20. Кривая аппроксимирована уравнением (14). Коэффициенты аппроксимации кривой течения A= 673, n = 0,15. Кроме того построена зависимость β = β (e_u), которая получена после испытания цилиндрического образца на растяжение с последующим сжатием [1] (рис. 4). Величина β оказалась равной β = 0,45.

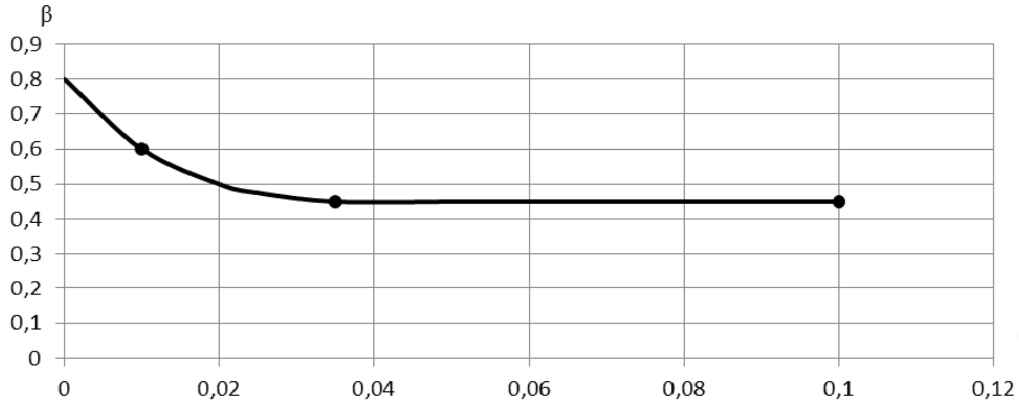

Рис. 4. Зависимость параметра β от предварительной деформации растяжения e_u стали 20

Выводы. Таким образом, на основе полученных результатов можно сделать вывод о том, что пластическую деформацию растяжение либо сжатие с последующим закручиванием можно использовать как упрочняющую обработку заготовок валов, изготовленных из не термообработанного металла. Получена зависимость (16) крутящего момента от абсолютного угла закручивания анизотропно-упрочняющихся материалов проявляющих эффект Баушингера, которая позволяет учитывать анизотропное упрочнение металла при кручении предварительно растянутых заготовок.

Литература

1. Огороднiков В.А. Зміцнення валів пластичним деформуванням / В.А. Огороднiков, В.Ф. Середюк, В.Л. Разуваєв // Вісник Вінницького політехнічного інституту. – 1997. – 1 (14). – С. 67– 71.
2. Дель Г.Д. Деформируемость материалов с анизотропным упрочнением. Прикладные задачи механики сплошных сред / Дель Г.Д. – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1988. – 152 с.
3. Огородников В.А. Оценка деформируемости металлов при обработке давлением / Огородников В.А. – К.: Головне вид-во «Вища школа», 1983. – 175 с.
4. Хван Д.В. Повышение эффективности в обработке металлов давлением / Хван Д.В. – Воронеж: Изд-во Воронежского университета, 1995. – 224 с.

Надійшла 16.9.2012 р.
Рецензент: д.т.н. Нахайчук О.В.

УДК 624.131

О.В. БАГРІЙ, В.В. КОВТУН
Хмельницький національний університет

ПЛОСКА ЗАДАЧА МЕХАНІКИ ДИСКРЕТНОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглядається постановка плоскої задачі механіки дискретного середовища. Система рівнянь сформульована аналогічно рівнянням теорії пластичності деформаційного типу, але з особливими законами деформування, які враховують вплив внутрішнього кулонового тертя.

Considered formulation of the plane problem of the mechanics of a discrete environment. The system of equations is formulated similar to equations of the theory of plasticity of strain type, but with the special laws of deformation, which take into account the influence of the internal Coulomb friction.

Ключові слова: дискретне середовище, внутрішнє тертя, плоска деформація, ітераційний алгоритм.

Вступ

Механіка дискретного середовища розглядає напружено-деформований стан специфічного середовища, заповненого фізично дискретним матеріалом, у якого відсутня зв’язність. Такий матеріал не сприймає розтягуючі напруження і опирається дії зовнішнього навантаження тільки за рахунок внутрішнього кулонового тертя, яке протидіє взаємному зсуву частинок середовища.

Методи механіки дискретного середовища найчастіше використовуються в механіці ґрунтів, механіці гірських порід, а також для описання технологічних процесів, пов’язаних з переробкою, транспортуванням та зберіганням дискретних матеріалів: піску, щебеню, вугілля, руди, компонентів хімічних виробництв, гранульованих матеріалів, зерна та інших продуктів.

Механіка дискретних середовищ є відносно новою гілкою загальної механіки. На відміну від статики сипких середовищ [1] вона розглядає середовище не тільки у граничному стані, але й описує його напружено-деформований стан на усіх етапах деформування.

Тому задача оцінки напружено-деформованого стану дискретного середовища на порядок складніша, ніж аналогічні задачі механіки твердого деформівного тіла або статики сипких середовищ.

Дискретне середовище завжди працює в умовах загального тривісного напруженого стану. Деформаційний стан його може бути загальним (тривісним), плоским (двовісним) і простим (одновісним). Найчастіше в інженерній практиці зустрічається двовісний плоско-деформативний стан (плоска деформація). Такий стан виникає, наприклад, в масивах, що контактують з протяжними спорудами: стрічкові фундаменти, підпірні стінки, укоси гірських звалищ та ін. Для оцінки напружено-деформованого стану в цьому випадку необхідно розглянути плоску задачу механіки дискретного середовища.

Метою описаних в статті досліджень є формулювання і розв’язання плоскої задачі механіки дискретного середовища.

Задача полягає у визначенні полів напружень та деформацій при збуренні плоскої області силовими або кінематичними чинниками.

Основні співвідношення задачі

Згідно з відомою теоремою механіки деформівного тіла рішення крайової задачі для області з заданими на її межі умовами буде єдиним, якщо задовольняються три умови: рівноваги, нерозривності деформацій, а також прийняті у розрахунковій моделі закони деформування.

Умови рівноваги для плоскої області описуються в системі ортогональних осей x, y диференціальними рівняннями

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = V_x \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = V_y \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

де $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}$ – напруження в площині деформування;

V_x, V_y – проекції питомих об’ємних сил на осі координат.

Систему диференціальних рівнянь (1) можна записати одним матричним рівнянням

$$[A]\ \{\sigma\} = \{V\}, \tag{2}$$

де $[A]$ – матриця диференціального оператора

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \tag{3}$$

$\{\sigma\}, \{V\}$ – вектори напружень і об’ємних сил

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix},\ \{V\} = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix}.$$

Друга умова – умова нерозривності деформацій (умова суцільності) – зводиться до використання лінійних диференціальний залежностей Коші між переміщеннями $\{u\}$ і деформаціями $\{\varepsilon\}$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

які у матричній формі набувають вигляду

$$\{\varepsilon\} = [B]\ \{u\}, \tag{4}$$

де $[B] = [A]^T$ – матриця диференціального оператора;

$\{\varepsilon\},\ \{u\}$ – вектори деформацій і переміщень:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix},\ \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}.$$

Характер рівнянь рівноваги (1) і геометричних рівнянь Коші (4) не залежить від виду матеріалу і вимагає тільки виконання умови “малості деформацій”. Третя ж група рівнянь, що описує фізичні співвідношення між напруженим і деформованим станами, встановлюється для кожного класу матеріалів шляхом узагальнення результатів експериментальних досліджень.

Для формулювання фізичних рівнянь "напруження – деформації" плоскої задачі механіки дискретних матеріалів авторами проведені випробування зразків сухого еталонного піску на спеціально створених приладах плоскої деформації [2]. Результати лабораторних досліджень представлені у формі інваріантних співвідношень теорії пластичності деформаційного типу або нелінійної теорії пружності

$$S = G_{зм}\Gamma; \tag{5}$$

$$\sigma_m = K_{зм}\varepsilon_o, \tag{6}$$

у яких $S = 0.5(\sigma_1 - \sigma_2)$ – максимальне дотичне напруження в площині x, y;

$\sigma_m = 0.5(\sigma_1 + \sigma_2)$ – середнє нормальне стискуюче напруження;

$\Gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ – максимальна деформація зсуву;

$\varepsilon_o = 0.5(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ – об'ємна деформація.

Рівняння (5) встановлює закон формозміни, а рівняння (6) – закон зміни об'єму дискретного матеріалу.

В обидва рівняння входять змінні деформаційні параметри $G_{зм}$, $K_{зм}$, які за змістом аналогічні модулю зсуву G і модулю об'ємної деформації K, що використовуються у нелінійній теорії пружності ($G = f_1(\Gamma),\ K = f_2(\varepsilon_o)$), але описуються більш складними залежностями, які відображають особливості деформування дискретного матеріалу.

Для не пружного дискретного матеріалу слід відрізняти активний процес деформування, при якому залежність (5) описується складною функцією $S = f(\Gamma, \sigma_m)$, що відображає вплив внутрішнього тертя, і пасивний процес (розвантаження і повторне навантаження), що характеризується умовно сталим модулем зсуву ($G = const$). Закон формозміни (5) детально досліджений експериментально. Встановлено, що залежність модуля зсуву від інваріантів Γ та σ_m напруженого стану для активного процесу деформування дискретного матеріалу достатньо точно апроксимується дробово-лінійною функцією

$$G_{зм} = \frac{n}{m + \Gamma}\sigma_m, \tag{7}$$

де n, m – експериментальні параметри.

На жаль, встановити аналогічну залежність для модуля об'ємної деформації $K_{зм}$ за результатами експериментів не вдається, оскільки об'ємні деформації ε_o дискретного середовища залежать не тільки від середнього нормального напруження σ_m, але і від зсувів Γ (прояв дилатансії). В рівняння нелінійної теорії пружності для спрощення запису вводять декілька взаємозалежних деформаційних параметрів: модуль Юнга, модуль зсуву, модуль об'ємної деформації, коефіцієнт Пуассона, параметр Ляме та ін. Стабільність цих параметрів є різною і потребує спеціального вивчення для кожної групи матеріалів. Мінливість деформаційних параметрів дискретних матеріалів вивчалась авторами статті за спеціально розробленою методикою [4]. Встановлено, що найбільш стабільним параметром є коефіцієнт Пуассона ν. Якщо вважати коефіцієнт Пуассона ν умовно сталою величиною, то змінний модуль об'ємної деформації $K_{зм}$ можна знайти з відомого співвідношення теорії пружності

$$K_{зм} = 2G_{зм}\frac{1 + \nu}{1 - \nu}, \tag{8}$$

у якому $G_{зм}$ описується залежністю (7), встановленою за результатами експериментів на приладах плоскої деформації [4], а осереднене значення коефіцієнта Пуассона ν – на оригінальному приладі [5].

Такий підхід дозволяє сформулювати фізичні співвідношення плоскої задачі механіки дискретного середовища у формі рівнянь узагальненого закону Гука, але зі змінними модулями зсуву і об'ємної деформації

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{K_{зм} + 2G_{зм}}{2}\varepsilon_x + \frac{K_{зм} - 2G_{зм}}{2}\varepsilon_y;\\
\sigma_y &= \frac{K_{зм} - 2G_{зм}}{2}\varepsilon_x + \frac{K_{зм} + 2G_{зм}}{2}\varepsilon_y;\\
\tau_{xy} &= G_{зм}\,\gamma_{xy}.
\end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Систему фізичних рівнянь (9) можна записати одним матричним рівнянням

$$\{\sigma\} = [D_{зм}]\ \{\varepsilon\}, \tag{10}$$

у якому $[D_{зм}]$ – матриця змінних деформаційних параметрів

$$[D_{зм}] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} K_{зм} + 2G_{зм} & K_{зм} - 2G_{зм} & 0 \\ K_{зм} - 2G_{зм} & K_{зм} + 2G_{зм} & 0 \\ 0 & 0 & G_{зм} \end{bmatrix},$$

$\{\sigma\}$, $\{\varepsilon\}$ – вектори напружень і деформацій

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \ \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}.$$

Математичне формулювання плоскої задачі механіки дискретного середовища

Для формулювання задачі виріжмо з масиву середовища, що працює в умовах плоскої деформації, розрахункову область O одиничної товщини $h = 1$ (рис. 1). Область може мати скінченні розміри або розглядатись як частина нескінченної площини, що обмежена достатньо віддаленим контуром.

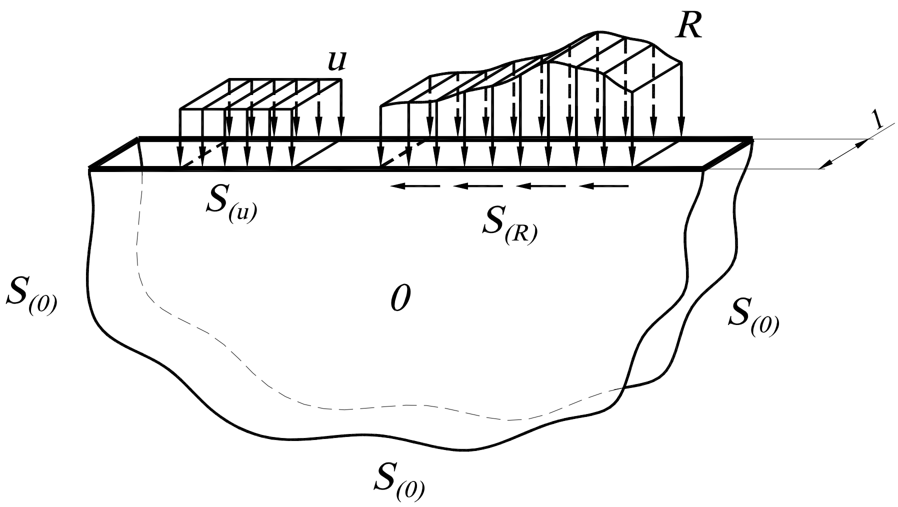

Рис. 1. Розрахункова область плоскої задачі

Граничні умови задачі відображають відомі силові чи кінематичні умови на межі області і можуть бути сформульовані так.

На деякій дільниці $S_{(R)}$ контуру задане зовнішнє навантаження (силові граничні умови), на іншій дільниці $S_{(u)}$ – відомі переміщення (кінематичні граничні умови). На частині $S_{(0)}$ межі області переміщення можуть бути нульовими (закріплення області).

Закони деформування дискретного матеріалу описуються нелінійними фізичними рівняннями (9).

Завдання полягає у знаходженні полів напружень $\{\sigma\}(x, y)$, деформацій $\{\varepsilon\}(x, y)$ і переміщень $\{u\}(x, y)$, що відповідають прийнятим законам деформування дискретного середовища та граничним умовам.

Задача зводиться до розв'язання системи матричних рівнянь:

$[A]\ \{\sigma\} = \{V\}$ – диференціальні рівняння рівноваги (2);

$\{\varepsilon\} = [B]\ \{u\}$ – геометричні диференціальні співвідношення Коші (4);

$\{\sigma\} = [D_{зм}]\ \{\varepsilon\}$ – фізичні рівняння для дискретного матеріалу (10),

з урахуванням експериментально одержаних інваріантних нелінійних фізичних співвідношень (7), (8) для визначення змінних деформаційних параметрів $G_{зм}$, $K_{зм}$

$$G_{зм} = \frac{n}{m + \Gamma}\sigma_m; \ K_{зм} = 2G_{зм}\frac{1+\nu}{1-\nu},$$

а також граничних умов:

$[C]\ \{\sigma\} = \{R_S\}$ – на $S_{(R)}$;

$\{u\} = \{u_S\}$ – на $S_{(u)}$;

$\{u\} = \{0\}$ – на $S_{(0)}$,

де $\{R_S\}$ – вектор зовнішнього навантаження на межі $S_{(R)}$,

$\{u_S\}$ – відомі переміщення на межі $S_{(u)}$,

$\{0\}$ – нульові переміщення на межі $S_{(0)}$,

$[C]$ – матриця напрямних косинусів

$$[C]=\begin{bmatrix} m & 0 & l \\ 0 & l & m \end{bmatrix}.$$

Крім сформульованих умов для дискретного середовища вводиться принципове обмеження щодо неможливості виникнення розтягуючих напружень.

Особливість розглянутої фізично нелінійної задачі полягає в тому, що змінні параметри $G_{зм}$, $K_{зм}$ є функціями, значення яких у кожній точці розрахункової області різні, оскільки залежать від досягнутого в ній рівня напружень σ_m та деформацій Γ. Таку задачу можна класифікувати як фізично нелінійну задачу неоднорідної області. Для її розв'язання необхідно розробити спеціальні чисельні ітераційні процедури, подібні тим, що використовуються в теорії пластичності.

Для розв'язання нелінійних задач теорії пластичності використовується декілька чисельних методів: метод скінчених різниць, метод скінчених елементів, метод граничних елементів та ін. Аналіз вказаних методів показав, що найбільш ефективно задача механіки дискретного середовища може бути розв'язана методом скінчених елементів з використанням ітераційної процедури змінних жорсткостей [6].

В програмному комплексі, що реалізує ці процедури, враховані принципові відмінності деформування дискретного середовища.

Перш за все, це вибір такої функції форми скінченого елемента, щоб напруження і деформації не змінювались в його межах. Це дозволяє на кожній ітерації корегувати деформаційні параметри для скінченого елемента в цілому, а не для окремих точок.

Другою принциповою особливістю задачі є необхідність врахування об'ємних сил тяжіння. Без цього дискретне середовище не може сприймати зовнішнє навантаження.

На відміну від алгоритмів теорії пластичності, які передбачають на кожній ітерації корегування тільки модуля зсуву G, у розробленому програмному комплексі передбачено корегування двох параметрів дискретного середовища G і K.

Висновки

Описані в статті співвідношення і рекомендації формулюють плоску задачу механіки дискретного середовища, результати розв'язання якої представляють інтерес для різних галузей інженерної механіки.

Література

1. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды / Соколовский В. В. – М.: Наука, 1960. – 243 с.
2. Ковтун В. В. Експериментальне обгрунтування вихідних положень механіки дискретного середовища і визначення розрахункових параметрів моделей / В. В. Ковтун, О. А. Дорофєєв // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. – 2011. – № 3. – С. 20– 27.
3. Пат. 11675 Україна, МПК (2006) G 01 № 33/24. Спосіб визначення деформаційних параметрів пористих матеріалів за результатами лабораторних випробувань / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В.; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2005 03929; заявл. 25.04.05; опубл. 16.01.06, Бюл. № 1. – 3 с.
4. А. с. 1158925 СССР. Прибор для исследования свойств грунта в условиях плоской деформации / В. В. Ковтун, В. Г. Безносюк, Н. А. Мазур (СССР). – Опубл. в Б.И. 1985, № 20. – С. 175.
5. Пат. 18390 Україна, МПК (2006) G 01 N 33/24. Пристрій для лабораторних випробувань пористих матеріалів / заявники Ковтун В. В., Багрій О. В.; власник Хмельн. нац. ун-т. – № u 2006 03878; заявл. 07.04.06; опубл. 15.11.06, Бюл. № 11. – 4 с.
6. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
7. Ковтун В. В. Программный комплекс для решения задач нелинейной механики грунтов с помощью ЭВМ / В. В. Ковтун // Современные проблемы нелинейной механики грунтов. – Челябинск, 1985. – С. 136– 137.

Надійшла 17.9.2012 р.
Статтю представляє: д.т.н. Ковтун В.В.