УДК 539.3

И.В. ПАВЛЕНКО
Одесский национальный политехнический университет

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разработана методика построения функции Грина при решении задачи изгиба ортотропной пластины численно-аналитическим методом граничных элементов. Приводится общий алгоритм построения функции Грина, в соответствии с которым получено ее аналитическое выражение.

Ключевые слова: ортотропная пластина, функция Грина, функция Хевисайда, граничный элемент.

A method for constructing the Green's function in solving the problem of bending of orthotropic plates numerical-analytical boundary element method. Provides an algorithm for constructing the Green's function, whereby it obtained an analytical expression.

Keywords: ortotropnaya plate, function of Grina, function of Khevisayda, border element.

Постановка проблемы и её актуальность. Развитие различных отраслей машиностроения, авиационно-космической техники, судостроения, строительства и целого ряда других направлений ставит задачи проектирования и расчета экономичных тонкостенных систем и, в частности, пластин.

При этом на современном этапе уровень развития производства характеризуется широким внедрением новых высокопрочных материалов, обладающих ортотропными (ортогонально анизотропными) свойствами.

В силу определенных проблем математического характера получить аналитическое решение дифференциального уравнения изгиба ортотропной пластины удается не всегда. Существенную роль здесь играют условия закрепления краев пластины и локальные нагрузки. Широко применяются численные методы анализа, но здесь, как известно, нет универсального подхода.

Цель статьи. Поставлена задача: создать универсальный аналитический подход к расчету изгибаемых ортотропных пластин, позволяющий получить решение задачи при любых граничных условиях и внешних нагрузках. Эта задача решается одним из быстро развивающихся в последние годы методом — численно-аналитическим методом граничных элементов (ЧАМГЭ), применение которого во многих случаях более эффективно, чем использование метода конечных элементов (МКЭ). С помощью ЧАМГЭ получены решения целого ряда задач [1, 2], хотя многие вопросы остаются пока нерешенными.

В работе исследуется одна из важнейших и актуальных проблем, возникающих при использовании алгоритма ЧАМГЭ [1] для решения задач изгиба ортотропных пластин — построение функции Грина.

Изложение основного материала исследования. Основное разрешающее уравнение изгиба ортотропной пластины (уравнение Жермен – Лагранжа) имеет вид

$$D_1\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^4}+2D_3\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+D_2\frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial y^4}=q(x,y), \tag{1}$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1=\frac{E_x h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};\quad D_2=\frac{E_y h^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})};$$

$$D_3=D_1\mu_{xy}+2D_k=D_2\mu_{yx}+2D_k;\quad D_k=\frac{Gh^3}{12};$$

E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей; G — модуль сдвига; h — толщина пластины; μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Используя метод Канторовича-Власова, уравнение (1) можно привести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, общим решением которого будет

$$Y=C_1y_1(y)+C_2y_2(y)+C_3y_3(y)+C_4y_4(y)+y_*(y). \tag{2}$$

Частное решение $y_*(y)$ в (2) зависит от вида внешней нагрузки; его удобно представить как

$$y_*(y)=\int_0^y G(y,\xi)q(\xi)d\xi,$$

где $G(y,\xi)=Y(y,\xi)H(y-\xi)$ — функция Грина; $H(y-\xi)$ — функция Хевисайда.

Если заранее оговорить, что $y>\xi$, то $H(y-\xi)=1$ и тогда

$$Y(y,\xi)=C_1(\xi)y_1(y)+C_2(\xi)y_2(y)+C_3(\xi)y_3(y)+C_4(\xi)y_4(y). \tag{3}$$

Константы $C_i(\xi)$ определяются из условия

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & y_3(\xi) & y_4(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & y_3'(\xi) & y_4'(\xi) \\ y_1''(\xi) & y_2''(\xi) & y_3''(\xi) & y_4''(\xi) \\ y_1'''(\xi) & y_2'''(\xi) & y_3'''(\xi) & y_4'''(\xi) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/\grave{a}_0 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $\grave{a}_0 = 1$ – коэффициент при старшей степени дифференциального уравнения задачи.

Решение линейного неоднородного дифференциального уравнения задачи зависит от корней соответствующего ему характеристического уравнения [1]

$$K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{5}$$

Рассмотрим вывод формулы для функции Грина применительно к варианту корней характеристического уравнения, который соответствует жесткому защемлению продольных кромок пластины, т.е.

$$y_1 = ch\alpha\xi\sin\beta\xi;\ y_2 = ch\alpha\xi\cos\beta\xi;\ y_3 = sh\alpha\xi\cos\beta\xi;\ y_4 = sh\alpha\xi\sin\beta\xi, \tag{6}$$

где $K_{1-4} = \pm\alpha \pm i\beta$; $|s| > |r|$.

Перепишем (4) в виде

$$\begin{cases} y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3 + y_4C_4 = 0; \\ y_1'C_1 + y_2'C_2 + y_3'C_3 + y_4'C_4 = 0; \\ y_1''C_1 + y_2''C_2 + y_3''C_3 + y_4''C_4 = 0; \\ y_1'''C_1 + y_2'''C_2 + y_3'''C_3 + y_4'''C_4 = 1, \end{cases}$$

или, с учетом (6),

$$\begin{cases} y_1C_1 + y_2C_2 + y_3C_3 + y_4C_4 = 0; \\ (\alpha y_4 + \beta y_2)C_1 + (\alpha y_3 - \beta y_1)C_2 + (\alpha y_2 - \beta y_4)C_3 + (\alpha y_1 + \beta y_3)C_4 = 0; \\ \left[(\alpha^2 - \beta^2)y_1 + 2\alpha\beta y_3\right]C_1 + \left[(\alpha^2 - \beta^2)y_2 - 2\alpha\beta y_4\right]C_2 + \\ +\left[(\alpha^2 - \beta^2)y_3 - 2\alpha\beta y_1\right]C_3 + \left[(\alpha^2 - \beta^2)y_4 + 2\alpha\beta y_2\right]C_4 = 0; \\ \left[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)y_4 - \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)y_2\right]C_1 + \left[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)y_3 + \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)y_1\right]C_2 + \\ +\left[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)y_2 + \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)y_4\right]C_3 + \left[\alpha(\alpha^2 - 3\beta^2)y_1 - \beta(\beta^2 - 3\alpha^2)y_3\right]C_4 = 1. \end{cases} \tag{7}$$

В результате обычных преобразований этих уравнений, выполненных, например, по схеме метода Гаусса, получим два уравнения:

$$\begin{gathered} \left\{\alpha\left[y_1\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2\right) - 2y_2y_3y_4\right] + \beta\left[y_3\left(y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right) - 2y_1y_2y_4\right]\right\}C_1 + \\ +\left\{\alpha\left[y_2\left(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2\right) - 2y_1y_3y_4\right] + \beta\left[y_4\left(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2\right) + 2y_1y_2y_3\right]\right\}C_2 = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} \left\{\alpha\left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)\left[y_1\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2\right) - 2y_2y_3y_4\right] - \right. \\ \left. -\beta\left(\beta^2 - 3\alpha^2\right)\left[y_3\left(y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right) - 2y_1y_2y_4\right]\right\}C_1 + \\ +\left\{\alpha\left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)\left[y_2\left(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 + y_4^2\right) - 2y_1y_3y_4\right] - \right. \\ \left. -\beta\left(\beta^2 - 3\alpha^2\right)\left[y_4\left(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2\right) + 2y_1y_2y_3\right]\right\}C_2 = -\left(y_2y_3 + y_1y_4\right). \end{gathered} \tag{9}$$

Решаем совместно уравнения (8) и (9). Заметим, что в этих уравнениях выражения, стоящие в квадратных скобках, соответственно равны, поэтому обозначим их через a, b, c, d и перепишем уравнения (8) и (9) в виде:

$$\begin{cases} (\alpha a + \beta b)C_1 + (\alpha c + \beta d)C_2 = 0; \\ \left[\alpha\left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)a - \beta\left(\beta^2 - 3\alpha^2\right)b\right]C_1 + \left[\alpha\left(\alpha^2 - 3\beta^2\right)c - \beta\left(\beta^2 - 3\alpha^2\right)d\right]C_2 = -\left(y_2y_3 + y_1y_4\right). \end{cases} \tag{10}$$

Из первого уравнения найдем C_2 и подставим во второе.

$$C_2 = -\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha c + \beta d}C_1,$$

$$\left\{\left[\alpha\left(\alpha^2-3\beta^2\right)a-\beta\left(\beta^2-3\alpha^2\right)b\right]-\left[\alpha\left(\alpha^2-3\beta^2\right)c-\beta\left(\beta^2-3\alpha^2\right)d\right]\frac{\alpha a+\beta b}{\alpha c+\beta d}\right\}C_1=-\left(y_2y_3+y_1y_4\right);$$

После преобразований левой части получим:

$$2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(bc-ad\right)C_1=-\left(y_2y_3+y_1y_4\right)\left(\alpha c+\beta d\right) \tag{11}$$

Используя свойства функций y_1-y_4 (гиперболо-тригонометрические функции), выражения для a, b, c, d можно значительно упростить:

$$b=-y_3;\ c=y_2;\ a=y_1;\ d=y_4.$$

Тогда выражение (11) принимает вид:

$$2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(-y_2y_3-y_1y_4\right)C_1=-\left(y_2y_3+y_1y_4\right)\left(\alpha y_2+\beta y_4\right),$$

отсюда

$$C_1=\frac{\alpha y_2+\beta y_4}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)},$$

$$C_2=-\frac{\alpha a+\beta b}{\alpha c+\beta d}C_1=-\frac{\alpha y_1-\beta y_3}{\alpha y_2+\beta y_4}\cdot\frac{\alpha y_2+\beta y_4}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}=\frac{\beta y_3-\alpha y_1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}.$$

Используя обратный ход, найдем C_3 и C_4:

$$C_3=\frac{\alpha y_4-\beta y_2}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)};$$

$$C_4=-\frac{\alpha y_3+\beta y_1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}.$$

Таким образом, константы для этого варианта корней характеристического уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} C_1=\dfrac{\alpha y_2+\beta y_4}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}; \\ C_2=\dfrac{\beta y_3-\alpha y_1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}; \\ C_3=\dfrac{\alpha y_4-\beta y_2}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}; \\ C_4=-\dfrac{\alpha y_3+\beta y_1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}. \end{cases}$$

Функция Грина запишется так:

$$G\left(y,\xi\right)=C_1\left(\xi\right)y_1\left(y\right)+C_2\left(\xi\right)y_2\left(y\right)+C_3\left(\xi\right)y_3\left(y\right)+C_4\left(\xi\right)y_4\left(y\right)=$$

$$=\frac{\alpha y_2\left(\xi\right)+\beta y_4\left(\xi\right)}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}y_1\left(y\right)+\frac{\beta y_3\left(\xi\right)-\alpha y_1\left(\xi\right)}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}y_2\left(y\right)+\frac{\alpha y_4\left(\xi\right)-\beta y_2\left(\xi\right)}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}y_3\left(y\right)-\frac{\alpha y_3\left(\xi\right)+\beta y_1\left(\xi\right)}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}y_4\left(y\right)=$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\Big[\left(\alpha ch\alpha\xi\cos\beta\xi+\beta sh\alpha\xi\sin\beta\xi\right)ch\alpha y\sin\beta y+\left(\beta sh\alpha\xi\cos\beta\xi-\alpha ch\alpha\xi\sin\beta\xi\right)ch\alpha y\cos\beta y+$$

$$+\left(\alpha sh\alpha\xi\sin\beta\xi-\beta ch\alpha\xi\cos\beta\xi\right)sh\alpha y\cos\beta y-\left(\alpha sh\alpha\xi\cos\beta\xi+\beta ch\alpha\xi\sin\beta\xi\right)sh\alpha y\sin\beta y\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left[\alpha ch\alpha\left(\xi-y\right)\sin\beta\left(\xi-y\right)-\beta sh\alpha\left(\xi-y\right)\cos\beta\left(\xi-y\right)\right].$$

При построении полной системы фундаментальных функций [3] было получено:

$$A_{14}=\frac{1}{2\alpha\beta A\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(\beta\Phi_3-\alpha\Phi_1\right)=\frac{1}{A}\frac{1}{2\alpha\beta\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(\beta\Phi_3-\alpha\Phi_1\right),$$

следовательно,

$$G\left(y-\xi\right)=-AA_{14}\left(y-\xi\right), \tag{12}$$

где A — коэффициент, вычисленный в [3].

Заключение. Можно убедиться, что построенная функция $G\left(y,\xi\right)$ обладает всеми свойствами, характерными для функции Грина:

а) $G(y,\xi)=0$ при $y<\xi$;

б) $G(y,\xi)$ как функция от y при фиксированном ξ в интервале $\left(0, y_{ãð}\right)$, за исключаем точки $y=\xi$, удовлетворяют дифференциальному уравнению задачи;

в) $G(y,\xi)$ и ее производные по y до *n*-го порядка включительно непрерывны для $y\in\left(0, y_{ãð}\right)$, за исключением точки $y=\xi$, в которой производные по y непрерывны лишь до $(n-2)$ порядка, а $(n-1)$ производная имеет разрыв I рода со скачком

$$\left.\frac{d^{(n-1)}G(y,\xi)}{dy^{(n-1)}}\right|_{y=\xi+0}-\left.\frac{d^{(n-1)}G(y,\xi)}{dy^{(n-1)}}\right|_{y=\xi-0}=\frac{1}{a_0};$$

г) при $y=\xi$,

$$G(\xi,\xi)=G'(\xi,\xi)=...=G^{(n-2)}(\xi,\xi)=0;\ \ G^{(n-1)}(\xi,\xi)=\frac{1}{a_0}=1;$$

д) $G(y,\xi)$ для дифференциального уравнения задачи (а это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами) зависит только от разности $(y-\xi)$.

Выражение (11) будет использовано в дальнейшем при построении вектора нагрузки в соответствии с алгоритмом численно-аналитического метода граничных элементов.

Литература

1. Численно-аналитический метод граничных элементов / [А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов] : в 2 т. Т.1. – Одесса, ВМВ, 2010. – 416 с.

2. Оробей В.Ф. Практикум по решению краевых задач механики : [учебное пособие для студ. техн. спец.] / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. – Одесса : Астропринт, 2011. – 408 с.

3. Максимович О.В. Определение фундаментальных функций в задаче изгиба ортотропной пластины / О.В. Максимович, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов // Авиационно-космическая техника и технология. — Харьков, ХАИ, 2011. – Вып. 3(80). – С. 37–42.

Надійшла 23.1.2013 р.
Рецензент: д.т.н. Параска Г.Б.