УДК 519.832.3::621

В.В. РОМАНЮК
Хмельницкий национальный университет

ПРИМЕНЕНИЕ МИНИМАКСНОЙ ОЦЕНКИ ВЕРОЯТНОСТНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СРАВНЕНИИ С РАВНОВЕРОЯТНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ В ОТОБРАЖЕНИИ ТРЁХЭЛЕМЕНТНОГО МНОЖЕСТВА ОДНОТИПНЫХ ДАННЫХ НА ОДНОЭЛЕМЕНТНОЕ МНОЖЕСТВО ПО КРИТЕРИЮ МИНИМИЗАЦИИ МАКСИМАЛЬНОГО ОТНОСИТЕЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ

Рассматривается задача отображения трёхэлементного множества однотипных отсортированных положительных значений на одноэлементное множество. Критерием такого отображения выступает требование по допустимости максимального относительного отклонения элемента образа от элементов прообраза. Найдено границы выполнения этого отображения для равновероятного распределения, соответствующего среднему арифметическому, и для минимаксной оценки вероятностного распределения на прообразе, которая эквивалентна оптимальной стратегии второго игрока в соответствующей матричной 3×3 *-игре. Установлено, что применение такой минимаксной оценки приемлемо всегда, кроме случая с известным интервалом значений наименьшего элемента исходного множества, в котором наибольший элемент удалён от среднего больше, чем средний от наименьшего.*

There is considered a problem of mapping the three-element set of the one-type sorted positive values onto the single-element set. The criterion of such mapping is a requirement for tolerance of the maximal relative deviation of the image element from pre-image elements. There have been found the frontiers of making this mapping for equiprobable distribution, corresponding to the arithmetic mean, and for minimax evaluation of the probabilistic distribution over the pre-image, which is equivalent to the second player optimal strategy in the corresponding matrix 3×3 *game. It has been ascertained, that adaptation of such minimax evaluation is acceptable always, except the case with the known interval of values of the initial set minimal element, in which the maximal element is distanced greater from the middle one, than the middle one from the minimal one.*

Ключевые слова: трёхэлементное множество, отображение множества данных на одноэлементное множество, среднее арифметическое, минимаксный принцип Вальда, матричная игра, минимаксная оценка вероятностного распределения.

Вступление

Задача отображения множества однотипных данных (МОД) на одноэлементное множество (ОМ) возникает в машиностроении при оценивании параметров исследуемых технико-экологических объектов, когда некое МОД характеризует один параметр, а требуется точечная оценка (ТО) или вероятностное распределение (ВР) на МОД по этому параметру. Условие отображения МОД на ОМ определяется соответствующим критерием. Обоснование приемлемости этого критерия для конкретного класса задач является одной из актуальных проблем современной теорий принятия решений [1, 2].

Анализ подходов отображения МОД на ОМ

Пожалуй, самым распространённым способом отобразить МОД в ОМ является использование ВР на МОД, ведущее к вычислению ожидаемого значения [1, 3] исследуемого параметра (ИП). Построение ВР часто исходит из распределения относительных частот на МОД. Но если такое ВР считается неизвестным или трудно поддаётся оцениванию, с чем сталкиваются в случаях с неповторяемыми данными, тогда за ТО параметра часто принимают среднее арифметическое (СА) по МОД. Разумеется, использование СА здесь является частным случаем, ведь СА равносильно ожидаемому значению [1, 3, 4] по равновероятному ВР. Если же ни при каких обстоятельствах первоначально предлагаемое ВР неприемлемо, то ищут оптимальную стратегию второго игрока (ОСВИ) в соответствующей матричной игре, чтобы использовать известный минимаксный принцип Вальда [5, 6], дающий наиболее осторожную оценку [5, 7] ВР на МОД. Так или иначе, выполнение отображения МОД в ОМ позволяет считать устранённой неопределённость в отношении значения ИП в смысле принятого критерия (способа), однако необходимо удостовериться, что этот критерий (способ) имеет количественное преимущество перед другими.

Цель и задачи статьи

Рассмотрим трёхэлементное МОД

$$\{v_i\}_{i=1}^{3} = \{v_1,\, v_1+a,\, v_1+a+b\},\ \ v_1>0,\ \ a>0,\ \ b>0. \tag{1}$$

Число $v_1>0$ в отранжированном МОД (1) является, возможно, искусственно смещённым на положительную полуось значением ИП, но это позволит обработать также и отношения между элементами в (1). Установим, каким преимуществом наделена наиболее осторожная (минимаксная) оценка ВР на МОД (1) перед СА при использовании критерия

$$\max_{i=\overline{1,\,3}} \left\{ \max\left\{ \frac{\hat{v}}{v_i},\, \frac{v_i}{\hat{v}} \right\} \right\} \leqslant \delta_v^{(\text{max-rel})} \tag{2}$$

принятия оценки € значения ИП с известным (задаваемым) максимально допустимым относительным отклонением (МДОО) $\delta_v^{(\text{max-rel})} > 0$. Для достижения поставленной цели найдём границы применения СА (равновероятного ВР) и минимаксной оценки ВР на МОД (1) и сравним их. Границу применения способа отображения МОД (1) в ОМ будем отождествлять с тем минимальным МДОО, при котором требование (2) ещё выполнимо.

Граница получения ТО значения ИП по МОД (1) с применением СА

Теорема 1. Получение ТО значения ИП по МОД (1) с применением СА при использовании критерия (2) возможно, если только МДОО

$$\delta_v^{(\text{max-rel})} \geqslant \frac{3v_1+2a+b}{3v_1}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}\left[3v_1(a-b)+(2a+b)^2\right]}{2}+\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}\left[3v_1(a-b)+(2a+b)^2\right]}{2} \tag{3}$$

при произвольных $a>0$, $b>0$ и $v_1>0$.

Доказательство. Выполняя требование (2) с оценкой $\hat{v}=\overline{v}$ по

$$\overline{v}=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}v_i=v_1+\frac{2a+b}{3}, \tag{4}$$

получаем

$$\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\max\left\{\frac{\overline{v}}{v_i},\frac{v_i}{\overline{v}}\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\max\left\{\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1},\frac{v_1}{v_1+\frac{2a+b}{3}}\right\},\max\left\{\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1+a},\frac{v_1+a}{v_1+\frac{2a+b}{3}}\right\},\max\left\{\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1+a+b},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{2a+b}{3}}\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1},\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1+a},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{2a+b}{3}}\right\}=\max\left\{\frac{v_1+\frac{2a+b}{3}}{v_1},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{2a+b}{3}}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{3v_1+2a+b}{3v_1},\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b}\right\}=$$

$$=\frac{3v_1+2a+b}{3v_1}\cdot\frac{1+\operatorname{sign}\left[3v_1(a-b)+(2a+b)^2\right]}{2}+\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b}\cdot\frac{1-\operatorname{sign}\left[3v_1(a-b)+(2a+b)^2\right]}{2}, \tag{5}$$

где использовано то, что

$$\frac{3v_1+2a+b}{3v_1}-\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b}=\frac{(3v_1+2a+b)^2-9v_1(v_1+a+b)}{3v_1(3v_1+2a+b)}=$$

$$=\frac{9v_1^2+12v_1a+6v_1b+4a^2+4ab+b^2-9v_1^2-9v_1a-9v_1b}{3v_1(3v_1+2a+b)}=\frac{3v_1(a-b)+(2a+b)^2}{3v_1(3v_1+2a+b)}.$$

Поэтому требование (2) с оценкой $\hat{v}=\overline{v}$ по (4) не выполняется для МДОО, которое меньше значения в правой части (5), откуда и следует сформулированное утверждение с неравенством (3). Теорема доказана.

Итак, согласно Теореме 1, при $a \geqslant b$ границей получения ТО значения ИП по МОД (1) с применением СА (4) по требованию (2) является число $1+\frac{2a+b}{3v_1}$. При $a<b$ возможны два варианта: для $v_1 \leqslant \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)}$ останется та же граница, что и для $a \geqslant b$, но для $v_1 \geqslant \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)}$ значением границы стаёт число $\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b}$.

Граница получения ТО значения ИП по МОД (1) с применением минимаксной оценки ВР

Минимаксная оценка ВР на МОД (1) для получения ТО значения ИП по МОД (1) должна согласовываться с критерием (2) принятия оценки € значения ИП. Это означает, что элементы матрицы $\mathbf{U}=\left[u_{kj}\right]_{3\times3}$ соответствующей матричной 3×3 -игры

$$\left\langle \left\{m_k\right\}_{k=1}^{3},\left\{s_j\right\}_{j=1}^{3},\left[u_{kj}\right]_{3\times3}\right\rangle \tag{6}$$

определяются как

$$u_{kj} = \max\left\{\frac{v_k}{v_j}, \frac{v_j}{v_k}\right\} \quad \forall\ k = \overline{1,3} \ \text{ и } \ \forall\ j = \overline{1,3}\,. \tag{7}$$

В такой игре i -я чистая стратегия игрока означает выбор им значения v_i, $i = \overline{1,3}$. Для второго игрока этот выбор контролируем, а первый игрок олицетворяет те случайные и малопредсказуемые обстоятельства, которые определяют истинное значение ИП.

Теорема 2. В игре (6) с элементами (7) для МОД (1) существует единственная ОСВИ $\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3]$. При $a \geqslant b$ или $v_1 \leqslant \dfrac{a^2}{b-a}$

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3] = \left[\frac{v_1(a-b)+a^2}{a(2a+b+2v_1)} \quad \frac{(a+b)(v_1+a)}{a(2a+b+2v_1)} \quad 0\right], \tag{8}$$

а для $a < b$ и $v_1 \geqslant \dfrac{a^2}{b-a}$

$$\breve{\mathbf{Q}} = [\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3] = \left[0 \quad \frac{(a+b)(v_1+a)}{b(2v_1+a)} \quad \frac{v_1(b-a)-a^2}{b(2v_1+a)}\right] \tag{9}$$

при произвольных $a > 0$, $b > 0$ и $v_1 > 0$.

Доказательство. Учитывая (7), выпишем симметричную матрицу 3×3 -игры (6):

$$\mathbf{U} = \left[u_{kj}\right]_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{v_1+a}{v_1} & \dfrac{v_1+a+b}{v_1} \\ \dfrac{v_1+a}{v_1} & 1 & \dfrac{v_1+a+b}{v_1+a} \\ \dfrac{v_1+a+b}{v_1} & \dfrac{v_1+a+b}{v_1+a} & 1 \end{bmatrix} = 1 + \frac{1}{v_1}\cdot\begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ a & 0 & \dfrac{bv_1}{v_1+a} \\ a+b & \dfrac{bv_1}{v_1+a} & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Как видим, для получения ОСВИ в игре (6) в силу $v_1 > 0$ достаточно решить аффинно эквивалентную [5] ей игру

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ a & 0 & \dfrac{bv_1}{v_1+a} \\ a+b & \dfrac{bv_1}{v_1+a} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle. \tag{11}$$

Обозначив

$$\gamma = \frac{bv_1}{v_1+a}, \tag{12}$$

получим игру

$$\left\langle \{m_k\}_{k=1}^{3},\ \{s_j\}_{j=1}^{3},\ \begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ a & 0 & \gamma \\ a+b & \gamma & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \tag{13}$$

с параметром (12), где, заметим, $a > \gamma$ при $a \geqslant b$, так как

$$a - \gamma = a - \frac{bv_1}{v_1+a} = \frac{a^2 + v_1(a-b)}{v_1+a} > 0 \ \text{при} \ a \geqslant b\,.$$

Также $a \geqslant \gamma$ при $v_1 \leqslant \dfrac{a^2}{b-a}$ и $a \leqslant \gamma$ для $a < b$ и $v_1 \geqslant \dfrac{a^2}{b-a}$. Кроме того, $a+b > \gamma$, поскольку

$$a + b - \gamma = a + b - \frac{bv_1}{v_1+a} = \frac{av_1 + a^2 + bv_1 + ab - v_1 b}{v_1+a} = \frac{av_1 + a^2 + ab}{v_1+a} > 0\,,$$

и $b > \gamma$, так как

$$b-\gamma=b-\frac{bv_1}{v_1+a}=\frac{bv_1+ab-bv_1}{v_1+a}=\frac{ab}{v_1+a}>0\,.$$

Положим, что $a\geqslant b$. Применяя метод задачи линейного программирования в форме эквивалентных матричных преобразований [5, 8] по отношению к расширенной 4×7-матрице $\left[z_{ph}\right]_{4\times 7}$ для игры (13), имеем:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & a+1 & a+b+1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a+1 & 1 & \gamma+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & a+b+1 & \gamma+1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{a+b+1} & \frac{(a+b+2)(a+b)}{a+b+1} & 1 & 0 & \frac{-1}{a+b+1} \\ \frac{b}{a+b+1} & 0 & \frac{b-\gamma(a+1)}{a+b+1} & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{a+b+1} & 0 & 1 & \frac{-a-1}{a+b+1} \\ \frac{1}{a+b+1} & 1 & \frac{\gamma+1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 & \frac{1}{a+b+1} \\ \frac{-1}{a+b+1} & 0 & \frac{a+b-\gamma}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & 0 & 0 & \frac{-1}{a+b+1} \end{bmatrix}, \tag{15}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+2} & 0 & \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{(a+b+2)(a+b)} & 1 & \frac{a+b+1}{(a+b+2)(a+b)} & 0 & \frac{-1}{(a+b+2)(a+b)} \\ \frac{b-\gamma}{a+b+2} & 0 & \frac{(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)}{(a+b+2)(a+b)} & 0 & \frac{-\gamma(a+b+1)-b}{(a+b+2)(a+b)} & 1 & \frac{\gamma-a(a+b+2)-b}{(a+b+2)(a+b)} \\ \frac{1}{a+b+2} & 1 & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{(a+b+2)(a+b)} & 0 & \frac{-1}{(a+b+2)(a+b)} & 0 & \frac{a+b+1}{(a+b+2)(a+b)} \\ \frac{-2}{a+b+2} & 0 & \frac{b-\gamma}{a+b+2} & 0 & \frac{-1}{a+b+2} & 0 & \frac{-1}{a+b+2} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & 1 & \frac{(a+b+2)(a+b)}{a(a+b+2)+b-\gamma} & \frac{a+b+1}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & \frac{-1}{a(a+b+2)+b-\gamma} \\ \frac{a(b+\gamma)}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & 0 & \frac{2a\gamma(a+b+2)-(b-\gamma)^2}{a(a+b+2)+b-\gamma} & \frac{\gamma(a+1)-b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 1 & \frac{-a(a+2)}{a(a+b+2)+b-\gamma} \\ \frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 1 & 0 & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{\gamma-a(a+b+2)-b} & \frac{-\gamma-1}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & \frac{a+1}{a(a+b+2)+b-\gamma} \\ \frac{\gamma-2a-b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & 0 & \frac{(a+b)(\gamma-b)}{a(a+b+2)+b-\gamma} & \frac{\gamma-a-b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0 & \frac{-a}{a(a+b+2)+b-\gamma} \end{bmatrix}, \tag{17}$$

где в базис последовательно были введёны элементы z_{32}, z_{14} и z_{13}. Перед второй итерацией использованы соотношения

$$\frac{a+b}{a+b+1}:\frac{(a+b+2)(a+b)}{a+b+1}=\frac{1}{a+b+2}\,,\ \frac{b}{a+b+1}:\frac{\gamma(a+b+1)+b}{a+b+1}=\frac{b}{\gamma(a+b+1)+b}\,,$$

$$\frac{1}{a+b+2}-\frac{b}{\gamma(a+b+1)+b}=\frac{\gamma(a+b+1)+b-ab-b^2-2b}{(a+b+2)(\gamma(a+b+1)+b)}=\frac{\gamma(a+b+1)-ab-b^2-b}{(a+b+2)(\gamma(a+b+1)+b)}=$$

$$=\frac{\gamma(a+b+1)-b(a+b+1)}{(a+b+2)(\gamma(a+b+1)+b)}=\frac{(\gamma-b)(a+b+1)}{(a+b+2)(\gamma(a+b+1)+b)}<0\,,$$

а перед третьей итерацией использованы соотношения

$$\frac{1}{a+b+2}:\frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{(a+b+2)(a+b)}=\frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma}\,, \tag{18}$$

$$\frac{b-\gamma}{a+b+2}:\frac{(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)}{(a+b+2)(a+b)}=\frac{(b-\gamma)(a+b)}{(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)}\,, \tag{19}$$

$$\frac{1}{a+b+2}:\frac{\gamma(a+b+1)+b}{(a+b+2)(a+b)}=\frac{a+b}{\gamma(a+b+1)+b}. \tag{20}$$

Если $(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)>0$, то разность между (18) и (19) отрицательна:

$$\frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma}-\frac{(b-\gamma)(a+b)}{(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)}=$$

$$=\frac{(a+b)(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b)(a+b+2)-a(b-\gamma)(a+b)(a+b+2)-(b-\gamma)^2(a+b)}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right]\left[(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)\right]}=$$

$$=\frac{-(a+b)(a+b+2)(2a\gamma+ab-a\gamma)}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right]\left[(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)\right]}=\frac{-a(a+b)(a+b+2)(b+\gamma)}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right]\left[(b-\gamma)^2-2a\gamma(a+b+2)\right]}<0.$$

А знак разности между дробями (18) и (20) определяется знаком разности между их знаменателями:

$$a(a+b+2)+b-\gamma-\left[\gamma(a+b+1)+b\right]=a(a+b+2)+b-\gamma-\gamma(a+b)-\gamma-b=a(a+b+2)-\gamma(a+b)-2\gamma=$$

$$=a(a+b+2)-\gamma(a+b+2)=(a-\gamma)(a+b+2).$$

Так как $a\geqslant b$, то $a>\gamma$ и $(a-\gamma)(a+b+2)>0$, то есть отношение (18) меньше отношения (20), что обосновывает введение в базис элемента z_{13} на третьей итерации. Из последней расширенной матрицы в преобразованиях (14) — (17) выплывает ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3]=\left(\frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma}+\frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}\frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma} & \frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{2a+b-\gamma}\cdot\begin{bmatrix}\frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma} & \frac{a+b}{a(a+b+2)+b-\gamma} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{a-\gamma}{2a+b-\gamma} & \frac{a+b}{2a+b-\gamma} & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{a-\dfrac{bv_1}{v_1+a}}{2a+b-\dfrac{bv_1}{v_1+a}} & \dfrac{a+b}{2a+b-\dfrac{bv_1}{v_1+a}} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{v_1(a-b)+a^2}{a(2a+b+2v_1)} & \frac{(a+b)(v_1+a)}{a(2a+b+2v_1)} & 0\end{bmatrix}, \tag{21}$$

которая является ОСВИ (8). Если же $a<b$, то при $v_1\leqslant\frac{a^2}{b-a}$ получаем (14) — (17) с ОСВИ (21), а при $v_1\geqslant\frac{a^2}{b-a}$ будет $a\leqslant\gamma$. Тогда в итерационный процесс войдут матрицы (14) — (16) и

$$\begin{bmatrix}
\frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{\gamma-a(a+b+2)-b}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & 1 & \frac{\gamma+1}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & \frac{-a-1}{\gamma(a+b+1)+b}\\
\frac{\gamma(2a+b-\gamma)}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{2a\gamma(a+b+2)-(b-\gamma)^2}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & 0 & \frac{-\gamma(\gamma+2)}{\gamma(a+b+1)+b} & 1 & \frac{\gamma(a+1)-b}{\gamma(a+b+1)+b}\\
\frac{a+b}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{(a+b+2)(a+b)}{\gamma(a+b+1)+b} & 1 & 0 & \frac{-1}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & \frac{a+b+1}{\gamma(a+b+1)+b}\\
\frac{-b-\gamma}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{(a+b)(\gamma-b)}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & 0 & \frac{-\gamma}{\gamma(a+b+1)+b} & 0 & \frac{-b}{\gamma(a+b+1)+b}
\end{bmatrix} \tag{22}$$

с введением в базис элементов z_{32}, z_{14}, z_{33}. Из последней расширенной матрицы (22) выплывает ОСВИ

$$\breve{\mathbf{Q}}=[\breve{q}_1 \quad \breve{q}_2 \quad \breve{q}_3]=\left(\frac{a+b}{\gamma(a+b+1)+b}+\frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b}\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\gamma(a+b+1)+b}{b+\gamma}\cdot\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{\gamma(a+b+1)+b} & \frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{a+b}{b+\gamma} & \frac{\gamma-a}{b+\gamma}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{a+b}{b+\dfrac{bv_1}{v_1+a}} & \dfrac{\dfrac{bv_1}{v_1+a}-a}{b+\dfrac{bv_1}{v_1+a}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{(a+b)(v_1+a)}{b(2v_1+a)} & \frac{v_1(b-a)-a^2}{b(2v_1+a)}\end{bmatrix}, \tag{23}$$

являющаяся ОСВИ (9). Пусть теперь опять $a \geqslant b$ или $a < b$ и $v_1 \leqslant \frac{a^2}{b-a}$, что даёт $a \geqslant \gamma$. Это позволяет последовательно вводить в базис элементы z_{13} и z_{32} в итерационном процессе (14),

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 1 & \frac{a+b+1}{a+1} & \frac{1}{a+1} & 0 & 0 \\ \frac{a}{a+1} & \frac{a(a+2)}{a+1} & 0 & \frac{\gamma(a+1)-b}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & 1 & 0 \\ \frac{a-\gamma}{a+1} & \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{a+1} & 0 & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{-a-1} & \frac{-\gamma-1}{a+1} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{a+1} & \frac{a}{a+1} & 0 & \frac{-b}{a+1} & \frac{-1}{a+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

и (17), где перед последней итерацией используется то, что

$$\frac{a}{a+1} : \frac{a(a+2)}{a+1} = \frac{1}{a+2}, \quad \frac{a-\gamma}{a+1} : \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{a+1} = \frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma},$$

$$\frac{1}{a+2} - \frac{a-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma} = \frac{a^2+ab+2a+b-\gamma-a^2-2a+a\gamma+2\gamma}{(a+2)\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right]} = \frac{(b+\gamma)(a+1)}{(a+2)\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right]} > 0,$$

откуда следует (21). Если же $v_1 \geqslant \frac{a^2}{b-a}$ и $a < b$, то $a \leqslant \gamma$, что позволяет последовательно вводить в базис элементы z_{33} и z_{14} в итерационном процессе (14),

$$\begin{bmatrix} \frac{\gamma-a}{\gamma+1} & \frac{\gamma-a(a+b+2)-b}{\gamma+1} & 0 & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{\gamma+1} & 1 & 0 & \frac{-a-1}{\gamma+1} \\ \frac{\gamma}{\gamma+1} & \frac{\gamma(a+1)-b}{\gamma+1} & 0 & \frac{\gamma(\gamma+2)}{\gamma+1} & 0 & 1 & \frac{-1}{\gamma+1} \\ \frac{1}{\gamma+1} & \frac{a+b+1}{\gamma+1} & 1 & \frac{1}{\gamma+1} & 0 & 0 & \frac{1}{\gamma+1} \\ \frac{-1}{\gamma+1} & \frac{\gamma-a-b}{\gamma+1} & 0 & \frac{\gamma}{\gamma+1} & 0 & 0 & \frac{-1}{\gamma+1} \end{bmatrix} \tag{25}$$

и (22), где перед последней итерацией используется то, что

$$\frac{\gamma-a}{\gamma+1} : \frac{\gamma(a+b+1)+b}{\gamma+1} = \frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b}, \quad \frac{\gamma}{\gamma+1} : \frac{\gamma(\gamma+2)}{\gamma+1} = \frac{1}{\gamma+2},$$

$$\frac{\gamma-a}{\gamma(a+b+1)+b} - \frac{1}{\gamma+2} = \frac{\gamma^2+2\gamma-a\gamma-2a-\gamma a-\gamma b-\gamma-b}{\left[\gamma(a+b+1)+b\right](\gamma+2)} = \frac{\gamma^2+\gamma-2a\gamma-2a-\gamma b-b}{\left[\gamma(a+b+1)+b\right](\gamma+2)} =$$

$$= \frac{\gamma(\gamma+1)-2a(\gamma+1)-b(\gamma+1)}{\left[\gamma(a+b+1)+b\right](\gamma+2)} = \frac{(\gamma+1)(\gamma-2a-b)}{\left[\gamma(a+b+1)+b\right](\gamma+2)} < 0.$$

Здесь снова получаем (23). Наконец, итерационный процесс можно составить при последовательном введении в базис элементов z_{14}, z_{32} и z_{13} или z_{33}, где получаются (14),

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{a+b+1} & \frac{1}{a+b+1} & \frac{a+1}{a+b+1} & 1 & \frac{1}{a+b+1} & 0 & 0 \\ \frac{a+b-\gamma}{a+b+1} & \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{a+b+1} & \frac{b-\gamma(a+1)}{a+b+1} & 0 & \frac{-\gamma-1}{a+b+1} & 1 & 0 \\ \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{(a+b+2)(a+b)}{a+b+1} & \frac{\gamma(a+b+1)+b}{a+b+1} & 0 & \frac{-1}{a+b+1} & 0 & 1 \\ \frac{-1}{a+b+1} & \frac{a+b}{a+b+1} & \frac{b}{a+b+1} & 0 & \frac{-1}{a+b+1} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{26}$$

(16), после чего выходит или (17) с (21), или (22) с (23), где перед второй итерацией использовано то, что

$$\frac{a+b-\gamma}{a+b+1} : \frac{a(a+b+2)+b-\gamma}{a+b+1} = \frac{a+b-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma}, \quad \frac{a+b}{a+b+1} : \frac{(a+b+2)(a+b)}{a+b+1} = \frac{1}{a+b+2},$$

$$\frac{a+b-\gamma}{a(a+b+2)+b-\gamma}-\frac{1}{a+b+2}=\frac{(a+b-\gamma)(a+b+2)-a(a+b+2)-b+\gamma}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right](a+b+2)}=$$

$$=\frac{(a+b+2)(a+b-\gamma-a)-b+\gamma}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right](a+b+2)}=$$

$$=\frac{(a+b+2)(b-\gamma)-(b-\gamma)}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right](a+b+2)}=\frac{(b-\gamma)(a+b+1)}{\left[a(a+b+2)+b-\gamma\right](a+b+2)}>0\,.$$

Рассмотрев все возможные варианты ОСВИ в игре (6) с элементами (7) для МОД (1), убеждаемся в единственности ОСВИ либо в виде (8), либо в виде (9). Теорема доказана.

Теорема 3. Получение ТО значения ИП по МОД (1) с применением минимаксной оценки ВР по игре (6) с элементами (7) при использовании критерия (2) возможно, если только МДОО

$$\delta_v^{(\text{max-rel})}\geqslant\frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)}\quad\text{для}\quad v_1(a-b)+a^2\geqslant 0 \tag{27}$$

и

$$\delta_v^{(\text{max-rel})}\geqslant\frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a}\quad\text{для}\quad v_1(a-b)+a^2\leqslant 0 \tag{28}$$

при произвольных $a>0$, $b>0$ и $v_1>0$.

Доказательство. При $a\geqslant b$ или $v_1\leqslant\frac{a^2}{b-a}$, что эквивалентно неравенству $v_1(a-b)+a^2\geqslant 0$, имеем ТО значения ИП по ОСВИ (8):

$$\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})=\sum_{j=1}^{3}\breve{q}_j v_j=\frac{v_1(a-b)+a^2}{a(2a+b+2v_1)}\cdot v_1+\frac{(a+b)(v_1+a)}{a(2a+b+2v_1)}\cdot v_2+0\cdot v_3=$$

$$=\frac{v_1(a-b)+a^2}{a(2a+b+2v_1)}\cdot v_1+\frac{(a+b)(v_1+a)}{a(2a+b+2v_1)}(v_1+a)=\frac{v_1^2a-v_1^2b+a^2v_1+(a+b)(v_1^2+2v_1a+a^2)}{a(2a+b+2v_1)}=$$

$$=\frac{v_1^2a-v_1^2b+a^2v_1+av_1^2+2a^2v_1+a^3+bv_1^2+2abv_1+a^2b}{a(2a+b+2v_1)}=\frac{2v_1^2+3av_1+a^2+2bv_1+ab}{2a+b+2v_1}=$$

$$=\frac{v_1(2v_1+3a+2b)+a(a+b)}{2a+b+2v_1}=v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}\,. \tag{29}$$

Выполняя требование (2) с оценкой $\hat{v}=\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})$ по (29), получаем

$$\max_{i=\overline{1,3}}\left\{\max\left\{\frac{\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})}{v_i},\frac{v_i}{\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})}\right\}\right\}=\max\left\{\max\left\{\frac{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}{v_1},\frac{v_1}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}\right\},\max\left\{\frac{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}{v_1+a},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{v_1+a}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}\right\},\max\left\{\frac{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}{v_1+a+b},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}\right\}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}{v_1},\frac{v_1+a}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}{v_1},\frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{(v_1+a)(a+b)}{2a+b+2v_1}}\right\}=$$

$$=\max\left\{\frac{v_1(2v_1+3a+2b)+a(a+b)}{v_1(2a+b+2v_1)},\frac{(v_1+a+b)(2a+b+2v_1)}{v_1(2v_1+3a+2b)+a(a+b)}\right\}=$$

$$= \max\left\{\frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)},\ \frac{2a+b+2v_1}{2v_1+a}\right\} = \frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)} \quad \text{для} \quad v_1(a-b)+a^2 \geqslant 0, \tag{30}$$

где использовано то, что

$$\frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)} - \frac{2a+b+2v_1}{2v_1+a} = \frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)^2 - v_1(2a+b+2v_1)^2}{v_1(2a+b+2v_1)(2v_1+a)} =$$

$$= \frac{a^3+a^2v_1+a^2b-b^2v_1}{v_1(2a+b+2v_1)(2v_1+a)} = \frac{a^2(a+b)+(a-b)(a+b)v_1}{v_1(2a+b+2v_1)(2v_1+a)} = \frac{a^2+(a-b)v_1}{v_1(2a+b+2v_1)(2v_1+a)}(a+b) \geqslant 0. \tag{31}$$

При $a<b$ и $v_1 \geqslant \frac{a^2}{b-a}$, что эквивалентно неравенству $v_1(a-b)+a^2 \leqslant 0$, имеем ТО значения ИП по ОСВИ (9):

$$\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}}) = \sum_{j=1}^{3} \breve{q}_j v_j = 0\cdot v_1 + \frac{(a+b)(v_1+a)}{b(2v_1+a)}\cdot v_2 + \frac{v_1(b-a)-a^2}{b(2v_1+a)}\cdot v_3 =$$

$$= \frac{(a+b)(v_1+a)}{b(2v_1+a)}\cdot(v_1+a) + \frac{v_1(b-a)-a^2}{b(2v_1+a)}\cdot(v_1+a+b) =$$

$$= \frac{av_1^2+2a^2v_1+a^3+bv_1^2+2abv_1+a^2b+v_1^2b+v_1ba+v_1b^2-v_1^2a-v_1a^2-v_1ab-a^2v_1-a^3-a^2b}{b(2v_1+a)} =$$

$$= \frac{2v_1^2+2av_1+v_1b}{2v_1+a} = \frac{v_1(2v_1+2a+b)}{2v_1+a} = v_1 + \frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}. \tag{32}$$

Выполняя требование (2) с оценкой $\hat{v} = \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})$ по (32), получаем

$$\max_{i=1,3}\left\{\max\left\{\frac{\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})}{v_i},\ \frac{v_i}{\tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})}\right\}\right\} = \max\left\{\max\left\{\frac{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}{v_1},\ \frac{v_1}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}\right\},\ \max\left\{\frac{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}{v_1+a},\right.\right.$$

$$\left.\left.\frac{v_1+a}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}\right\},\ \max\left\{\frac{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}{v_1+a+b},\ \frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}\right\}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}{v_1},\ \frac{v_1+a}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}},\ \frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}\right\} = \max\left\{\frac{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}{v_1},\ \frac{v_1+a+b}{v_1+\frac{v_1(a+b)}{2v_1+a}}\right\} =$$

$$= \max\left\{\frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a},\ \frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2v_1+2a+b)}\right\} = \frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a} \quad \text{для} \quad v_1(b-a)-a^2 \geqslant 0, \tag{33}$$

где использована симметричная по отношению к (31) разность:

$$\frac{2a+b+2v_1}{2v_1+a} - \frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)} = \frac{(b-a)v_1-a^2}{v_1(2a+b+2v_1)(2v_1+a)}(a+b) \geqslant 0. \tag{34}$$

Поэтому требование (2) с оценкой $\hat{v} = \tilde{v}(\breve{\mathbf{Q}})$ по (29) или (32) не выполняется для МДОО, которое меньше значения в правой части (30) или (33) соответственно, откуда и следует сформулированное утверждение с неравенствами (27) и (28). Теорема доказана.

Согласно Теореме 3, как и следовало ожидать, граница получения ТО значения ИП по МОД (1) с применением минимаксной оценки ВР по требованию (2) определяется знаком выражения $v_1(a-b)+a^2$. Для минимаксной оценки ВР по игре (6) с элементами (7) при использовании критерия (2) такой границей является либо число $\frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)}$, либо число $\frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a}$, что определяется по (27) или (28) соответственно. В граничном случае, когда $v_1(a-b)+a^2=0$, границей является отношение $\frac{b}{a}$, превосходящее, очевидно, единицу. Далее остаётся только сравнить определяемые по Теореме 1 и Теореме 3 границы применения СА (4) и минимаксной ТО (29) или (32) для МОД (1) при критерии (2).

Преимущество применения минимаксной ТО (29) или (32) в сравнении с СА (4) в отображении МОД (1) на ОМ

Под преимуществом применения того или иного способа отображения МОД на ОМ следует понимать случай, когда граница применения рассматриваемого способа меньше, чем границы других способов. Тогда для минимаксной ТО (29) или (32) и СА (4) получает своё место такое утверждение.

Теорема 4. При $a \geqslant b$ в отображении МОД (1) на ОМ по критерию (2) преимуществом по сравнению с СА (4) обладает минимаксная оценка ВР по игре (6) с элементами (7). Эта же оценка обладает преимуществом и при $a < b$, если только

$$v_1 \notin \left[\frac{a(2a+b)}{b-a}; \frac{a^2+ab+b^2}{b-a} \right] \tag{35}$$

при произвольных $a > 0$, $b > 0$ и $v_1 > 0$.

Доказательство. Если $a \geqslant b$, то согласно (5) границей применения СА (4) является число $\frac{3v_1+2a+b}{3v_1}$. Для минимаксной ТО (29) такой границей является число в (30). Поэтому

$$\frac{3v_1+2a+b}{3v_1} - \frac{(v_1+a+b)(2v_1+a)}{v_1(2a+b+2v_1)} = \frac{v_1(a-b)+a^2+ab+b^2}{3v_1(2a+b+2v_1)} > 0\,, \tag{36}$$

откуда сразу следует первое утверждение теоремы. Если $a < b$, то при $v_1 \leqslant \frac{a^2}{b-a}$ согласно Теореме 1 и Теореме 3 границы применения СА (4) и минимаксной ТО (29) не изменятся, поскольку

$$v_1 \leqslant \frac{a^2}{b-a} < \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)}$$

и (36) остаётся в силе. Если $a < b$, то для $v_1 \in \left[\frac{a^2}{b-a}; \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)} \right]$ будет такая разность границ применения СА (4) и минимаксной ТО (32):

$$\frac{3v_1+2a+b}{3v_1} - \frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a} = \frac{v_1(a-b)+2a^2+ab}{3v_1(2v_1+a)} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad v_1 \leqslant \frac{a(2a+b)}{b-a} \tag{37}$$

и

$$\frac{3v_1+2a+b}{3v_1} - \frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a} = \frac{v_1(a-b)+2a^2+ab}{3v_1(2v_1+a)} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad v_1 \geqslant \frac{a(2a+b)}{b-a}, \tag{38}$$

где учитывается, что

$$\frac{a^2}{b-a} < \frac{a(2a+b)}{b-a} < \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)}\,. \tag{39}$$

Если $a < b$, то для $v_1 \geqslant \frac{(2a+b)^2}{3(b-a)}$ разность границ применения СА (4) и минимаксной ТО (32) будет следующая:

$$\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b} - \frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a} = \frac{v_1(b-a)-a^2-ab-b^2}{(3v_1+2a+b)(2v_1+a)} \geqslant 0 \quad \text{при} \quad v_1 \geqslant \frac{a^2+ab+b^2}{b-a} \tag{40}$$

и

$$\frac{3(v_1+a+b)}{3v_1+2a+b} - \frac{2v_1+2a+b}{2v_1+a} = \frac{v_1(b-a)-a^2-ab-b^2}{(3v_1+2a+b)(2v_1+a)} \leqslant 0 \quad \text{при} \quad v_1 \leqslant \frac{a^2+ab+b^2}{b-a}, \tag{41}$$

где учитывается, что

$$\frac{(2a+b)^2}{3(b-a)} < \frac{a^2+ab+b^2}{b-a}\,. \tag{42}$$

Итак, совместив (39) и (42) для (37), (38) и (40), (41), если $a < b$, то при

$$v_1 \in \left[\frac{a(2a+b)}{b-a}; \frac{a^2+ab+b^2}{b-a} \right] \quad (43)$$

граница применения СА (4) не превосходит границу применения минимаксной ТО (32), что говорит о преимуществе применения СА (4) для такого отрезка значений v_1. В остальных же случаях для $a < b$, то есть когда выполняется (35), преимуществом обладает минимаксная ТО (32). Теорема доказана.

Из Теоремы 4 следует то, что, строго говоря, при $v_1 \in \left(\frac{a(2a+b)}{b-a}; \frac{a^2+ab+b^2}{b-a} \right)$ минимаксная оценка ВР по игре (6) с элементами (7) для отображения МОД (1) в ОМ по критерию (2) неприемлема. Для такого интервала значений v_1 лучше брать равновероятное ВР $\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$, отображающее МОД (1) в ОМ с элементом (4).

Вывод и возможность расширения анализа отображения МОД на ОМ

Естественно, в предложенном способе отображения МОД (1) в ОМ с ТО (4) для (43), ТО (29) при $a \geqslant b$ или $v_1 \leqslant \frac{a^2}{b-a}$ и ТО (32) при $a < b$ и $v_1 \geqslant \frac{a^2}{b-a}$ для (35), наряду с критерием (2) учитывается соответствующее ВР. Иначе вместо (4) и (29) или (32) использовалась бы ТО, равная среднему геометрическому (СГ) $\sqrt{v_1 v_3}$, что всегда даст наименьшее значение слева в критерии (2), а, значит, и наименьшую границу $\sqrt{\frac{v_3}{v_1}}$. Однако получаемое ВР, с помощью которого выполняется отображение МОД (1) на ОМ, необходимо для решения строгой задачи выбора $\hat{v} \in \{v_i\}_{i=1}^{3}$, многократное повторение которой приведёт к получению ожидаемого значения ИП на данном ВР. Интересно также отметить, что ОСВИ (8) или (9) оказывается при этом не вполне смешанной, как это могло ожидаться. Более того, при $v_1 = \frac{a^2}{b-a}$ эта стратегия вырождается в чистую стратегию s_2, соответствующую ТО $\hat{v} = v_1 + a$. Тогда, кстати, граница применения минимаксной ТО совпадает с границей для СГ. Что касается возможности расширения анализа отображения МОД на ОМ, то она состоит в решении задач с четырьмя элементами в МОД и больше, после чего, приобщив полученный в данной статье результат, можно будет говорить о разрешении достаточно широкого класса задач с неопределённостями в виде МОД, где чаще всего такое множество без ВР состоит из трёх или четырёх элементов. К тому же, желательно дополнительно обосновать выбор именно критерия (2), применяемого в задачах, где оперируют не абсолютными данными, а нормированными или относительными.

Литература

1. Волошин О. Ф. Моделі та методи прийняття рішень : [навчальний посібник] / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. — К. : ВПЦ “Київський університет”, 2010. — 336 с.

2. Черноруцкий И. Г. Методы принятия решений / Черноруцкий И. Г. — СПб. : БХВ-Петербург, 2005. — 416 с. : ил.

3. Мушик Э. Методы принятия технических решений / Мушик Э., Мюллер П. : [пер. с нем.]. — М. : Мир, 1990. — 208 с.

4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : [учеб. пособие для вузов] / Гмурман В. Е. — [9-е изд., стер.]. — М. : Высш. шк., 2003. — 479 с. : ил.

5. Воробьёв Н. Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1985. — 272 с.

6. Трухаев Р. И. Модели принятия решений в условиях неопределённости / Трухаев Р. И. — М. : Наука, 1981. — 258 с.

7. Романюк В. В. Мінімаксний підхід у реалізації стохастичного параметра з невідомим імовірнісним розподілом на інтервалі ненульової міри / В. В. Романюк // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2010. — № 3. — С. 65 — 71.

8. Ашманов С. А. Линейное программирование : [учебное пособие для студ. вузов] / С. А. Ашманов. — М. : Наука, 1981. — 340 с.

Надійшла 20.9.2012 р.
Рецензент: д.т.н. Рудницький В.Б.