призначення для процесів механічної обробки металів / В.І. Кириченко, В.П. Свідерський ; заявл. 16.07.2003 ; опубл. 15.11.2004, Бюл. № 11, 2004.

6. Пат. 65014, Україна, 2006. С10М115/00, С10М101/04, С10129/08, С10М137/00. – Мастильна композиція «Глірапсол-nS-MAPN» / В.І. Кириченко, В.П. Свідерський ; заявл. 24.04.2003 ; опубл. 15.09.2006, Бюл. № 9, 2006.

7. Пат. №84484. Україна, МПХ С10М177/00, 105/00; С07С67/00; С11С3/00. – Спосіб одержання базових для галузі ММ біосинтетичних олив/ В.В. Кириченко, В.І. Кириченко ; заявл. 15.02.2007. опубл. 27.10.2008. Бюл. № 20 2008.

8. Пат. №91623. Україна, МПХ С10М177/00, 111/00,141/00; С07С67/00, 31900. – Спосіб одержання базових для галузі ММ біосинтетичних олив – присадок./В. В. Кириченко, В.І. Кириченко ; заявл. 24.12.2008. опубл. 25.06.2010. Бюл. №12, 2010.

9. Ребиндер П.А., Венстрем Е.К. Влияние среды и адсорбционных слоев на пластическое течение маталлов / П.А. Ребиндер, Е.К. Венстрем. – М. : Наука, 1979. – С. 154–169.

10. Смазочно-охлаждающие технологические средства для обработки металлов / [Энтелис С.Г., Берлинер Э.М., Горлевский В.А. и др.]. – М. : Машиностроение, 1995. – 496 с.

11. Stephina Vaclav. Lubricants and special fluids / V.Stephina. V. Vesely. – Amsterdam. London. New York. Tokio. 1992.–700p.

12. Lubricants and lubrication. – 2nd Ed/ Edited by TR. Mang and W. Dresel. – WILEY – VCH Verlag Gmbh. Weinheim. 2006. – 586 p.

13. Mortier R. M. Chemistry and technology of Lubrication / R. M. Mortier. S. T. Orzulik. – Eds. Blackie and Son Ltd.. Glasgow. 1997. – 610 p.

14. Rudnick L. R. Lubricant Additives: chemistry and application / L.R. Rudnick – Ed. Marsel Dekker. – New York. 2003. – 550 p.

15. Rudnick L. R. Syntethics, Mineral Oils and Bio-Based Fluids / L. R. Rudnick. – Ed Marsel Dekker. – New York. 2005. – 680 p.

Статтю представив: к.т.н. Кириченко В.І.
Надійшла 20.2.2012 р.

УДК 519.832.3+519.711.2

В.В. РОМАНЮК
Хмельницкий национальный университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КВАЗИРАВНОВЕРОЯТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ КОНТИНУУМА ОПТИМАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ В СТРОГОЙ ЗАДАЧЕ УСТРАНЕНИЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ТРЁХМОДЕЛЬНОЙ $\{2\varepsilon, 3\varepsilon\}$-НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ ПО ПРИНЦИПУ ГАРАНТИРОВАНО МИНИМАЛЬНЫХ АБСОЛЮТНЫХ ОТКЛОНЕНИЙ

Решается строгая задача устранения однопараметрической трёхмодельной неопределённости, где отклонения второго и третьего модельных значений относительно первого оказались в соотношении 2:3. Цель определения квазиравновероятного распределения из континуума оптимальных стратегий второго игрока в игровой антагонистической модели такого устранения может быть достигнута либо с помощью метода наименьших квадратов, либо на основе выбора наименьшего максимального отношения. Показывается приемлемость именно первого принципа, что может использоваться в устранении любых неопределённостей с тремя зафиксированными значениями.

There is solved the strict problem of removing single-parameter three-model uncertainty, where deviations of the second and third model values relative to the first appeared at a ratio of 2:3. The purpose of determining quasiuniform distribution from the continuum of the second player optimal strategies in the gaming antagonistic model of such removal can be achieved either with the least-squares method or on the basis of selecting the least maximal ratio. There is demonstrated acceptability of just the first principle, what may be used in removing any uncertainties with three fixed values.

Ключевые слова: неопределённость, модельная неопределённость, устранение неопределённостей, трёхмодельная неопределённость, принцип гарантировано минимальных абсолютных отклонений, строгая задача устранения неопределённостей, оптимальная стратегия второго игрока, континуум оптимальных стратегий, определение квазиравновероятного распределения.

Вступление

Устранение неопределённостей в смысле сведения их характеристик к однозначному показателю принадлежит к классу актуальных проблем теории принятия решений, поскольку порождение неопределённостей является естественной частью любого процесса построения, анализа и применения математических моделей (в частности, в прогнозировании устойчивости и изнашивания). Модельные неопределённости, возникающие вследствие применения более чем одной математической модели для описания объекта, можно классифицировать по количеству их выходных параметров. Вполне естественно, что однопараметрические модельные неопределённости являются наиболее простыми среди всех классов таких неопределённостей, однако и здесь возникают задачи, требующие тщательного рассмотрения.

Известные концепции устранения неопределённостей

Очевидно, что задачу устранения однопараметрических модельных неопределённостей можно уяснять как более абстрактную задачу устранения неопределённостей в значении некоего параметра, если только речь не идёт о выборе конкретной математической модели из предоставляемого набора моделей [1, 2], порождающего неопределённость. В таком случае можно говорить о строгой задаче устранения однопараметрической модельной неопределённости, где концепция среднего арифметического [3, 4] или математического ожидания по предполагаемому неравновероятному распределению [5] едва ли применима. Поэтому существует иная концепция, являющаяся наиболее непредубеждённой, где используется спектр оптимальной стратегии второго игрока (ОСВИ) в игровой антагонистической модели (ИАМ), составленной по принципу гарантированно минимальных абсолютных отклонений (ПГМАО) известных значений параметра от его условно истинного (скорее, предполагаемого) значения [6, 7]. Но следует отметить, что результат устранения неопределённостей с двумя наблюдаемыми значениями параметра одинаков для концепций среднего арифметического и ПГМАО, так как ОСВИ в соответствующей ИАМ будет состоять в равновероятном выборе каждой из его двух чистых стратегий.

Цель статьи и постановка задачи

Исключив случай с двухмодельной неопределённостью как тривиальный, где строгая задача устранения однопараметрической модельной неопределённости решается равновероятным применением каждой модели, будем рассматривать три математических модели в описании объекта с одним параметром. Пусть в определённый момент времени наблюдения за значениями (МВНЗ) этого параметра стают известными величины

$$\{v_i\}_{i=1}^{3} = \{v_1,\ v_1 + 2\varepsilon,\ v_1 + 3\varepsilon\},\quad \varepsilon > 0\,, \tag{1}$$

где число v_i в наборе данных (1) является величиной (возможно, безразмерной) параметра объекта, описываемого в МВНЗ этого параметра с помощью i-й математической модели, $i = \overline{1,3}$. В строгой задаче устранения такой однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon, 3\varepsilon\}$-неопределённости требуется выбрать оценку $\tilde{v}$ исследуемого параметра v как

$$\tilde{v} \in \{v_1,\ v_1 + 2\varepsilon,\ v_1 + 3\varepsilon\}. \tag{2}$$

Очевидно, что среднее арифметическое

$$\overline{v} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} v_i = v_1 + \frac{5}{3}\varepsilon \tag{3}$$

здесь неприменимо вовсе. А, построив согласно ПГМАО

$$u_{kj} = |v_k - v_j| \quad \forall\ k = \overline{1,3} \ \text{ и } \ \forall\ j = \overline{1,3} \tag{4}$$

соответствующую матричную 3×3-игру

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ [u_{kj}]_{3\times 3} \right\rangle = \left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ \varepsilon \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle, \tag{5}$$

где чистая стратегия m_k первого игрока означает то, что именно k-я модель со значением её параметра v_k является основной, а чистая стратегия s_j второго игрока означает выбор им оценки v_j или, что то же самое, принятие j-й модели как основной, получим континуум ОСВИ

$$\tilde{\mathbf{Q}} = [\tilde{q}_1 \ \ \tilde{q}_2 \ \ \tilde{q}_3] \in \tilde{\mathcal{Q}} = \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} = \left[\frac{1}{4}(1+\lambda) \ \ \frac{3}{4}(1-\lambda) \ \ \frac{1}{2}\lambda \right] \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;1] \right\} \subset \mathcal{Q} \tag{6}$$

из фундаментального двумерного симплекса (равностороннего треугольника)

$$\mathcal{Q} = \left\{ \mathbf{Q} = \left[q_1 \quad q_2 \quad q_3 \right] \in \mathbb{R}^3 : q_j \in [0;\, 1]\ \forall\, j = \overline{1,\, 3},\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \right\}. \tag{7}$$

И цель статьи тогда заключается в определении квазиравновероятного распределения (КРВР) из континуума ОСВИ (6), которое должно быть максимально приближено к равновероятному распределению (РВР)

$$\left[\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \right] \notin \tilde{\mathcal{Q}}, \tag{8}$$

где РВР точно не достижимо, иначе тогда ПГМАО совпал бы с концепцией среднего арифметического. Для определения КРВР

$$\tilde{\mathbf{Q}}^* = \left[\tilde{q}_1^* \quad \tilde{q}_2^* \quad \tilde{q}_3^* \right] \in \tilde{\mathcal{Q}}^* \subset \tilde{\mathcal{Q}} = \left\{ \tilde{\mathbf{Q}} = \left[\frac{1}{4}(1+\lambda) \quad \frac{3}{4}(1-\lambda) \quad \frac{1}{2}\lambda \right] \in \mathbb{R}^3 : \lambda \in [0;\, 1] \right\} \subset \mathcal{Q} \ \text{ при } \left| \tilde{\mathcal{Q}}^* \right| = 1 \tag{9}$$

можно использовать несколько подходов, среди которых — метод наименьших квадратов (МНК) и метод наименьшего максимального отношения (МНМО), поэтому совершение выбора (9) из фундаментального двумерного симплекса (7) необходимо обосновать аналитически. Обоснованный выбор (9) будет означать решение строгой задачи устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon,\, 3\varepsilon\}$-неопределённости по ПГМАО, в котором выбор оценки $\tilde{v}$ исследуемого параметра v по правилу (2) подразумевает обращение к j-й математической модели с вероятностью $\tilde{q}_j^*$ при $j = \overline{1,\, 3}$.

Решение строгой задачи (2) устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon,\, 3\varepsilon\}$-неопределённости (1) по ПГМАО (4)

Если использовать принцип минимизации квадратов отклонений (МНК), то для определения КРВР (9) необходимо решить задачу

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}} \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{3} \right)^2 \right) = \arg \min_{[\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \tilde{q}_3] \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\sum_{j=1}^{3} \left(\tilde{q}_j - \frac{1}{3} \right)^2 \right), \tag{10}$$

смысл которой состоит в максимально возможном приближении каждой вероятности $\tilde{q}_j$ к значению $\frac{1}{3}$. Однако наряду с задачей (10) стоит рассмотреть и задачу

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}} \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{j-1} \left(\tilde{q}_k - \tilde{q}_j \right)^2 \right) = \arg \min_{[\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \tilde{q}_3] \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{j-1} \left(\tilde{q}_k - \tilde{q}_j \right)^2 \right), \tag{11}$$

смысл которой состоит в максимально возможном приближении вероятностей $\{\tilde{q}_j\}_{j=1}^{3}$ к друг другу, что в данном случае эквивалентно задаче (10). Также, используя МНМО, получим задачу

$$\arg \min_{\tilde{\mathbf{Q}} \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\max \left\{ \max \left\{ \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2}, \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1} \right\}, \max \left\{ \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_3}, \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1} \right\}, \max \left\{ \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_3}, \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_2} \right\} \right\} \right) =$$

$$= \arg \min_{[\tilde{q}_1 \ \tilde{q}_2 \ \tilde{q}_3] \in \tilde{\mathcal{Q}} \subset \mathcal{Q}} \left(\max \left\{ \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_2}, \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_1}, \frac{\tilde{q}_1}{\tilde{q}_3}, \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_1}, \frac{\tilde{q}_2}{\tilde{q}_3}, \frac{\tilde{q}_3}{\tilde{q}_2} \right\} \right) =$$

$$= \arg \min_{\lambda \in [0;\, 1]} \left(\max \left\{ \frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)} \right\} \right). \tag{12}$$

Смысл задачи (12) состоит в максимально возможном относительном приближении вероятностей $\{\tilde{q}_j\}_{j=1}^{3}$ к друг другу, что отличается от максимально возможного абсолютного приближения в задаче (10) или (11). Покажем, что существует некий критерий, согласно которого именно задача (10) определяет выбор (9). Для этого проверим справедливость утверждения, что решение задачи (10) или (11) является лучшим, чем решение задачи (12), в смысле минимизации абсолютного отклонения от РВР (8) при любом масштабировании.

Сначала решим каждую из задач (10) — (12). Итак,

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\tilde{q}_j-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{4}(1+\lambda)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}(1-\lambda)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}\right)^2=f(\lambda)\,, \tag{13}$$

$$\frac{df}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\sum_{j=1}^{3}\left(\tilde{q}_j-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{d}{d\lambda}\left[\left(\frac{1}{4}(1+\lambda)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{4}(1-\lambda)-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\lambda-\frac{1}{12}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\lambda-\frac{5}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\lambda-\frac{1}{24}+\frac{9}{8}\lambda-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{3}=\frac{7}{4}\lambda-1\,, \tag{14}$$

где первая производная (14) функции (13) имеет единственный нуль

$$\lambda=\lambda^{*}=\frac{4}{7}\,. \tag{15}$$

Так как

$$\frac{d^2 f}{d\lambda^2}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{7}{4}\lambda-1\right)=\frac{7}{4}>0\,,$$

то (15) является точкой минимума функции (13), откуда получаем

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{*}=\begin{bmatrix}\frac{11}{28} & \frac{9}{28} & \frac{2}{7}\end{bmatrix}. \tag{16}$$

Далее,

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=\left(\tilde{q}_1-\tilde{q}_2\right)^2+\left(\tilde{q}_1-\tilde{q}_3\right)^2+\left(\tilde{q}_2-\tilde{q}_3\right)^2=$$

$$=\left(\frac{1}{4}(1+\lambda)-\frac{3}{4}(1-\lambda)\right)^2+\left(\frac{1}{4}(1+\lambda)-\frac{1}{2}\lambda\right)^2+\left(\frac{3}{4}(1-\lambda)-\frac{1}{2}\lambda\right)^2=$$

$$=\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\lambda\right)^2=h(\lambda)\,, \tag{17}$$

$$\frac{dh}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left(\tilde{q}_p-\tilde{q}_j\right)^2=\frac{d}{d\lambda}\left[\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right)^2+\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\lambda\right)^2\right]=$$

$$=2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lambda\right)-\frac{5}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{4}\lambda\right)=$$

$$=2\lambda-1-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\lambda-\frac{15}{8}+\frac{25}{8}\lambda=\frac{21}{4}\lambda-3\,. \tag{18}$$

Первая производная (18) функции (17) имеет единственный нуль (15), который в силу того, что

$$\frac{d^2 h}{d\lambda^2}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{21}{4}\lambda-3\right)=\frac{21}{4}>0\,,$$

является точкой минимума функции (17), откуда опять получаем (16).

Для решения задачи (12) сперва решим задачу

$$\min_{\lambda\in[0;\,1]}\left(\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)},\ \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda},\ \frac{1+\lambda}{2\lambda},\ \frac{2\lambda}{1+\lambda},\ \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda},\ \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\}\right). \tag{19}$$

Допустим, что под знаком максимума в (19) для некоторых значений λ из отрезка $[0;1]$ выполнено

$$\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}\geqslant\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}\,. \tag{20}$$

Тогда

$$1-\lambda \geqslant 3(1-\lambda),\ \lambda \geqslant \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1-\lambda}{3(1-\lambda)} \geqslant \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]. \tag{21}$$

Далее,

$$1+\lambda-2\lambda = 1-\lambda \geqslant 0,\ 1+\lambda \geqslant 2\lambda,$$

откуда получаем

$$\frac{1-\lambda}{2\lambda} \geqslant \frac{2\lambda}{1+\lambda} \quad \forall\, \lambda \in [0; 1]. \tag{22}$$

Кроме того, для числителя и знаменателя последних двух элементов множества под знаком максимума в (19) имеем

$$3(1-\lambda)-2\lambda = 3-5\lambda \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda \leqslant \frac{3}{5}, \tag{23}$$

то есть

$$\frac{3(1-\lambda)}{2\lambda} \geqslant \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)} \quad \forall\, \lambda \leqslant \frac{3}{5}. \tag{24}$$

Теперь с учётом (21), (22) и (24) можем записать следующее:

$$\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} =$$
$$= \max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right\} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \tag{25}$$

Применяя к (25) неравенство (23), получаем

$$\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)} \leqslant \frac{1+\lambda}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \tag{26}$$

Также

$$1-\lambda-3(1-\lambda) = -2+4\lambda \geqslant 0 \quad \forall\, \lambda \geqslant \frac{1}{2}$$

и

$$\frac{1-\lambda}{2\lambda} \geqslant \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \tag{27}$$

С учётом (26) и (27) из соотношения (25) выделяется максимальный элемент:

$$\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right\} = \max\left\{\frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right\} = \frac{1+\lambda}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{5}\right]. \tag{28}$$

Рассматривая соотношения между элементами множества под знаком максимума в (19) при $\lambda \in \left[\frac{3}{5}; 1\right]$ с помощью (21), (22) и

$$\frac{3(1-\lambda)}{2\lambda} \leqslant \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{3}{5};\, 1\right] \tag{29}$$

из (23), исключаем последовательно значения, не превосходящие другие:

$$\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} = \max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} = \frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{3}{5};\, 1\right], \tag{30}$$

где также использовано

$$\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)} \geqslant \frac{1+\lambda}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[\frac{3}{5};\, 1\right] \tag{31}$$

и $1-\lambda \geqslant 2\lambda$. Наконец, рассматривая соотношения между элементами множества под знаком максимума в (19) при $\lambda \in \left[0;\, \frac{1}{2}\right]$ с помощью

$$\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)} \leqslant \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[0;\, \frac{1}{2}\right] \tag{32}$$

из (21), (22) и (24), получаем

$$\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right\} = \max\left\{\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right\} = \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[0;\, \frac{1}{2}\right], \tag{33}$$

где также использовано

$$\frac{1-\lambda}{2\lambda} \leqslant \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda} \quad \forall\, \lambda \in \left[0;\, \frac{1}{2}\right] \tag{34}$$

и $1-\lambda \geqslant 2\lambda$. С учётом (28), (30) и (33) перепишем теперь задачу (19) таким образом:

$$\min_{\lambda\in[0;\,1]}\left(\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{1+\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\}\right) =$$

$$= \min_{\lambda\in[0;\,1]}\left(\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}, \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda}, \frac{1+\lambda}{2\lambda}, \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}, \frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\}\right) =$$

$$= \min\left\{\min_{\lambda\in\left[0;\,\frac{1}{2}\right]} \frac{3(1-\lambda)}{2\lambda},\ \min_{\lambda\in\left[\frac{1}{2};\,\frac{3}{5}\right]} \frac{1+\lambda}{2\lambda},\ \min_{\lambda\in\left[\frac{3}{5};\,1\right]} \frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}\right\} =$$

$$= \min\left\{\min_{\lambda\in\left[0;\,\frac{1}{2}\right]} \psi_1(\lambda),\ \min_{\lambda\in\left[\frac{1}{2};\,\frac{3}{5}\right]} \psi_2(\lambda),\ \min_{\lambda\in\left[\frac{3}{5};\,1\right]} \psi_3(\lambda)\right\}. \tag{35}$$

Поскольку

$$\frac{d\psi_1}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{3(1-\lambda)}{2\lambda}\right) = -\frac{3}{2\lambda^2} < 0 \quad \forall\, \lambda \in [0;\, 1], \tag{36}$$

$$\frac{d\psi_2}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1+\lambda}{2\lambda}\right) = -\frac{1}{2\lambda^2} < 0 \quad \forall\, \lambda \in [0;\, 1], \tag{37}$$

$$\frac{d\psi_3}{d\lambda}=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)}\right)=\frac{2}{3(1-\lambda)^2}>0 \quad \forall\, \lambda\in[0;1], \tag{38}$$

то

$$\min_{\lambda\in[0;1]}\left(\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)},\,\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda},\,\frac{1+\lambda}{2\lambda},\,\frac{2\lambda}{1+\lambda},\,\frac{3(1-\lambda)}{2\lambda},\,\frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\}\right)=$$
$$=\min\left\{\min_{\lambda\in\left[0;\,\frac{1}{2}\right]}\psi_1(\lambda),\ \min_{\lambda\in\left[\frac{1}{2};\,\frac{3}{5}\right]}\psi_2(\lambda),\ \min_{\lambda\in\left[\frac{3}{5};\,1\right]}\psi_3(\lambda)\right\}=$$
$$=\min\left\{\psi_1\left(\frac{1}{2}\right),\,\psi_2\left(\frac{3}{5}\right),\,\psi_3\left(\frac{3}{5}\right)\right\}=\min\left\{\frac{3}{2},\,\frac{4}{3},\,\frac{4}{3}\right\}=\frac{4}{3}, \tag{39}$$

откуда

$$\arg\min_{\lambda\in[0;1]}\left(\max\left\{\frac{1+\lambda}{3(1-\lambda)},\,\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda},\,\frac{1+\lambda}{2\lambda},\,\frac{2\lambda}{1+\lambda},\,\frac{3(1-\lambda)}{2\lambda},\,\frac{2\lambda}{3(1-\lambda)}\right\}\right)=\left\{\frac{3}{5}\right\}. \tag{40}$$

Подставляя $\lambda=\lambda^*=\dfrac{3}{5}$ из (40) в континуум ОСВИ (6), получаем собственно решение

$$\breve{Q}^*=\begin{bmatrix}\frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\end{bmatrix} \tag{41}$$

задачи (12).

Сравнивая решения (16) и (41) в смысле абсолютного отклонения от РВР (8) при масштабировании со степенью $r\geq 1$, соответственно получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\breve{q}_j^*-\frac{1}{3}\right|^r=\left|\frac{11}{28}-\frac{1}{3}\right|^r+\left|\frac{9}{28}-\frac{1}{3}\right|^r+\left|\frac{2}{7}-\frac{1}{3}\right|^r=\frac{5^r}{84^r}+\frac{1}{84^r}+\frac{1}{21^r}=\frac{5^r}{84^r}+\frac{1}{84^r}+\frac{4^r}{84^r}=\frac{5^r+4^r+1}{84^r} \tag{42}$$

для решения (16) и

$$\sum_{j=1}^{3}\left|\breve{q}_j^*-\frac{1}{3}\right|^r=\left|\frac{2}{5}-\frac{1}{3}\right|^r+\left|\frac{3}{10}-\frac{1}{3}\right|^r+\left|\frac{3}{10}-\frac{1}{3}\right|^r=\frac{1}{15^r}+\frac{1}{30^r}+\frac{1}{30^r}=\frac{2^r+2}{30^r} \tag{43}$$

для решения (41), где удобно рассмотреть отношение значений (42) и (43)

$$\frac{5^r+4^r+1}{84^r}\cdot\frac{30^r}{2^r+2}=\frac{5^r\left(5^r+4^r+1\right)}{14^r\left(2^r+2\right)}, \tag{44}$$

график которого изображён на рис. 1. Как видим,

$$\frac{5^r\left(5^r+4^r+1\right)}{14^r\left(2^r+2\right)}<1 \quad \text{при} \quad r\geq 1, \tag{45}$$

поэтому абсолютное отклонение решения (16) от РВР (8) при каком угодно масштабировании со степенью $r\geq 1$ всегда меньше абсолютного отклонения решения (41) от РВР (8).

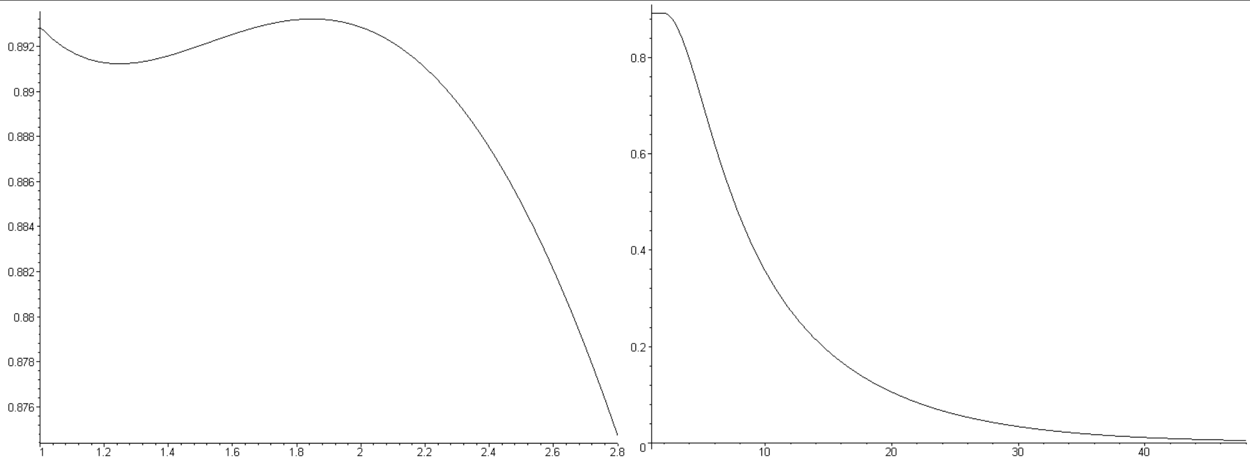

Рис. 1. Зависимость отношения (44) от $r \geqslant 1$ (визуализацию выполнено в Maple 7.00, Waterloo Maple Inc.)

Отметим, что, сравнивая решения (16) и (41) в смысле минимальной вариации “внутри самих себя” при масштабировании со степенью $r \geqslant 1$, однозначности нет, поскольку

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left|\breve{q}_p^* - \breve{q}_j^*\right|^r = \left|\frac{11}{28}-\frac{9}{28}\right|^r + \left|\frac{11}{28}-\frac{2}{7}\right|^r + \left|\frac{9}{28}-\frac{2}{7}\right|^r = \frac{3^r+2^r+1}{28^r} \qquad (46)$$

для решения (16) и

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{p=1}^{j-1}\left|\breve{q}_p^* - \breve{q}_j^*\right|^r = \left|\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right|^r + \left|\frac{2}{5}-\frac{3}{10}\right|^r + \left|\frac{3}{10}-\frac{3}{10}\right|^r = \frac{2}{10^r} \qquad (47)$$

для решения (41), а из графика отношения (46) и (47)

$$\frac{3^r+2^r+1}{28^r}\cdot\frac{10^r}{2} = \frac{5^r\left(3^r+2^r+1\right)}{2\cdot 14^r} \qquad (48)$$

видно, что при $r=1$ и достаточно близких к единице значениях $r>1$ решение (41) более “невариативно”, хотя далее преимущество захватывает решение (16), тянущееся почти до $r=10$, где снова более “невариативным” оказывается решение (41).

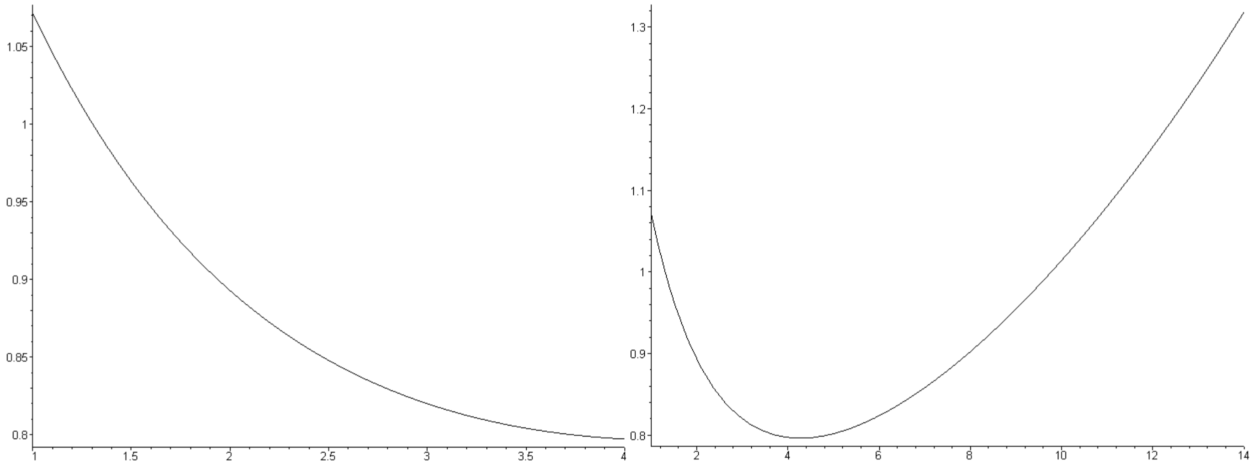

Рис. 2. Зависимость отношения (48) от $r \geqslant 1$ (визуализацию выполнено в Maple 7.00, Waterloo Maple Inc.)

Вывод и актуальность перспективы продолжения устранения неопределённостей

В связи с неоднозначностью в определении метода для получения КРВР между МНК и МНМО полученные решения (16) или (41) строгой задачи (2) устранения однопараметрической трёхмодельной $\{2\varepsilon, 3\varepsilon\}$-неопределённости (1) по ПГМАО (4) следует применять с обоснованным критерием масштабирования $r \geqslant 1$. Естественно, случай $r=2$ усматривается наиболее приемлемым, где МНК даёт однозначно лучшее решение (16). Да и превосходство решения (16) при $r=1$ в смысле абсолютного отклонения от РВР (8) является более ощутимым, чем превосходство решения (41) в смысле минимальной вариации “внутри самого себя”, что непосредственно прослеживается из рис. 1 и рис. 2. Безусловно, предлагаемый способ выделения “самого ровного” элемента из континуума ОСВИ (6), определяющий тем самым КРВР (9), можно применять и для устранения параметрических неопределённостей (при прогнозировании или расчёте коэффициентов интенсивности изнашивания, граничных нагрузок, периода приработки [8]), однако в данной работе рассмотрен всего лишь частный случай, где отклонения второго и третьего оценок-значений от (минимального) первого оказались в соотношении $2:3$. Конечно же, в перспективе необходимо заняться обобщением таких отклонений.

Литература

1. Nilsen T. Models and model uncertainty in the context of risk analysis / T. Nilsen, T. Aven // Reliability Engineering & System Safety. — 2003. — Volume 79, Issue 3. — P. 309 — 317.

2. Jacques J. Sensitivity analysis in presence of model uncertainty and correlated inputs / J. Jacques, C. Lavergne, N. Devictor // Reliability Engineering & System Safety. — 2006. — Volume 91, Issues 10 — 11. — P. 1126 — 1134.

3. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 416 с. : ил.

4. Inseok Park. A Bayesian approach for quantification of model uncertainty / Inseok Park, Hemanth K. Amarchinta, Ramana V. Grandhi // Reliability Engineering & System Safety. — 2010. — Volume 95, Issue 7. — P. 777 — 785.

5. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.

6. Романюк В. В. Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 3. — С. 65 — 71.

7. Romanuke V. V. Adjusting the neuron transfer function with symmetric kernel matrix game / V. V. Romanuke // V International Conference on Optoelectronic Information Technologies “Photonics — ODS 2010”, September 28 — 30, 2010, Vinnytsya: abstracts. — Vinnytsya : VNTU, 2010. — P. 61.

8. Тененбаум М. М. Сопротивление абразивному изнашиванию / Тененбаум М. М. — М. : Машиностроение, 1976. — 271 с.

Рецензент: д.т.н. Рудницький В.Б.
Надійшла 8.2.2012 р.