. Визначати при кожному співвідношенні напружень граничний напружений стан матеріалу і коефіцієнт запасу дослідним шляхом нереально.

Тому використовують фундаментальне припущення про існування механічної величини (фактора), що має переважний вплив на міцність матеріалу. Такий фактор може слугувати критерієм міцності. На використанні цього припущення базуються сучасні гіпотези (теорії) міцності.

1. Вибір критеріїв міцності

Академік АН УРСР М.М.Давиденков прийшов до висновку, що руйнування металу може відбуватися двома способами: шляхом відриву або шляхом зсуву ("зрізу").

При першому способі поверхня зламу збігається з площиною найбільших нормальних розтягуючих напружень, при другому – з площиною найбільших дотичних напружень [12, с. 320].

Вибір критерію міцності залежно від способу руйнування і виду напруженого стану.

1) Руйнування відривом. Згідно із (2)

$$S_{\max}^* = E e_{\max} \quad (11)$$

де S_{\max}^* і e_{\max} – найбільші дійсне нормальне напруження і додатна лінійна деформація (ДЛД) відповідно.

Як видно із лінійної залежності (11), критерієм міцності може бути кожна з цих величин. Оскільки визначити S_{\max}^* без обчислення e_{\max} не можна, то за критерій доцільно обрати ДЛД.

2) Руйнування зсувом. Згідно із законом Гука для зсуву

$$t_{\max}^* = G g_{\max}^* \quad (12)$$

де t_{\max}^* і g_{\max}^* – найбільші дійсні дотичне напруження і кут зсуву відповідно.

В цьому разі первинною величиною (відносно g_{\max}^*) є t_{\max}^* . Тому за критерій міцності доцільно обрати найбільше дотичне напруження. Але не дійсне, а віртуальне. Між ними, згідно з (8), існує лінійна залежність

$$t_{\max}^* = (1 + m)t_{\max} \quad (13)$$

3) Лінійний напружений стан. За допомогою критеріїв міцності e_{\max} і t_{\max} можна оцінити міцність деталі за довільного напруженого стану.

Проте при лінійному напруженому стані є більш ефективний критерій – найбільше нормальне напруження S_{\max} . В цьому разі від S_{\max} лінійно залежать як найбільша лінійна деформація e_{\max} , так і найбільше дотичне напруження t_{\max} :

$$e = S / E; \quad (13)$$

$$t_{\max} = S / 2. \quad (14)$$

2. Гіпотези міцності

Формулювання гіпотез згідно з вибраним критерієм міцності.

Гіпотеза найбільшого нормального напруження. Руйнування матеріалу за складного опору, що спричиняє лінійний напружений стан, настає при досягненні найбільшим нормальним напруженням граничного значення.

Гіпотеза найбільшого дотичного напруження. Руйнування матеріалу в пластичному стані за складного опору, що спричиняє складний напружений стан, настає при досягненні найбільшим дотичним напруженням граничного значення.

Гіпотеза найбільшої додатної лінійної деформації. Руйнування матеріалу в крихкому стані за

складного опору, що спричиняє складний напружений стан, настає при досягненні найбільшою додатною лінійною деформацією граничного значення.

Граничне значення критерію міцності при складному опорі залежить від граничного і максимального значень критерію за кожного з простих опорів, що є компонентами складного опору.

Як показано в [10, с. 42], використання припущення про незмінність граничного значення критерію міцності при різних напружених станах може бути основною причиною (або однією з основних причин) розбіжності дослідних даних і результатів розрахунків, виконаних з використанням гіпотези міцності. Наприклад, при складному опорі у вигляді згину з крученням відносна похибка складає щонайменше 58 % у разі статичного навантаження деталі з крихкого матеріалу (сірого чавуну марки СЧ) при використанні критерію найбільшої додаткової лінійної деформації і 37 % – у разі циклічного навантаження деталі з пластичного матеріалу (конструкційної сталі) при використанні критерію найбільшого дотичного напруження.

3. Виведення формул коефіцієнта запасу

А. Графо-аналітичний спосіб.

Коефіцієнт запасу визначають за формулою:

$$n = K_L / K, \quad (15)$$

де K_L і K – максимальні значення критерію міцності в небезпечній точці деталі за подібних граничного і робочого напружених станів відповідно.

Напружені стани при складних опорах подібні, якщо однакові:

1) компоненти (прості опори) складних опорів;

2) співвідношення між максимальними напруженнями в небезпечній точці, що спричинені простими опорами [13, с. 173].

Виведення формул коефіцієнта запасу при використанні критеріїв найбільшого нормального і дотичного напружень.

1. В системі прямокутних координат будують діаграму граничних значень K_L критерію. Компонентами складного опору є два прості опори статичному навантаженню.

Гранична лінія діаграми з'єднує точки на координатних осях, які зображають граничні значення критерію за простих опорів.

Площа діаграми, обмежена осями координат і граничною лінією, є геометричним місцем точок, що зображають безпечні значення критерію міцності (за винятком точок граничної лінії).

2. Будують робочу точку. Її координати – максимальні значення K критерію в небезпечній точці за простих опорів.

3. Записують вираз (формулу) максимального значення K в робочій точці.

4. З початку координат через робочу точку проводять промінь до перетину з граничною лінією.

Точка перетину зображає граничне значення K_L критерію.

5. Визначають координати точки, що зображає K_L , розв'язавши сумісно рівняння граничної лінії і прямої, що проходить через початок координат і робочу точку.

6. Обчислюють граничне значення K_L .

7. Підставивши значення K_L і K у (15), отримують формулу коефіцієнта запасу.

1. Критерій найбільшого нормального напруження

Виведення формули коефіцієнта запасу згідно з викладеною вище методикою дано в [14, с. 39].

Вихідні дані: s' , s'' – максимальні нормальні напруження в небезпечній точці, спричинені простими статичними деформаціями згину і розтягу відповідно.

1. Діаграма граничних значень критерію зображена на рис. 6.

2. Координати робочої точки $M(s'; s'')$ – максимальні нормальні напруження в небезпечній точці деталі, що відповідають простим опорам згину (s') і розтягу (s'').

3. Максимальне значення K критерію (найбільше нормальне напруження S):

$$K = S = s' + s''. \quad (16)$$

4. Граничне значення K_L критерію зображає т. $N(s'_{гр}; s''_{гр})$.

5. Визначення $s'_{гр}$ і $s''_{гр}$:

$$\left. \begin{array}{l} y = kx \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow x = s'_{гр} = \frac{ab}{b + ka}; \quad y = s''_{гр} = \frac{kab}{b + ka}. \quad (17)$$

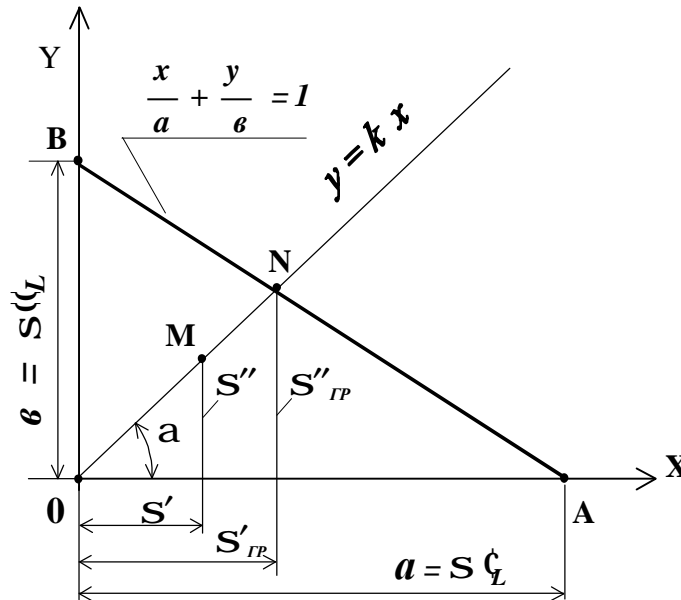


Рис. 6. Діаграма граничних нормальних напружень: точки A і B зображують граничні значення критерію за простих опорів згину і розтягу; т. M і N – значення критерію за подібних робочого і граничного напружених станів відповідно; $\operatorname{tg} a = s''/s' = k$

6. Обчислення граничного значення критерію:

$$K_L = s_L = s'_{гр} + s''_{гр} \Rightarrow K_L = \frac{s''_L(1+k)}{s''_L/s'_L + k} \text{ або } K_L = \frac{s'_L(1+k)}{b/a + k}. \quad (18)$$

7. Згідно із (15), (16), (18) отримують формулу коефіцієнта запасу:

$$n = \frac{K_L}{K} = \frac{s_L}{s} = \frac{s''_L(1+k)}{(s''_L/s'_L + k)s'(1+k)} = \frac{1}{\frac{s'}{s'_L} + \frac{s''}{s'_L}} = \frac{1}{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \Rightarrow$$

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}. \quad (19)$$

У формулі (19) n_1, n_2 – частинні коефіцієнти запасу.

$$n_1 = s'_L/s'; \quad n_2 = s''_L/s''. \quad (20)$$

Тобто для визначення коефіцієнта запасу при складному опорі, що спричиняє в небезпечній точці деталі лінійний напружений стан, потрібно обчислити за формулами (20) частинні коефіцієнти запасу n_1 і n_2 при кожному з простих опорів, що є компонентами складного опорю, і підставити їх значення у (19).

За наявності трьох простих опорів формула коефіцієнта запасу набуває вигляду:

$$n = \frac{n_1 n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1}. \quad (21)$$

2. Критерій найбільшого дотичного напруження

Виведення формули коефіцієнта запасу дано в [15, с. 25].

Вихідні дані:

а) матеріал круглого стержня перебуває в пластичному стані;

б) t', t'' – максимальні дотичні напруження в небезпечній точці деталі, спричинені простими статичними деформаціями кручення і згину відповідно.

1. Діаграма граничних значень критерію зображена на рис. 7.

Гранична лінія діаграми має форму еліпса. Такий висновок можна зробити на підставі результатів дослідження циклічної міцності матеріалів у пластичному стані (конструкційних сталей) в умовах складного опорю у вигляді згину з крученням.

2. Координати робочої точки $M(t'; t'')$ – максимальні дотичні напруження в небезпечній точці деталі, що відповідають простим опорам крученню (t') і згину (t'').

3. Через те, що матеріал в небезпечній точці знаходиться в спрощеному плоскому напруженому стані, максимальне значення K критерію (найбільше дотичне напруження t_{\max})

$$K = t_{\max} = \sqrt{(s/2)^2 + t^2}, \quad (22)$$

де $(s/2) = t''$; $t = t'$.

4. Граничне значення K_L критерію зображає т. $N (t'_{гр}; t''_{гр})$.

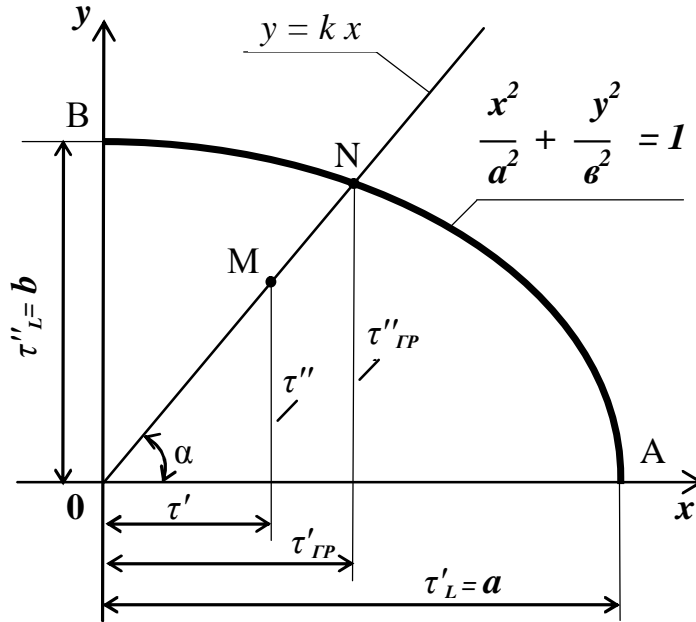


Рис. 7. Діаграма граничних дотичних напружень: точки А і В зображають граничні значення критерію за простих опорів крученню і згину відповідно; т. М і N – значення критерію за подібних робочого і граничного напружених станів відповідно; $tga = t'' / t' = k$

5. Визначення $t'_{гр}$ і $t''_{гр}$:

$$\left. \begin{aligned} y &= kx \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 = (t'_{гр})^2 = a^2 b^2 / (b^2 + k^2 a^2); \quad y^2 = (t''_{гр})^2 = k^2 a^2 b^2 / (b^2 + k^2 a^2). \quad (23)$$

6. Обчислення граничного значення критерію:

$$K_L = t_L = \sqrt{(s_{сп}/2)^2 + t_{сп}^2} \Rightarrow t_L = \frac{s_L t_{LK} \sqrt{1 + (s/2t)^2}}{\sqrt{s_L^2 + (s/t)^2 t_{LK}^2}}, \quad (24)$$

де s_L, t_{LK} – граничні нормальне напруження при згині і дотичне напруження при крученні відповідно.

7. Згідно із (15), (22), (24) отримують формулу коефіцієнта запасу:

$$n = \frac{K_L}{K} = \frac{t_L}{t_{\max}} = \frac{s_L t_{LK} \sqrt{1 + (s/2t)^2}}{\sqrt{s_L^2 + (s/t)^2 t_{LK}^2}} \cdot \frac{1}{t \sqrt{1 + (s/2t)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{t}{t_{LK}}\right)^2 + \left(\frac{s}{s_L}\right)^2}} \Rightarrow$$

$$n = \frac{n_s n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}} \quad (25)$$

У формулі (25) n_s і n_t – частинні коефіцієнти запасу по нормальному і дотичному напруженнях відповідно.

$$n_s = s_L / s; \quad n_t = t_{LK} / t. \quad (26)$$

За наявності простих деформацій згину, розтягу і кручення частинний коефіцієнт запасу по

нормальному напруженню обчислюють за формулою

$$n_s = \frac{n_p n_3}{n_p + n_3}, \quad (27)$$

де n_p, n_3 – частинні коефіцієнти запасу при розтязі і згині відповідно:

$$n_p = S_{mp} / S_p; \quad n_3 = S_{m3} / S_3. \quad (28)$$

На підставі визначення коефіцієнтів запасу з використанням критеріїв найбільших нормального і дотичного напружень можна зробити висновок, що при порівнянні подібних граничного і робочого напружених станів отримуємо результат, тобто коефіцієнт запасу n , у вигляді функції частинних коефіцієнтів запасу n_i :

$$n = f(n_i), \quad (29)$$

де n_i – частинний коефіцієнт запасу за простого опору, що є компонентом складного опору.

Таким чином, визначення коефіцієнта запасу за складного опору зводиться до визначення коефіцієнтів запасу за простих опорів.

3. Критерій найбільшої додатної лінійної деформації

При виведенні формули коефіцієнта запасу використано отримані вище формули коефіцієнтів запасу за використання критеріїв найбільших нормального і дотичного напружень.

Вихідні дані:

а) матеріал круглого стержня перебуває в крихкому стані;

б) S і t – найбільші нормальне і дотичне напруження в небезпечній точці, спричинені простими статичними деформаціями згину (або розтягу) і кручення відповідно.

У разі використання критерію найбільшої додатної лінійної деформації (e_{\max}) максимальне значення критерію при спрощеному плоскому напруженому стані обчислюють за формулою:

$$K = e_{\max} = (1 - m)S / 2E + (1 + m)\sqrt{(S / 2)^2 + t^2} / E. \quad (30)$$

Введемо позначення:

$$e_{\max} = e_I + e_{II}. \quad (31)$$

$$e_I = (1 - m)S / 2E; \quad (32)$$

$$e_{II} = (1 + m)\sqrt{(S / 2)^2 + t^2} / E \Rightarrow$$

$$e_{II} = \sqrt{\left(\frac{1 + m}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{S}{E}\right)^2 + \left(\frac{(1 + m)t}{E}\right)^2}. \quad (33)$$

За аналогією з формулою (19) коефіцієнта запасу при використанні критерію найбільшого нормального напруження можна записати:

$$n = \frac{n_I n_{II}}{n_I + n_{II}}. \quad (34)$$

Обчислення частинних коефіцієнтів запасу.

$$n_I = \frac{e_{LS}}{e_I} = \frac{S_L / E}{(1 - m)S / 2E} \Rightarrow$$

$$n_I = \frac{2}{1 - m} n_s. \quad (35)$$

За аналогією з формулою (25) коефіцієнта запасу при використанні критерію найбільшого дотичного напруження можна записати:

$$\frac{1}{n_{II}} = \sqrt{\frac{1}{n_{es}^2} + \frac{1}{n_{et}^2}}. \quad (36)$$

$$n_{es} = \frac{e_{LS}}{e_s} = \frac{S_L / E}{\left(\frac{1 + m}{2}\right) S / E} \Rightarrow$$

$$n_{es} = \frac{2}{1 + m} n_s. \quad (37)$$

$$n_{et} = \frac{e_{Lt}}{e_t} = \frac{(1+m)t_L/E}{(1+m)t/E} \Rightarrow n_{et} = n_t. \quad (38)$$

$$\text{Із (36)...(38)} \Rightarrow \frac{1}{n_{II}} = \sqrt{\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{n_s^2} + \frac{1}{n_t^2}} = \sqrt{\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 \cdot n_t^2 + n_s^2} / n_s n_t \Rightarrow n_{II} = n_s n_t / \sqrt{\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 \cdot n_t^2 + n_s^2}. \quad (39)$$

$$\text{Із (34), (35), (39)} \Rightarrow n = \frac{n_I n_{II}}{n_I + n_{II}} \Rightarrow n = \frac{n_s n_t}{(1-m)n_t/2 + \sqrt{n_s^2 + (1+m)^2(n_t/2)^2}}, \quad (40)$$

де n_s, n_t – коефіцієнти запасу за простих опорів по нормальному і дотичному напруженнях відповідно.

Б. Аналітичний спосіб визначення коефіцієнта запасу

1) Основні поняття і терміни

Спосіб базується на понятті "використана опірність матеріалу руйнуванню".

Означення. Використана опірність матеріалу руйнуванню (ВОМР) є число, що дорівнює відношенню максимальних значень критерію міцності в небезпечній точці за подібних робочого і граничного напружених станів:

$$w = K / K_L. \quad (41)$$

Гранична ВОМР матеріалу за довільного опору (простий чи складний) дорівнює одиниці:

$$w_L = 1. \quad (42)$$

Коефіцієнт запасу обчислюють за формулою (15):

$$n = K_L / K.$$

Як видно із (15) і (41), між величинами w і n існує обернена пропорційна залежність:

$$n = 1/w. \quad (43)$$

Таким чином, обчисливши величину w , можна визначити коефіцієнт запасу n .

ВОМР за складного опору залежить від ВОМР за кожного із простих опорів

$$w = f(w_i) \quad i = (1, 2, \dots, m), \quad (44)$$

де m – число простих опорів.

Конкретна форма співвідношення (44) залежить від природи критерію міцності і компонентів складного опору.

Величину w_i названо "частинною ВОМР", за аналогією з поняттям "частинний коефіцієнт запасу" n_i .

Частинну ВОМР, відповідно до (41), можна обчислити за формулою:

$$w_i = K_i / K_{Li}, \quad (45)$$

де K_i, K_{Li} – максимальне і граничне значення критерію міцності за простого опору відповідно.

Згідно із (43)

$$w_i = 1/n_i. \quad (46)$$

Поняття "ВОМР" можна використати як для безпосереднього визначення коефіцієнта запасу за формулою (43), так і для виведення формули коефіцієнта запасу, складниками якої є частинні коефіцієнти запасу.

2) Методика. За складного опору структура формул опірності w і максимального значення критерію міцності K однакова. Вона залежить від природи критерію та виду і кількості простих опорів.

Послідовність дій при визначенні коефіцієнта запасу і виведенні його формули.

Визначення коефіцієнта запасу:

а) запис формули K ;

б) запис формули w ;

в) обчислення частинних w_i з використанням формули (45) у разі статичного простого опору і (46)

– у разі циклічного;

- г) обчислення W згідно із (44);
 д) визначення коефіцієнта запасу за формулою (43);

Виведення формули коефіцієнта запасу:

- а) запис формули K ;
 б) запис формули W ;
 в) запис співвідношення (44) у вигляді

$$\frac{1}{n} = f\left(\frac{1}{n_i}\right), \quad (47)$$

згідно з формулами (43), (45), (46);

г) запис формули коефіцієнта запасу, після виконання необхідних перетворень співвідношення (47), у вигляді:

$$n = f(n_i). \quad (48)$$

3) Виведення формул коефіцієнта запасу при використанні різних критеріїв міцності

Діємо за складеною вище методикою.

1. Критерій найбільшого нормального напруження

Критерій використовують у разі лінійного напруженого стану, який спричиняє сумісна дія простих опорів розтягу (стиску) і згину.

Вихідні дані. Статичне навантаження спричиняє в небезпечній точці деталі додатні нормальні напруження розтягу і згину, S_p і S_z відповідно.

Виведення формули.

- а) Запис формули максимального значення критерію:

$$K = S_{\max} = S_p + S_z. \quad (49)$$

- б) Запис формули W згідно із (44) і (49):

$$W = W_p + W_z, \quad (50)$$

де W_p і W_z – частинні ВОМР нормальним напруженням S_p і S_z відповідно.

- в) Запис співвідношення (44) у вигляді (47), згідно з (43) і (46)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &= \frac{1}{n_p} + \frac{1}{n_z} = \frac{n_p + n_z}{n_p \cdot n_z} \Rightarrow \\ n &= \frac{n_p \cdot n_z}{n_p + n_z}, \end{aligned} \quad (51)$$

де n_p , n_z – частинні коефіцієнти запасу.

$$n_p = S_{Lp} / S_p, \quad (52)$$

$$n_z = S_{Lz} / S_z. \quad (53)$$

Замінивши індекси у (51), отримаємо формулу (19):

$$n = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2},$$

де n_1 , n_2 – частинні коефіцієнти запасу за простих опорів, що спричиняють лінійний напружений стан.

За трьох простих опорів формула (50) набуде вигляду:

$$W = W_1 + W_2 + W_3, \quad (54)$$

а формула коефіцієнта запасу

$$n = \frac{n_1 n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_2 n_3 + n_3 n_1}.$$

Тобто отримаємо формулу (21).

При числі простих опорів $i > 3$ формула коефіцієнта запасу, складниками якої є частинні коефіцієнти n_i , стає досить громіздкою. Тому доцільно використати формулу (43):

$$n = 1 / w,$$

де

$$w = \sum w_i \quad i = (4, 5, \dots, m). \quad (55)$$

2. Критерій найбільшого дотичного напруження

Критерій використовують у разі складного напруженого стану і пластичного стану матеріалу.

Вихідні дані. В небезпечній точці сталевого стержня з конструкційної сталі діють нормальне напруження S і дотичне t , спричинені статичними згином і крученням відповідно.

Виведення формули. При згині з крученням матеріал в небезпечній точці перебуває в умовах спрощеного плоского напруженого стану.

а) Запис формули максимального значення критерію:

$$K = t_{\max} = \sqrt{(S/2)^2 + t^2}, \quad (56)$$

де $S/2, t$ – дотичні напруження в небезпечній точці, спричинені згином і крученням відповідно.

б) Запис формули ВОМР відповідно до (44) і (56):

$$w = \sqrt{w_s^2 + w_k^2}, \quad (57)$$

де w_s, w_k – частинні ВОМР дотичним напруженням, спричиненим згином і крученням відповідно.

$$w_s = \frac{t_s}{t_{Ls}} = \frac{S/2}{S_L/2} \Rightarrow w_s = S/S_L. \quad (58)$$

$$w_k = \frac{t_k}{t_{Lk}} \Rightarrow w_k = t/t_L. \quad (59)$$

в) Запис формули (57) у вигляді співвідношення (47), з врахуванням (43) і (46):

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\left(\frac{1}{n_s}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{n_s^2 + n_t^2}{n_s^2 \cdot n_t^2}}.$$

г) Після нескладних перетворень отримаємо формулу (25):

$$n = \frac{n_s n_t}{\sqrt{n_s^2 + n_t^2}},$$

де n_s, n_t – частинні коефіцієнти запасу по нормальному і дотичному напруженням відповідно.

$$n_s = S_L/S; n_t = t_L/t. \quad (60)$$

3. Критерій найбільшої додатної лінійної деформації (ДЛД)

Критерій використовують у разі складного напруженого стану і крихкого стану матеріалу.

Вихідні дані. В небезпечній точці стержня із матеріалу в крихкому стані діють нормальне напруження S і дотичне t , спричинені статичними згином і крученням відповідно.

Виведення формули.

а) Запис формули максимального значення критерію.

$$K = e_{\max} = e_1 = (S_1 - m(S_2 + S_3))/E, \quad (61)$$

де $S_1 \geq S_2 \geq S_3$ – головні напруження при спрощеному плоскому напруженому стані; m – коефіцієнт Пуассона; E – модуль поздовжньої пружності.

Із (61) отримаємо:

$$K = e_{\max} = \frac{1-m}{2} \left(\frac{S}{E} \right) + \sqrt{\left(\frac{1+m}{2} \right)^2 \left(\frac{S}{E} \right)^2 + \left(\frac{(1+m)t}{E} \right)^2}, \quad (62)$$

де

$$S/E = e_s;$$

$$(1+m)t/E = e_t$$

– прості лінійні деформації, спричинені згином і крученням відповідно.

б) Запис формули ВОМР відповідно до (44) і (62):

$$w = \frac{1-m}{2} w_s + \sqrt{\left(\frac{1+m}{2} \right)^2 w_s^2 + w_t^2}, \quad (63)$$

де w_s і w_t – частинні ВОМР додатним лінійним деформаціям, спричиненим в небезпечній точці згином і крученням відповідно.

$$w_s = \frac{e_s}{e_{Ls}} = \frac{S/E}{S_L/E} \Rightarrow$$

$$w_s = S/S_L; \quad (64)$$

$$w_t = \frac{e_t}{e_{Lt}} = \frac{(1+m)t/E}{(1+m)t_L/E} \Rightarrow$$

$$w_t = t/t_L. \quad (65)$$

У формулах (64) і (65) величини S_L і t_L – граничні значення нормального і дотичного напружень відповідно.

в) Запис формули (63) у вигляді співвідношення (47), з врахуванням (43) і (46):

$$\frac{1}{n} = \frac{1-m}{2} \cdot \frac{1}{n_s} + \sqrt{\left(\frac{1+m}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{n_s}\right)^2 + \left(\frac{1}{n_t}\right)^2} =$$

$$= \frac{1-m}{2n_s} + \sqrt{\frac{(1+m)^2 n_t^2 + 4n_s^2}{4n_s^2 n_t^2}} = \frac{(1-m)n_t + \sqrt{4n_s^2 + (1+m)^2 n_t^2}}{2n_s n_t}.$$

Після нескладних перетворень отримаємо формулу (40):

$$n = \frac{n_s n_t}{(1-m)n_t/2 + \sqrt{n_s^2 + (1+m)^2 (n_t/2)^2}},$$

де n_s , n_t – частинні коефіцієнти запасу по нормальному і дотичному напруженнях відповідно.

$$n_s = S_L/S; \quad (66)$$

$$n_t = t_L/t. \quad (67)$$

ВИСНОВКИ

1. Потрібно розрізняти віртуальний і дійсний напружені стани (ВНС і ДНС).
2. Коефіцієнти запасу за простих опорів, визначені з використанням параметрів ВНС і ДНС, рівні.
3. Розроблено методику побудови повної схематизованої діаграми граничних амплітуд напружень, що дозволяє визначити коефіцієнт запасу за довільного коефіцієнта не симетрії циклу напружень.
4. Показано неправомірність використання припущення про рівність граничних напружень при згині і розтязі матеріалу в пластичному стані, що дозволяє більш раціональне використання матеріалу.
5. Показано, що основною причиною розбіжності результатів експерименту і розрахунків, виконаних із застосуванням гіпотези міцності, є використання припущення про незмінність граничного значення критерію міцності при різних напружених станах.
6. Коефіцієнт запасу потрібно визначати як відношення значень критерію міцності за подібних граничного і робочого напружених станів.
7. Сформульовано ознаки подібності напружених станів при складних опорах.
8. Запропоновано три гіпотези міцності, залежно від виду напруженого стану і стану матеріалу (пластичний чи крихкий).
9. Виведено формули коефіцієнта запасу для спрощеного плоского напруженого стану.
10. Коефіцієнти запасу, визначені за умови використання подібних граничного і робочого напружених станів, є функціями коефіцієнтів запасу за простих опорів, що є компонентами складного опору.
11. Запропоновано спосіб визначення коефіцієнта запасу з використанням поняття «використана опірність матеріалу руйнуванню» (ВОМР).
12. Використання способу ВОМР дозволяє розв'язати задачу розрахунку на міцність методами опору матеріалів в загальній постановці, тобто при довільних характері навантаження і стані матеріалу.

Література

1. Писаренко Г.С. Опір матеріалів : [підручник] / Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. – К. : Вища шк., 1993. – 655 с.
2. Трошенко В.Т. Сопротивление усталости металлов и сплавов : [справочник] : ч. 1 / В.Т. Трошенко, Л.А. Сосновский. – К. : Наукова думка, 1987. – 504 с.
3. Павлов В.С. Про види напруженого стану / В.С. Павлов, В.І. Євдокименко // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2010. – № 3. – С. 32–37.
4. Павлов В.С. Визначення коефіцієнта запасу за простих опорів / В.С. Павлов // Вісник ХНУ.

Технічні науки. – 2010. – № 4. – С. 11–14.

5. Корнілов О.А. Опір матеріалів : [підручник] / Корнілов О.А. – К. : ЛОГОС, 2002. – 562 с.
6. Ковтун В.В. Опір матеріалів. Розрахункові роботи : [навч. посібник] / Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. – Львів : Афіша, 2002. – 280 с.
7. Павлов В.С. Повна схематизована діаграма граничних амплітуд напружень / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2009. – № 2. – С. 25–30.
8. Павлов В.С. Виведення формул коефіцієнта запасу при циклах нормальних напружень з від'ємним середнім напруженням / В.С. Павлов, В.І. Євдокименко // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2009. – № 3. – С. 16–25.
9. Павлов В.С. Граничні напруження при згині / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2011. – № 2. – С. 19–25.
10. Павлов В.С. Визначення чинників, що впливають на граничне значення критерію міцності / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2008. – № 1. – С. 37–43.
11. Писаренко Г.С. Справочник по сопроотивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. – К. : Наукова думка, 1988. – 736 с.
12. Давиденков Н.Н. Избранные труды : в 2 т. Т. 1: Динамическая прочность и хрупкость металлов / Давиденков Н.Н. – К. : Наукова думка, 1981. – 704 с.
13. Павлов В.С. Вибір критерію міцності в машинобудуванні / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2006. – № 6. – С. 172–176.
14. Павлов В.С. Визначення коефіцієнта запасу міцності при використанні критерію найбільшого нормального напруження / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2008. – № 3. – С. 39–43.
15. Павлов В.С. Визначення коефіцієнта запасу при використанні критерію найбільшого дотичного напруження / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2010. – № 1. – С. 25–31.
16. Павлов В.С. Визначення коефіцієнта запасу при використанні критерію найбільшої додатної лінійної деформації / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2010. – № 2. – С. 34–40.
17. Павлов В.С. Спосіб визначення коефіцієнта запасу при складному опорі / В.С. Павлов // Вісник ХНУ. Технічні науки. – 2011. – № 1. – С. 26–31.

Надійшла 8.12.2011 р.