

## ФРАКТАЛЬНИЙ АНАЛІЗ ФАЗОВАНИХ АНТЕННИХ РЕШІТОК НА ОСНОВІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ ВЕЙЄРШТРАССА

В статті проведено узагальнену методичку фрактального синтезу та аналізу фазованих антенних решіток на основі узагальнених функцій Вейєрштрасса. На прикладі лінійної фазованої антенної решітки показано зручність та простоту такого підходу. Наведені результати моделювання фрактальних характеристик антенної решітки та діаграми спрямованості з використанням фрактального представлення.

Ключові слова: фрактали, антенна решітка, функції Вейєрштрасса, діаграма спрямованості.

V.P. ROJZMAN, V.V. KMET'  
Khmelnitsky National University

### FRactal ANALYSIS OF PHASED ANTENNA ARRAYS USING GENERALIZED WEIERSTRASS FUNCTIONS

*Abstract – This article the synthesis of fractal analysis of antennas. Estimation procedure synthesis phased antenna arrays using fractals. The efficiency of the synthesis of fractal antennas using generalized Weierstrass functions. On the example of the linear phased array shows convenience and simplicity of this approach. The results of modeling fractal characteristics of antenna array. The calculated pattern using fractal representation. It is shown that with increasing fractal dimension fidelity skyrocketing. The main prospects of the synthesis of fractal antennas*

Keywords: fractals, antenna array, Weierstrass function, pattern.

Фрактальна електродинаміка оформилася як наукова дисципліна в 1990 р. і поєднала теорію фракталів з теорією електромагнетизму. На відміну від традиційних методів, коли синтезуються гладкі діаграми спрямованості антени, в основі теорії фрактального синтезу споконвічно закладена ідея реалізації характеристик випромінювання з повторюваною структурою на довільних масштабах [1]. Це дає можливість створювати нові режими у фрактальній електродинаміці.

Існує ряд прикладних напрямків, у яких можливість синтезу фрактальних характеристик може бути дуже бажана. Це особливо важливо для вивчення поширення і розсіювання електромагнітних хвиль фрактальними природними середовищами (атмосфера, земна поверхня і т.д.), при обробці радіолокаційних сигналів, при створенні штучних неоднорідностей у плазмі та іоносфері за допомогою потужних передавачів і т.д. В даній статті розглядається саме електродинамічне застосування теорії фракталів, а саме їх застосування для синтезу та аналізу фазованих антенних решіток, оскільки саме в цій галузі вони знайшли широке застосування, через зручність та відносну простоту [4].

Сімейство функцій, відоме як узагальнені функції Вейєрштрасса [1, 2], відіграє визначальну роль у синтезі фрактальних характеристик випромінювання. Ці функції скрізь безперервні, ніде не диференціюються і фрактальні на всіх масштабах, вони можуть бути представлені у вигляді (1) [2]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} g(\eta^n x), \quad (1)$$

де  $1 < D < 2$ ,  $g$  – підходяща обмежена і періодична функцій,  $\eta > 1$ .

У цей час особливо актуальні завдання конструювання антенних решіток. Розподіл випромінювачів по простору дає третю змінну, в придачу до амплітуди і фази струму збудження решітки, за допомогою яких вдається управляти діаграмою спрямованості антени. Множник неоднорідної або нееквідистантної, але симетрично розподіленої решітки з  $2N$  випромінювачів, що показана на рис. 1, записується у вигляді [3]

$$f(\theta) = 2 \sum_{n=1}^N I_n \cos(kd_n \cos \theta + \alpha_n). \quad (2)$$

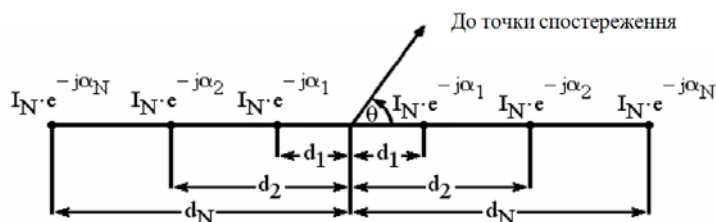


Рис.1. Симетрична решітка з  $2N$  елементів з розподілом струму збудження

В останньому виразі  $k = 2\pi / \lambda$ ,  $I_n$ ,  $\alpha_n$  – амплітуда і фаза струму збудження;  $d_n$  – відстань між сусідніми випромінювачами. Припустимо, що множник решітки з нескінченною кількістю випромінювачів виражається через узагальнену функцію Вейєрштрасса з косинусоїдальною функцією  $g$  [1,2] і випадковою

фазою  $\alpha$  :

$$f(u) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{(D-2)n} \cos(\alpha \eta^n u + \alpha_n), \quad (3)$$

де  $\alpha$  – деяка постійна.

Порівнюючи (2) і (3), можна побачити, що амплітуда струму і розташування елементів задовольняють наступні умови:

$$I_n = \eta^{(D-2)n}, kd_n = \alpha \eta^n, \quad (4)$$

при  $u = \cos \theta$ . Фрактальна діаграма спрямованості має властивість самоподібності в нескінченному діапазоні масштабів. Однак фізично реалізуєма решітка складається з кінцевої кількості елементів, тобто при цьому виходить усічений ряд [2]

$$f_N(u) = 2 \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)n} \cos(\alpha \eta^n u + \alpha_n). \quad (5)$$

Вираз (5) представляє коефіцієнт решітки з  $2N$  – випромінювачів з амплітудами і фазами, розподіленими згідно з (4). Таким чином, у цьому випадку часткова сума (5) є діапазонно обмежена функція Вейерштрасса, а результуюча діаграма спрямованості є фракталом у кінцевому діапазоні масштабів з нижньою границею  $\frac{2\pi}{\alpha \eta^N}$ . Тому діапазон масштабів контролюється за допомогою кількості випромінювачів

решітки  $N$ . Фактично, діаграма спрямованості стає більш деталізованою при збільшенні  $N$ .

Максимальне значення (5) для кута спостереження  $\theta$  дорівнює

$$f_N(u_0) = 2 \sum_{n=1}^N \eta^{(D-2)n} \quad (6)$$

і визначається вибором фази струму збудження  $\alpha_n = -\alpha \eta^n u_0$  при  $u_0 = \cos \theta_0$ . Ряд (6) є геометрична прогресія, тому

$$f_N(u_0) = 2\eta^{(D-2)} \left[ \frac{1 - \eta^{(D-2)N}}{1 - \eta^{D-2}} \right], \quad (7)$$

а нормалізований коефіцієнт решітки Вейерштрасса виходить розподілом (5) у (7), що дає

$$g_N(u) = \left[ \frac{1 - \eta^{D-2}}{1 - \eta^{(D-2)N}} \right] \sum_{n=1}^N i_n \cos(\alpha \eta^n u + \alpha_n), \quad (8)$$

де нормалізована амплітуда збуджуючого струму

$$i_n = \eta^{(D-2)(n-1)}. \quad (9)$$

Порівнюючи (4) і (9), видно, що фрактальна розмірність діаграми спрямованості може контролюватися розподілом струму по решітці.

Умови реалізуємості. Відстань між будь-якими двома сусідніми випромінювачами решітки оцінюється співвідношенням

$$d_{n+1} - d = \left[ \frac{\alpha(\eta-1)\eta^n}{2\pi} \right] \lambda, n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (10)$$

Оскільки,  $\eta > 1$ , то  $\eta^n > \eta$  при  $n > 1$ . Отже,

$$d_{n+1} - d > d_2 - d_1, n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (11)$$

Нехай  $\tau$  буде обмежуючим фактором, що накладають на мінімальну відстань між двома сусідніми випромінювачами решітки. Тоді існують два можливі випадки, що задовольняють даній умові [1]:

$$\begin{aligned} 1) \quad & d_2 - d_1 = \tau, \quad d_1 \geq \tau/2, \\ 2) \quad & d_1 = \tau/2, \quad d_2 - d_1 \geq \tau. \end{aligned} \quad (12)$$

З нерівності (11) випливає, що при виконанні (12) завжди просторове рознесення між усіма іншими парами послідовних випромінювачів решітки буде задовольняти критерію мінімальної відстані  $\tau$ . Вираз для коефіцієнта а як функції  $\tau$  і  $\eta$  виходить при спільному розв'язку (14) і (12). Тоді [3]

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{k\tau}{\eta(\eta-1)}, 1 < \eta \leq 3 \\ \alpha &= \frac{k\tau}{2\eta}, \quad \eta \geq 3 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

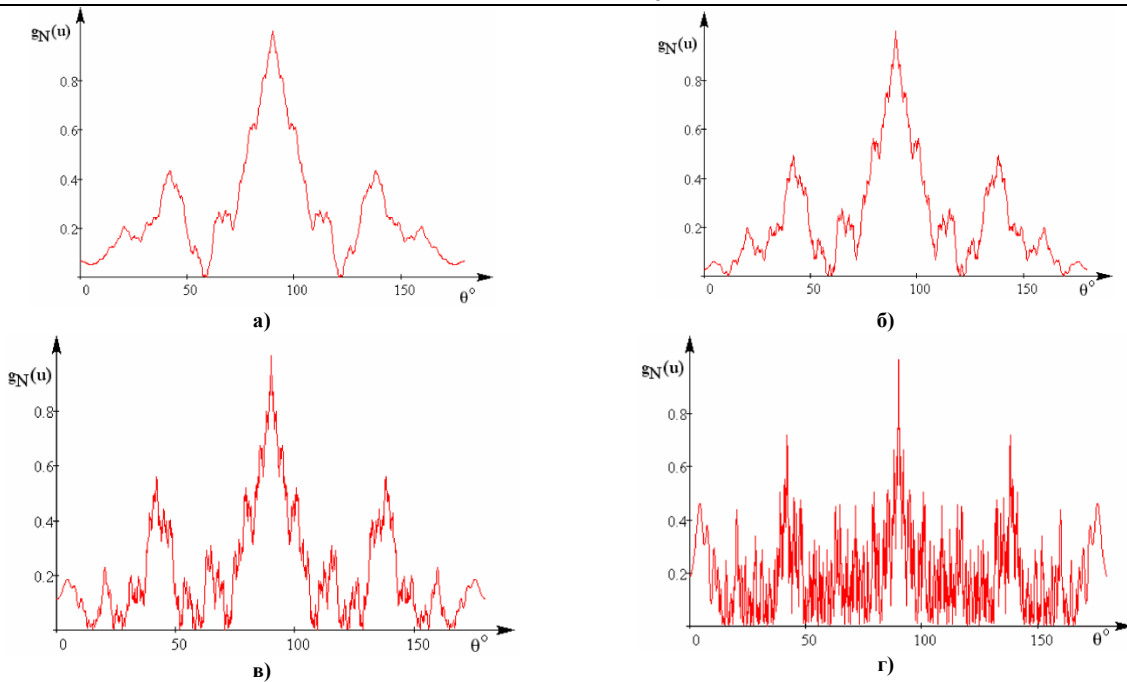


Рис. 2. Нормалізовані множники для 16-елементної решітки Вейерштрасса при  $u_0 = 0$ ,  $\tau = 0.5\lambda$ ,  $\eta = 2.34$ ,  $N = 8$  для різних фрактальних розмірностей  $D$

Слід зазначити, що параметр  $\eta$  управляє збіжністю виразу для коефіцієнта решітки Вейерштрасса. Чим ближче  $\eta$  до одиниці, тим більше випромінювачів потрібно для даної решітки. У той же час просторовий рознос між послідовними елементами решітки зменшується при прагненні  $\eta$  до одиниці.

З іншого боку, можна відзначити, що амплітуди  $I_n$  і фази  $\alpha_n$  струму збудження, а також просторові розміщення  $d_n$  випромінювачів можуть бути визначені ітераційним алгоритмом:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \eta^{D-2} I_{n-1}, \quad I_1 = \eta^{D-2}, \\
 \alpha_n &= \eta \alpha_{n-1}, \quad \alpha_1 = -\alpha \eta u_0, \\
 d_n &= \eta d_{n-1}, \quad d_1 = \alpha \eta / k, \\
 n &= 2, 3, \dots, N.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Для прикладу, припустимо, що розглядається решітка Вейерштрасса з  $\tau = \lambda/2$ , тоді з (13) при  $\alpha = 1$  випливає, що  $\eta = 2.34$ . Ці значення використовуються в (14) для визначення просторового рознесення випромінювачів решітки. На рис. 2 [3] показані синтезовані множники решітки з 16-а випромінювачами при фрактальному розподілі струму збудження з  $D = 1.1$  (а),  $D = 1.3$  (б),  $D = 1.5$  (в),  $D = 1.9$  (г).

У цьому випадку множники решітки отожднюють із діаграмами спрямованості антенних решіток Вейерштрасса. Можна зробити висновок, що фрактальна розмірність  $D$  управляється розподілом струму по решітці. З підвищенням  $D$  характеристики випромінювання ускладнюються і все більшою мірою заповнюють простір сканування.

На рис. 3 [3] показані нормалізовані розподіли струму, що призводять до діапазонно обмежених фрактальних діаграм спрямованості, що представлені на рис. 2 для симетричної 16-елементної решітки Вейерштрасса.

Високий ступінь спаду амплітуди струму збудження необхідний для синтезу діаграм спрямованості з більш низькою фрактальною розмірністю. У табл.1 [3] міститься перелік координат розташування випромінювачів для зазначеної решітки Вейерштрасса, геометрія якої описується за допомогою параметрів  $\eta = 2.34$ ,  $\alpha = 1$ .

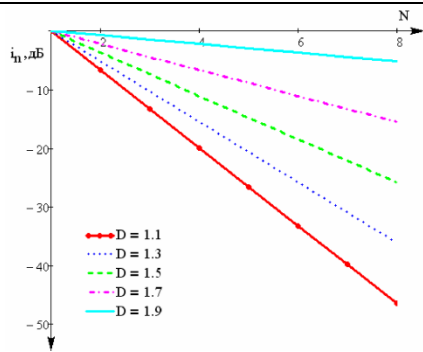


Рис. 3. Нормалізовані розподіли струму  $i_n$  для отримання діаграм направленості з різними  $D$

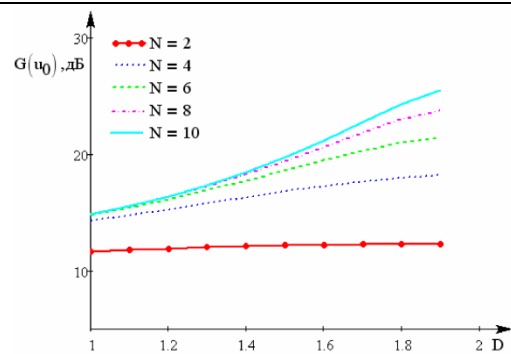


Рис. 4. Значення коефіцієнта спрямованої дії  $G(u_0)$  в залежності

Таблиця 1

#### Координати випромінювачів для 16-елементної решітки Вейерштрасса

Номер випр.-ча $n$	Положення випр.-ча $d_n / \lambda$ ,	Номер випр.-ча $n$	Положення випр.-ча $d_n / \lambda$ ,
1	0,372	5	11,166
2	0,872	6	26,129
3	2,039	7	61,141
4	4,772	8	143,069

Більш зручною, з використанням фрактальних представлень, є оцінка спрямованості антенної решітки. Так, значення коефіцієнта спрямованої дії як функції  $D$  наведено на рис. 4 [3, 4] для декількох розмірів решіток. Видно, що в міру зменшення  $D$  головна пелюстка діаграми спрямованості розширюється, а відповідне значення коефіцієнта спрямованої дії  $G(u_0)$  зменшується.

Таким чином, проведені дослідження показали, що фрактальні методи є ефективним математичним апаратом аналізу досить широкого класу електродинамічних процесів і в тому числі в задачах антенної техніки. Як було встановлено, фрактальна концепція зайняла міцне місце, останнім часом вона стала очевидною для завдань радіофізики, зокрема радіолокації, поширення радіохвиль і т.д. Також слід зазначити, що з математичної точки зору, нові геометричні і топологічні представлення фрактального аналізу в майбутньому стануть такою ж невід'ємною частиною аналізу сигналів, полів і хвиль у радіофізиці і радіоелектроніці, яким став Фур'є-аналіз.

#### Література

1. Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки / Потапов А.А. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М. : Университетская книга, 2005. – 848 с.
2. Гуляев Ю.В. Фотонные и магнитофотонные кристаллы – новая среда для передачи информации // Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов // Радиотехника. – 2003. – № 8. – С. 26–30.
3. Гуляев Ю.В. Перспективы развития телекоммуникаций / Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов // Нелинейный мир. – 2003. – Т. 1. – № 1–2. – С. 3–11.
4. Song C.T.P., Peter S.H., Ghafouri-Shiraz H Multiband Multiple Ring Monopole Antennas//IEEE Trans. 2003. V. 51, № AP-51. № 4. P. 722-729.

#### References

1. Alexander Potapov. Fraktal' v radiophizike i radiolokacii: Topologiya vy'borki. M. Universitetskaya kniga, 2005. – 848 p.: il.
2. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A. Photonny'e i magnitophonny'e kristaly' – novaya sreda dlya peredachi inphormacii. Radiotekhnica. 2003. Number 8. Pp. 26–30.
3. Gulyaev Yu.V., Nikitov S.A. Perspektivy' razvitiya telekommunikacij.Nelineynyj' mir. 2003. T.1, № 1–2. Pp. 3–11.
4. Song C.T.P., Peter S.H., Ghafouri-Shiraz H Multiband Multiple Ring Monopole Antennas. IEEE Trans. 2003. V. 51, № AP-51. Number 4. P. 722–729.

Рецензія/Peer review : 8.3.2013 р. Надрукована/Printed :9.4.2013 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. Шинкарук О.М.