УДК 519.95:62.501.7

С.Ф. РОБОТЬКО
Вінницький кооперативний інститут

СИНТЕЗ МОДЕЛЕЙ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПРИ ВИПАДКОВОМУ ПОПИТІ

Розглядається задача побудови математичної моделі процесу управління запасами при випадковому розподілі попиту з перериванням потоку вимог. Методами теорії випадкових процесів отримані розрахункові значення параметрів політики управління запасами, які мінімізують сукупні операційні витрати процесу. Дані результати можуть бути використані при побудові математичного забезпечення систем управління типу MRP та ERP.

Discusses the problem of construction of mathematical model of the process of inventory control in a random amount of party supplies. Methods of queuing theory received the calculated value inventory control policy settings that minimize total operating expenses in the process. These results can be used in the construction of mathematical software systems management type of MRP and ERP.

Ключові слова: управління запасами, розмір партії, теорія масового обслуговування.

Вступ

Проблема управління запасами притаманна будь-якій виробничій системі. Особливу важливість ця проблема набуває при масовому виробництві продукції, що організоване за стандартами ERP та ERP. Тому наразі теорія управління запасами отримала значну увагу і широке розповсюдження. Класичні моделі теорії управління запасами базуються на підставі побудови унімодальних функцій, які виражають залежність сумарних витрат управління запасами від параметрів попиту і політики управління запасами. При цьому попит вважається таким, що достеменно відомий і не є серйозною перешкодою для аналізу моделі. Варто ввести до моделі кілька випадкових складових, які відображають реальні затримки, або похибки реальної системи, як модель значно ускладнюється і набуває різких відмінностей від класичного виду.

Дослідження та публікації з питань теорії управління запасами, наприклад [1 – 4] недостатньо висвітлюють шляхи вирішення цих проблем. Загальний підхід до методики побудови моделей з випадковим попитом сформульований в роботах [3, 5]. Проте, практика показує, що така схема моделювання процесів управління запасами при випадковому попиті повністю не усуває проблеми створення адекватної математичної моделі, а отже потребує подальшого дослідження.

Постановка задачі

Будемо вважати, що вимоги (кожна на одну одиницю товару) надходять через випадкові інтервали часу x_i, які не залежать один від одного і мають однакову функцію розподілу $F(x)$ і середнє $m_x\left(m_x\langle\infty\right)$. З виникненням і задоволенням цих вимог запас товару $Y(t)$, що є на складі, зменшується і коли його рівень знижується до значення $y \geq 0$ (y називається точкою замовлення), подається замовлення на q одиниць товару. Це замовлення задовольняється через випадковий час τ_i, який має функцію розподілу $G(x)$ і кінцеве середнє. Можливо, що після подачі замовлення чергові q вимог надійдуть раніше, ніж буде одержана замовлена партія, і рівень $Y(t)$ знижується до нуля (склад спустошиться). У цьому випадку вимоги припиняють надходити і витрачання запасу поновлюється тільки після одержання поновлення, причому час з моменту поповнення до чергової вимоги має розподіл $F(x)$. Таким чином, при спустошенні складу потік вимог переривається.

Трохи інша, але близька модель буде одержана, якщо уявити, що вимоги хоча і продовжують надходити при спустошені запасу, але не стають у чергу, а залишаються невиконаними (незадоволеними), так що заборгованості не виникає.

Ставиться задача розробити математичну модель процесу управління запасами, яка відображає описану виробничу ситуацію і дозволяє отримати розрахункові формули для визначення значень параметрів управління процесом.

Аналіз моделі

Якщо потік вимог є рекурентним, то розподіл часу від моменту надходження поповнення в спустошений склад до надходження чергової вимоги буде залежати від того, який час склад був порожнім. Можна помітити, що в разі пуасонівського потоку вимог модель з перериванням і модель зі втратою вимог співпадають (тобто процес $Y(t)$ в обох моделях змінюється за одними ймовірнісними законами).

Обмежимося випадком коли $q \geq y$. Тоді після того, як замовлена партія надійде, $Y(t)$ буде не нижче точки замовлення; по мірі надходження нових вимог $Y(t)$ опуститься до y, буде подано нове замовлення обсягом q одиниць товару, на його виконання витратить випадковий проміжок часу τ_2, що не залежить від τ_1 і т.д. Отже , задовольняючи чергові q вимог, склад подає замовлення того ж розміру, щоб поновити цей запас.

Згідно з постановкою задачі, процес $Y(t)$ є регенеруючим, причому точками регенерації зручно уявити моменти подачі замовлення, коли $Y(t)$ знижується до y. Дійсно, в силу незалежності величин $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}, \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ розвиток процесу $Y(t)$ в інтервалах між будь-якими суміжними моментами замовлень не залежить від попередньої історії процесу.

Поперед всього розглянемо випадкову величину Θ – час між сусідніми моментами подачі замовлень. Ця величина може бути представленою виразом:

$$\Theta = \max(t, E_y) + \sum_{i=y+1}^{q} x_i \,, \tag{1}$$

де $E_y = \sum_{i=1}^{y} x_i$.

Дійсно, цикл регенерації, що розглядається, починається в момент, коли $Y(t) = y$ і посилається замовлення на поповнення запасу. Якщо чергові q вимог надійдуть раніше, ніж це поповнення, тобто станеться так, що $t > E_y$, то Θ можна визначити як суму τ і часу надходження тих $q - y$ вимог, які зменшать запас, який буде в момент τ із q одиниць товару до точки замовлення y. Коли $t \le E_y$ і спустошення не трапляється, то час Θ являє собою час надходження q вимог у рекурентному потоці без переривання.

Формула (1) дозволяє визначити розподіл Θ, але нам поки що достатньо знати середнє значення. Оскільки

$$P\{\max(t, E_y) \le x\} = P\{t \le x\} P\{E_y \le x\} = G(x) F_y(x),$$

то використовуючи визначення математичного очікування, одержимо

$$M_\Theta = \int_0^\infty [1 - G(x)] F_y(x) dx + (q-y) m_x = \int_0^\infty [1 - F_y(x)] dx + \int_0^\infty [1 - G(x)] F_y(x) dx + (q-y) m_x \,.$$

Тепер, об’єднавши перший і третій додатки, одержимо:

$$M_\Theta = q m_x + \int_0^\infty [1 - G(x)] F_y(x) dx \,. \tag{2}$$

Будемо вважати, що початок відліку часу співпадає з точкою регенерації процесу $Y(t)$, і позначимо через η час до першого спустошення складу. Визначимо середнє значення цього проміжку часу M_h із співвідношення:

$$M_h = rME_y'' + (1 - r)\left[M_h + ME_y' + (q-y) m_x\right], \tag{3}$$

де $r = P\{E_y \le t\} = \int_0^\infty [1 - G(x)] dF_y(x)$ – імовірність того, що на одному циклі регенерації склад спустошиться;

$ME_y' = M(E_y / E_y < \tau)$; $ME_y'' = M(E_y / E_y > \tau)$

Співвідношення (3) базується на тому, що з ймовірністю r склад може спустошитись на першому циклі регенерації (при цьому $M_h = rME_y''$), а з ймовірністю $1 - r$ спустошення не трапиться, і перший цикл буде тривати в середньому $\left[ME_y' + (q-y) m_x\right]$, після чого все немов би почнеться спочатку. Враховуючи, що $rME_r'' + (1-r)ME_r' = rm_x$. із (3) одержимо:

$M_\eta = \frac{q m_x}{\rho} - (q-y) m_x$.

Введемо до розгляду ще одну випадкову величину η' – інтервал між сусідніми спустошеннями (від моменту одержання поповнення в пустий склад до наступного спустошення). Оскільки в початковий момент цього інтервалу $Y(t) = q$ і до найближчої точки регенерації повинно надійти $q - y$ вимог, справедливим буде співвідношення:

$$h' = \sum_{i=1}^{q-r} x_i + h \,,$$

звідки, наприклад, виходить, що $M_{h'} = q m_x / r$.

Щоб детально дослідити величину η, запишемо співвідношення для її перетворення Лапласа:

$$Me^{-sh} = rMe^{-sE_y''} + (1 - r) M \exp\left[-s\left(h + E_y' + \sum_{i=y+1}^{q} x_i\right)\right],$$

яке випливає з тих самих роздумів, що й (3). Введемо позначення:

$$Me^{-sh} = j(s), Me^{-sE_y^{'}} = f_y(s), Me^{-sE_y^{''}} = f_y^{''}(s), Me^{-s} = f(s).$$

і враховуючи, що $rf_y^{''}(s)+(1-r)f_y^{'}(s)=f^y(s)$, і перепишемо співвідношення для перетворення Лапласа величини h

$$j(s)=rf_y^{''}(s)+j(s)\left[f^y(s)-rf_y^{''}(s)\right]f^{q-y}(s)$$

звідки

$$j(s)=\frac{rf_y^{''}(s)}{1-f^q(s)+rf_y^{''}(s)f^{q-y}(s)}. \tag{4}$$

Розглянемо за допомогою (4) асимптотичну поведінку h при малих r, тобто коли ймовірність не дочекатися поновлення мала. Практично цього можна добитися завчасно подаючи замовлення, тобто вибираючи велике значення y. Зазначимо, що при малих r різниця між h і $h^{'}$ стає несуттєвою. Доведено, що величина типу (4) сходиться до перетворення Лапласа вигляду $\frac{1}{(1+s)}$. Але це є не що інше, як перетворення Лапласа експоненційного розподілу. Тому при малих значеннях r можна користуватися формулою

$$R(t)=P\{h\rangle t\}\approx e^{-\frac{rt}{qm_x}}. \tag{5}$$

Враховуючи властивості пуасонівського розподілу потік перебоїв у постачанні є пуасонівським.

Для того, щоб обрахувати стаціонарний розподіл рівня запасів, скористаємося теоремою Сміта, з якої виходить, що ймовірність перебування процесу в деякій фазі визначається як:

$$\lim P\{n(t)=i\}=M_{w_i}/M_q,$$

де M_{w_i} – математичне очікування довжини i -ї фази.

Під фазою $w_i\left(i\in\overline{0,q+r}\right)$ будемо розуміти той інтервал з циклу Θ на якому $Y(t)=i$. Така нумерація не відповідає порядку, в якому чергуються фази, але вона більш зручна, за один цикл регенерації надходять q вимог, і інтервали $x_j\left(j\in\overline{1,q}\right)$ будемо нумерувати в порядку надходження цих вимог.

Розглянемо зменшення $Y(t)$ від q до 0. Фаза w_y продовжиться протягом часу x_i, якщо тільки поновлення не надійшло раніше, отже $w_y=\min(x_i,t)$. Взагалі, фаза $w_{y-i}, i\in 0,y-1$ або не настане взагалі, якщо $E_i=\sum_{j=1}^{i}x_j\geq t$, або буде тривати протягом часу x_{i+1}, або перерветься з надходження поповнення. Таким чином:

$$w_{r-i}=\min\left\{x_{i+1},(t-E_i)^+\right\}, i\in\overline{0,r-1}, \tag{6}$$

де $(u)^+\equiv\max(0,u)$.

Зрозуміло, що

$$w_0=\left(t-E_y\right)^+. \tag{7}$$

Тривалість фаз $w_{qyr+i}, i\in\overline{0,y-1}$ легко знайти за допомогою співвідношення

$$w_{y-i}+w_{q+y+i}=x_{i+1}, \qquad i\in\overline{0,y-1}. \tag{8}$$

Коли $Y(t)$ зменшується від q до y:

$$w_q=x_{y+1}, w_{q-1}=x_{y+2}, \mathbf{K}, w_{y+1}=x_q.$$

Оскільки:

$$P_i=\lim P\{I(t)=i\}=M_{w_i}/M_q, \qquad i\in\overline{0,q+r},$$

залишається визначити середню тривалість всіх фаз.

Попередньо відзначимо, що

$$P\{t-E_i>u\}=\int_0^{\infty}F_i(t-u)dG(t), \quad -\infty<u<\infty,$$

де $F_i(t)$ i – кратна згортка.

Зробивши заміну $t-u=u$, одержимо:

$$P\left\{\left(t-E_i\right)^{+}>u\right\}=\int_0^{\infty}F_i(t-u)dG(t)=\int F_i(v)dG(u+v),\quad u\geq 0.$$

Тепер із (7) виходить, що

$$M_{w_0}=\int_0^{\infty}P\left\{\left(t-E_y\right)^{+}>u\right\}du=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}F_y(v)dG(u+v)du.$$

Замінивши порядок інтегрування, знайдемо

$$M_{w0}=\int_0^{\infty}[1-G(v)]F_y(v)dv. \tag{9}$$

Відзначимо, що ця формула витікає безпосередньо з (1), оскільки цикл регенерації складається з часу надходження q вимог і інтервалу спустошення. Із (6) аналогічно знаходимо

$$M_{wr-i}=\int_0^{\infty}P\{x_{i+1}>u\}P\left\{\left(t-E_i\right)^{+}>u\right\}du=\int_0^{\infty}[1-F(u)]\int F_i(v)dG(u+v)du, i\in\overline{o},r-\overline{1}.$$

Нарешті з (8) випливає:

$$Mw_{q+y-i}=m_x-M\,w_{y-i},\quad i\in 0,r-\overline{1}.$$

Таким чином, стаціонарний розподіл $Y(t)$ знайдено.

Середній рівень запасів у стаціонарному режимі можна було б обчислити усередненням за найденим розподілом $p_i\cdot$, але ми можемо використати властивість процесів поновлення, звідки

$$\lim_{T\to\infty}MY(t)=\lim_{T\to\infty}M\frac{1}{T}\int_0^{T}Y(t)dt=\lim_{T\to\infty}\frac{MW(t)}{T},\ \partial e W(t)=\int_0^{T}Y(t)dt.$$ – процес накопичення.

Тому:

$$\lim_{T\to\infty}MI(t)=\frac{MY(\Theta)}{M_{\Theta}},$$

припускаючи, що $t=0$ – точка регенерації $Y(t)$. Розглядаючи зміну $I(t)$ на одному циклі регенерації, встановимо, що:

$$W(\Theta)=\sum_{i=1}^{y}(y+1-i)x_i+q\left(E_y-t\right)^{+}+\sum_{i=y+1}^{q}(q+y+1-i)x_i.$$

Враховуючи рівність:

$$M\left(E_y-t\right)^{+}=M\left(E_y-t\right)+M\left(t-E_y\right)^{+}$$

і формулу (9), отримаємо:

$$MW(\Theta)=m_x\sum_{i=1}^{y}(y+1-i)+q\left\{ym_x-M_t+\int_0^{\infty}[1-G(x)]F_y(x)dx\right\}+m_x\sum_{i=y+1}^{q}(q+y+1-i),$$

$$WY(\Theta)=\frac{m_x}{2}y(y+1)+q\left\{ym_x-M_t+\int_0^{\infty}[1-G(x)]F_y(x)dx\right\}+\frac{m_x}{2}(q-y)(q+y+1),$$

звідки одержуємо:

$$MW(\Theta)=\frac{m_x}{2}q(q+2y+1)-q\left\{M_t-\int_0^{\infty}[1-G(x)]F_y(x)dx\right\}.$$

Насамкінець:

$$\lim_{t\to\infty}MY(t)=\frac{m_xq(q+2y+1)/2-q(Mt-b_y)}{qm_x+b_y},$$
$$b_y=\int_0^{\infty}[1-G(x)]F_y(x)dx. \tag{10}$$

Одержані аналітичні вирази дозволяють провести вартісну оцінку процесу управління запасами при застосуванні описаної моделі. Введемо плату за одиницю часу спустошення складу (плату за дефіцит, втрачений прибуток) C_p, лінійну інтенсивність витрат зберігання запасу $C_{si} = C_1 i$ і вартість подачі заказу $C_l(q)$. Тоді за допомогою знайдених формул можна відразу записати стаціонарну інтенсивність загальних витрат як функцію параметрів управління y і q:

$$C(y,q) = C_p P_0 + C_1 \lim_{t \to \infty} MY(t) + \frac{C_l(q)}{M\Theta},$$

або

$$C(y,q) = \frac{C_p b_y + C_1 q\left(\frac{q+2y+1}{2} m_x - M\tau + b_y\right) + C_l(q)}{q m_x + b_y}, \tag{11}$$

де b_y визначається з (10).

Висновки

Отже, основні характеристики моделі з перериванням потоку вимог, яка має довільні функції розподілу $F(x)$ і $G(x)$, можна знайти через згортки функції $F(x)$. В загальному випадку обчислення цих згорток здійснюється за рекурентною формулою $F_{i+1}(t) = \int_0^t F_i(t-x)dF(x),\ i \ge 1$ і може виявитися непростим. Але в деяких випадках можливо знайти явні формули. Наприклад, для пуасонівського потоку вимог з інтенсивністю l, коли $F(t) = 1 - \exp(-lt)$ відомо, що

$$F_y(t) = 1 - \sum_{i=0}^{y-1} \frac{(lt)^i}{i!} e^{-lt} \equiv d(y, lt).$$

Наведемо формули, одержані в припущенні, що потік вимог пуасонівський, $t = const.$.

Для середнього значення інтервалу Θ між черговими замовленнями запишемо $M_\Theta = \frac{q}{l} + td(y, lt) - yd(y+1, lt)/l$.

Середнє значення інтервалу h' між сусідніми періодами можна знайти за формулою $Mh' = q(l d(y, lt))$.

Середній рівень запасу в стаціонарному режимі визначається $b_y = td(y, lt) - yd(y+1, lt)/l$.

Підставивши ці параметри в (11), можна побудувати оптимізаційну модель для знаходження оптимальних значень параметрів.

Література

1. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами / Шрайбфедер Дж. ; пер. с англ. ; 2-е изд. – М. : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.
2. Рыжиков Ю.И. Теория очередей и управления запасами / Рыжиков Ю.И. – СПб. : Питер, 2001. – 384 с.
3. Хедли Дж. Анализ систем управления запасами / Дж. Хедли, Т. Уайтин ; пер. с англ. под ред. А.Л. Райкина. – М. : Наука, 1969. – 511 с.
4. Букан Дж. Научное управление запасами / Дж. Букан, З. Кенигсберг ; пер. с англ. – М. : Наука, 1967. – 423 с.
5. Роботько С.Ф. Синтез узагальнених математичних моделей для оптимізації керування в АСКУ виробничими запасами / С.Ф. Роботько, Н.Р. Веселовська // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1999. – № 4. – С. 136 – 139.

Рецензент: д.ф.-м.н. Никилюк П.К.
Надійшла 20.2.2012 р.