

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЖЕСТКОЙ НА ИЗГИБ НИТИ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СКОЛЬЖЕНИИ

Автори статті отримали вирази для визначення форми осі та натягу жорсткої на вигин нитки при поперечному ковзанні по циліндричній напрямній великої кривини з урахуванням анізотропії тертя.

Ключевые слова: нить, натяжение, анизотропия.

V.Y.KALASHNIK, V.Y.SHCHERBAN
Kyiv national university of technology and design

INTERACTION OF A RIGID TO BEND THREAD WITH CYLINDRICAL GUIDE OF A LARGE CURVATURE IN TRANSVERSE SLIDING

A special application program in Object Pascal in Delphi environment with the use of its integral values to get the expression for definition of the axis form and pull of hard thread in curve in transverse sliding by cylindrical guide of the big curvature with account of the anisotropy of the friction has been developed in the article. The aim of this article was to obtain a system of differential equations of integration. The improvement of the technological processes of light and textile industry should be based on comprehensive studies of this process.

Key words: the thread, tension, anisotropy.

Нерешенные ранее частей общей проблемы

При взаимодействии нитей с направляющими трикотажных машин, когда радиус их кривизны соизмерим с расчетным радиусом нити также необходимо учитывать изгибную жесткость нитей. Проведенные ранее исследования не позволяют получить выражения для определения формы оси и натяжения жесткой на изгиб нити при поперечном скольжении по направляющей цилиндрической формы большой кривизны с учетом анизотропии трения.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными и практическими заданиями: получить выражения для определения формы оси и натяжения жесткой на изгиб нити при поперечном скольжении по цилиндрической направляющей большой кривизны с учетом анизотропии трения.

Анализ последних исследований

Совершенствование технологических процессов легкой и текстильной промышленности должно базироваться на комплексных исследованиях процесса взаимодействия жестких на изгиб нитей с направляющими поверхностями большой кривизны [1,2]. Получение теоретических зависимостей позволит получить уравнение для определения натяжения и формы оси жесткой на изгиб нити в зоне формирования ткани и трикотажа, уменьшить процент обрывов нитей, улучшить качество готовой продукции [2].

Цель данного исследования

Цель данного исследования заключается в получении системы дифференциальных уравнений интегрирования, которая позволит получить выражения для определения формы оси и натяжения жесткой на изгиб нити при поперечном скольжении по направляющей цилиндрической формы большой кривизны с учетом анизотропии трения.

Результаты и их обсуждение

Определенный интерес представляет исследование процесса взаимодействия жестких на изгиб нитей с цилиндрическими направляющими большой кривизны с учетом анизотропии трения. К жестким на изгиб нитям относятся монопилы, комплексные нити и пряжа с высокой круткой.

При выводе основных уравнений необходимо сделать несколько допущений. Во-первых будем считать, что нить на поверхности будет располагаться в соприкасающейся плоскости (рис. 1а), т.е. угол наклона плоскости α к горизонтальной оси Z определяется углом наклона ведущих ветвей нити. Обоснованность принятия такого допущения определяется тем, что под действием изгибающих моментов в нормальной и спрямляющей плоскостях за счет жесткости на изгиб нить будет стремиться занять положение, которое обеспечит ей наименьшее значение потенциальной энергии, необходимой для обеспечения стационарного положения равновесия в процессе перемещения.

Второе допущение заключается в том, что массой элемента нити, который взаимодействует с направляющей поверхностью, можно пренебречь. Совместим с осью цилиндра цилиндрическую координатную систему. Ось Z будет совпадать с осью цилиндра. Положительное ее направление будет противоположно направлению вектора скорости (здесь мы будем использовать метод обращенного движения).

Тогда форма оси жесткой нити (рис. 1б) будет представлять собой эллипс. Большая и малая полуоси определяются из выражений

$$a = \frac{r}{\sin \alpha}, \quad b = r, \quad (1)$$

где r – радиус цилиндра, м;
 a, b – соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Используя основные положения дифференциальной геометрии, можно получить два очевидных дифференциальных равенства

$$r \frac{d\varphi}{ds} = \sin \alpha, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{ds} = \cos \alpha,$$

где r, φ, z – соответствующие цилиндрические координаты;

s – дуговая координата, м;

α – угол наклона соприкасающейся плоскости к оси z , рад.

Сила трения, расположенная в соприкасающейся плоскости, определяется из следующей системы уравнений

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, \quad F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad (3)$$

где $F_1 = k_1 N$ – проекция силы трения F на касательную ось натурального трехгранника;

$F_2 = k_2 N$ – проекция силы трения F на бинормальную ось натурального трехгранника;

k_1, k_2 – коэффициенты трения нити в продольном и поперечном направлении, которые и характеризуют анизотропию фрикционных свойств.

Тогда величину силы трения, с учетом (3), можно определить по следующей формуле

$$F = N \sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \quad (4)$$

Основная система дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах, описывающая поперечное скольжение жесткой на изгиб нити по направляющей с учетом анизотропии фрикционных свойств, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left(P \frac{dr}{ds} \right) - Pr \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + N &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(Pr \frac{d\varphi}{ds} \right) &= 0, \\ \frac{d}{ds} \left(P \frac{dz}{ds} \right) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2} N &= 0, \\ \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 &= 1, \end{aligned} \quad (5)$$

где P – натяжение нити, Н;

N – нормальная реакция поверхности, Н.

Учитывая, что в качестве направляющей поверхности был выбран цилиндр ($r = const$), система дифференциальных уравнений (5) примет вид

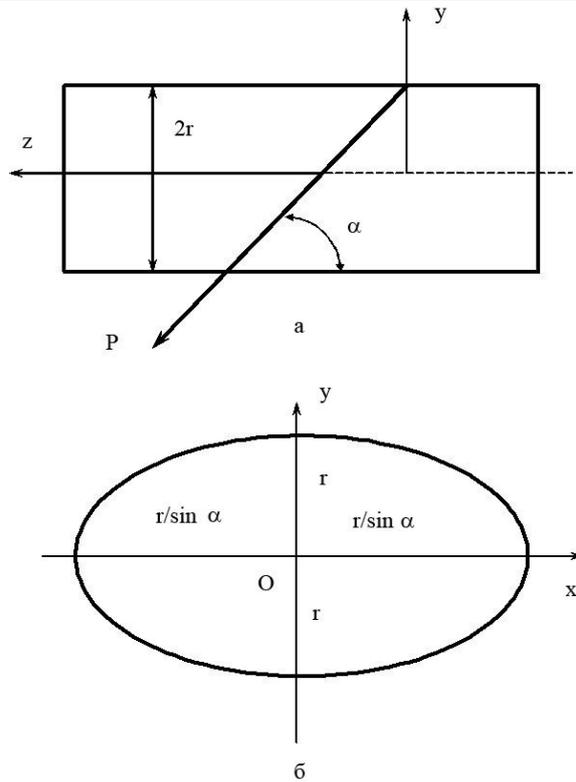


Рис. 1. Расчетная схема для определения натяжения жесткой на изгиб нити

$$\begin{aligned}
-Pr\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + N &= 0, \\
\frac{d}{ds}\left(Pr\frac{d\varphi}{ds}\right) &= 0, \\
\frac{d}{ds}\left(P\frac{dz}{ds}\right) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}N &= 0, \\
r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 &= 1.
\end{aligned} \tag{6}$$

Подставив в последнюю систему дифференциальных уравнений (6) выражения (2), получим

$$\begin{aligned}
-Pr\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^2 + N &= 0, \\
\frac{d}{ds}(P\sin\alpha) &= 0, \\
\frac{d}{ds}(P\cos\alpha) - \sqrt{k_1^2 + k_2^2}N &= 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Преобразуем систему дифференциальных уравнений (7) к виду

$$\begin{aligned}
N &= Pr\left(\frac{\sin\alpha}{r}\right)^2, \\
\frac{d}{ds}(P\sin\alpha) &= 0, \\
\frac{d}{ds}(P\cos\alpha) &= \sqrt{k_1^2 + k_2^2}N.
\end{aligned} \tag{8}$$

Подставляя из первого уравнения системы дифференциальных уравнений (8) значение нормальной реакции поверхности в третье уравнение, получим

$$\cos\alpha\frac{dP}{ds} = P\frac{\sin^2\alpha}{r}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}. \tag{8.1}$$

Преобразуем последнее дифференциальное уравнение к виду

$$\frac{dP}{P} = \frac{\sin^2\alpha}{r\cos\alpha}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}ds. \tag{8.2}$$

Последнее дифференциальное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Проинтегрируем его

$$\frac{dP}{P} = \frac{\sin^2\alpha}{r\cos\alpha}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}ds. \tag{8.3}$$

$$\int_{P_0}^{P_1} \frac{dP}{P} = \frac{\sin^2\alpha}{r\cos\alpha}\sqrt{k_1^2 + k_2^2} \int_0^{s_*} ds.$$

Или

$$\ln\frac{P_1}{P_0} = \frac{\sin^2\alpha}{r\cos\alpha}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}s_*, \tag{8.4}$$

где P_1 – натяжение нити в точке схода с цилиндра, Н;

P_0 – натяжение нити в крайней правой точке на траектории (см. рис. 1), Н;

s_* – длина дуги нити от точки схода с направляюще до крайней правой точки, м.

В окончательном виде получим

$$P_1 = P_0 e^{\frac{\sin^2\alpha}{r\cos\alpha}\sqrt{k_1^2 + k_2^2}s_*}. \tag{9}$$

Для определения длины дуги нити s_* воспользуемся следующей системой дифференциальных

уравнений

$$\begin{aligned}
 ds &= \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx, \\
 \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\
 a &= \frac{r}{\sin \alpha}, \quad b = r.
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Из второго уравнения системы (10) получим

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{11}$$

Продифференцируем уравнение (11) по x и получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}. \tag{12}$$

Подставляя (12) в первое уравнение системы (10), получим

$$ds = \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^4(1 - \frac{x^2}{a^2})}} dx. \tag{13}$$

В окончательном виде получим

$$ds = \sqrt{\frac{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}{a^4 - a^2 x^2}} dx. \tag{14}$$

Проинтегрировать уравнение (14) в элементарных функциях не представляется возможным. Для этой цели необходимо использовать соответствующие численные методы.

В данной работе мы будем использовать метод Симпсона, суть которого заключается в интерполяции функции $f(x)$ в n промежутках полиномом Лагранжа. После разбиения отрезка $[a, b]$ на m равные части формула Симпсона будет иметь вид

$$\begin{aligned}
 I = \int_a^b f(x) dx &\cong \frac{H}{3} [f(a) + 4f(a+H) + 2f(a+2H) + \dots + 4f(b-H) + f(b)] - \\
 &\quad - \frac{mH^5}{90} f^{IV}(\xi),
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

где $f^{IV}(\xi)$ – значение четвертой производной функции $f(x)$ в точке $x = \xi$, где она максимальна.

Для реализации метода Симпсона в работе была разработана специальная прикладная программа на языке Object Pascal в среде Delphi (смотри Приложение). Данная программа включает в себя три формы IMT1, IMT2, UErrors. Для ввода подынтегральной функции $f(x)$ на второй форме размещен стандартный элемент Memo1: Tmemo.

Для корректного ввода подынтегральной функции в окно Memo1: Tmemo в программе был реализован специально разработанный транслятор Synt.

Основные компоненты формы IMT2 имеют вид

```

TfrmIMT2 = class (TForm)
  lbl1IMT2: TLabel;
  lbl2IMT2: TLabel;
  lbl3IMT2: TLabel;
  edt1IMT2: TEdit;
  edt2IMT2: TEdit;
  edt3IMT2: TEdit;
  lbl4IMT2: TLabel;
  Memo1: TMemo;
  lbl5IMT2: TLabel;
  btn1IMT2: TButton;
  btn2IMT2: TButton;
  btn3IMT2: TButton;
  edt4IMT2: TEdit;

```

(16)

Форма Uergors предназначена для сообщений об ошибках при вводе подинтегральной функции. Основные компоненты формы ИМТ1 имеют вид

$$\begin{aligned} & lbl1IMT1: TLabel; lbl2IMT1: TLabel; \\ & lbl3IMT1: TLabel; lbl4IMT1: TLabel; \\ & lbl5IMT1: TLabel; btn1IMT1: TButton; \\ & img1IMT1: TImage; Label1: TLabel; \\ & Label2: TLabel; Label3: TLabel \end{aligned} \quad (17)$$

Используя разработанную программу, вычисляем значения интеграла (14)

$$\int_0^{s_*} ds = \int_0^x \sqrt{\frac{a^4 + x^2(b^2 - a^2)}{a^4 - a^2x^2}} dx. \quad (18)$$

Полученный массив данных аппроксимировали с использованием специальной программы (описание алгоритма и самой программы приведено в разделе 3). В результате получаем степенной полином вида

$$s_* = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, \quad (19)$$

где $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$ – коэффициенты аппроксимационного полинома.

Тогда выражение (9) для определения натяжения нити жесткой на изгиб с учетом анизотропии трения примет вид

$$P_1 = P_0 e^{\frac{\sin^2 \alpha}{r \cos \alpha} \sqrt{k_1^2 + k_2^2} (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n)}. \quad (20)$$

Выводы

Была разработана специальная прикладная программа на языке Object Pascal в среде Дельфы с использованием значений интеграла, чтобы получить выражения для определения формы оси и натяжения жесткой на изгиб нити при поперечном скольжении по цилиндрической направляющей большой кривизны с учетом анизотропии трения.

Литература

1. Щербань В.Ю. Механика нити / Щербань В.Ю., Хомяк О.Н., Щербань Ю.Ю. – К. : КНУТД, 2002. – 196 с.
2. Программные и математические компоненты проектирующих подсистем технологических процессов, оборудования, свойств материалов легкой и текстильной промышленности / [Щербань В.Ю., Слизков А.Н., Озадовский А.Б., Щербань Ю.Ю.]. – К. : Конус-Ю, 2009. – 327 с.

References

1. Shcherban V.Y., Khomyak O.N., Shcherban Y.Y. Mechanics of thread. K. KNUTD. 2002. 196 p.
2. Shcherban V.Y., Slizkov A.N., Ozadovsky A.B., Shcherban Y.Y. Software and mathematical components of designing subsystems of technological processes, equipment, materials' properties of light and textile industry. Kyiv. Konus-Yu. 2009. 327 p.

Рецензія/Peer review : 13.3.2013 р.

Надрукована/Printed : 7.4.2013 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Здоренко В.Г.