УДК 519.852.33:004

Л.К. ГЛІНЕНКО, Є.І. ЯКОВЕНКО
Національний університет «Львівська політехніка»

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НА ГРАФАХ ЗА ДОПОМОГОЮ НАДБУДОВИ SOLVER MS EXCEL

Розглянуті можливості застосування надбудови Solver MS Excel для розв'язання екстремальних задач на графах як транспортних задач з проміжними пунктами. Запропоновані моделі задач, які дають змогу знаходити екстремальні шляхи та мінімальні покриття (мінімальні остівні дерева) для графів довільної складності.

Ключові слова: граф, матриця суміжності, шлях, остівне дерево, транспортна задача, проміжний пункт, оптимізація, MS Excel Solver.

L. GLINENKO, E. YAKOVENKO
Lviv Polytechnic National University

SOLVING PROBLEMS ON GRAPHS USING SOLVER MS EXCEL ADD-IN

Possibilities of Solver MS Excel add-in for solving extreme problems on graphs as transportation problems with intermediate points were considered. The tasks models that allow finding extreme routes and spanning trees for graphs of arbitrary complexity were proposed.

Key words: graph, adjacency matrix, route, spanning tree, transport problem, intermediate point, optimization, MS Excel Solver

Вступ

До задач на графах зводяться задачі оптимізації перевезень у логістиці, оптимізації переміщення маніпуляторів у робототехніці, пошуку шляхів переміщення загонів у лабіринтах в стратегіях реального часу у комп'ютерних іграх, обрання оптимального складу пакету тиражованих програм та конфігурації мережі у обчислювальній техніці та багато інших. За математичною постановкою ці задачі переважно зводяться до задачі пошуку мінімального шляху та мінімального покриття графа (пошуку мінімального остівного дерева графа). Алгоритми розв'язання цих задач та їх програмна реалізація на різних мовах програмування, від VBA до C++. детально описані у фаховій літературі [1, с. 28–73; 2, с. 107–116; 3, с. 231–304], проте розповсюдженість таких задач висуває вимогу оперативного їх розв'язання за допомогою доступного і простого у використанні програмного забезпечення. Враховуючи розповсюдженість сімейства програм MS Office, видається актуальним дослідити можливості застосування для комп'ютерної підтримки розв'язання таких задач пакету MS Excel.

Аналіз досліджень та публікацій

Можливості надбудови Solver (Пошук рішення) MS Excel 7.0 – 2010 з підтримки розв'язання екстремальних задач на графах розглядаються у [4–6]. Вектор змінних моделі представлений всіма дугами графа $x_{ij} \in [0, 1]$, для кожної з яких ідентифіковані вершина-початок i та вершина кінець j та довжина l_{ij}. Цільова функція задається як $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_{ij}x_{ij} \to \min$, а обмеження зв'язності екстремального шляху на графі прописується для кожного вузла окремо як обмеження рівності кількості вхідних та вихідних дуг (обмеження рівності 0 цих кількостей). Очевидно, що в такій постановці побудова моделі задачі не є уніфікованою і до кінця формалізованою, сильно ускладнюється з введенням кожної додаткової вершини чи дуги графа, а також не допускає застосування у випадку неорієнтованих графів. Крім того, для реалізації моделі залучається вбудована функція СУММАЕСЛИ(), що суттєво збільшує час пошуку рішення. Очевидно також, що подібна модель обмежень непридатна для постановки задачі на мінімальне остівне дерево, а також вимагатиме повної перебудови моделі у випадку переходу до задачі на знаходження найкоротшого шляху між двома довільними вершинами неорієнтованого графа, до яких зводяться, зокрема, задачі проектування топології кабельних телемереж та маршрутизації пересилання повідомлень у мережах.

Метою даної роботи є дослідження ефективних способів розв'язання екстремальних задач на графах у MS Excel Solver на основі застосування відповідних аналітичних представлень графа.

У [7, с. 217] задачу на знаходження мінімального шляху на графі пропонується розв'язувати як транспортну задачу з проміжними пунктами з обсягом попиту і пропозиції у початковому і кінцевому пунктах у 1. При цьому у транспортні таблиці невідомих та вартостей транзитні пункти вводяться одночасно і як пункти пропозиції, і як пункти попиту з обсягом попиту / пропозиції в розмірі обсягу буфера, який дорівнює сумарній пропозиції / попиту, тобто 1. Реалізація цього підходу у MS Excel [8] для транспортних задач з проміжними пунктами є некоректною, оскільки запропонована модель задачі не містить обмеження зв'язності графа, одним з різновидів якого є обмеження балансу потоків через всі транзитні пункти [9, с. 348]. Проте встановлення обмеження балансу потоків на кожний вузол окремо на основі ідентифікації всіх вхідних і вихідних дуг аналогічно тому, як це пропонується у [4, 6] суттєво ускладнює відтворення моделі задачі на аркуші Excel і реально може бути реалізоване лише для мереж простої структури з малою кількістю проміжних пунктів. На наш погляд, цей недолік можна подолати завдяки коректному аналітичному представленню структури вихідного та шуканого графа певним чином модифікованою (відповідно до специфіки транзитної транспортної задачі) матрицею суміжності.

Транспортною задачею у її класичному розумінні називають задачу про вибір плану перевезень із m пунктів відправлення в n пунктів призначення. Як умова задачі задається набір коефіцієнтів c_{ij}, що визначає вартість доставки продукції із пункту i в пункт j, ресурси продукту у пунктах пропозиції a_i та потреби у продуктах у пунктах попиту b_j. Метою T-задачі є визначення обсягів перевезень з пунктів пропозиції у пункти попиту за мінімальної сумарної вартості перевезень. Якщо позначити обсяги продукту, що перевозяться з пункту i в пункт j, через x_{ij}, то у випадку рівності сумарних обсягів попиту та пропозиції (збалансована T-задача) задача зведеться до визначення таких значень $x_{ij} \geq 0$, i=1, …., m; j=1, … .,n), які задовольнятимуть умовам:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \ x_{ij} \geq 0; \ (i=1,\ldots,m; \ j=1,\ldots,n) \tag{1}$$

У випадку транзитної транспортної задачі модель задачі ускладнюється введенням обмежень на обсяги перевезень через проміжні пункти [7, с. 213]. Якщо позначити через M множину пунктів пропозиції, $M = \{i\}$, $i = \overline{1,m}$; N – множину пунктів попиту, $N = \{j\}$, $j = \overline{1,n}$; T – множину транзитних пунктів, $T = \{\tau\}$, $\tau = \overline{1,u}$, G – множину всіх вузлів транспортної мережі $G = \{\gamma\}$, $\gamma = \overline{1,w}$, то цільова функція і обмеження попиту/пропозиції для збалансованої T-задачі приймуть вигляд відповідно (2) та (3) і (4):

$$\sum_{t=1, t\in N \cup T, g\in M\cup T}^{w-m} \ \sum_{g=1, g\in M\cup T, t\in N\cup T}^{w-n} c_{gt} x_{gt} \to \min \tag{2}$$

$$\sum_{t=1, t\in N \cup T}^{w-m} x_{it} = a_i; \quad \sum_{g=1, g\in M \cup T}^{w-n} x_{gj} = b_j; \tag{3}$$

$$\sum_{g=1, g\in M \cup T, t\in T}^{w-n} x_{gt} \leq B, \quad \sum_{t=1, t\in N \cup T, g\in T}^{w-m} x_{gt} \leq B \tag{4}$$

де B – обсяг буферу, який розраховується за (5):

$$B = \sum_{j=1, j\in N}^{n} b_j = \sum_{i=1, i\in M}^{m} a_i \ . \tag{5}$$

Для незбалансованої транспортної задачі обмеження попиту / пропозиції для пунктів попиту пропозиції зберігають вигляд (3) або (4), а обсяг буферу розраховується як сума попиту чи пропозиції:

$$B = \max\left\{ \sum_{j=1, j\in N}^{n} b_j, \ \sum_{i=1, i\in M}^{m} a_i \right\}. \tag{6}$$

У разі наявності транзитних пунктів попиту та пропозиції множини M та N складаються з двох підмножин:

$$M = M_I \cup M_T, \ N = N_I \cup N_T, \tag{7}$$

де M_I – множина справжніх («істинних») пунктів пропозиції потужністю m_I=k, $M_I = \{i\}$, $i = \overline{1,k}$; M_T – множина транзитних пунктів пропозиції потужністю m_t=m-k, $M_T = \{i\}$, $i = \overline{k+1,m}$; N_I – множина справжніх («істинних») пунктів попиту потужністю n_i=l, $N_I = \{j\}$, $j = \overline{1,l}$; N_T – множина транзитних пунктів попиту потужністю n_t=n-l, $N_T = \{j\}$, $j = \overline{l+1,n}$. Тоді множина транзитних пунктів T^* складатиметься з суто транзитних пунктів T та транзитних пунктів пропозиції M_T та попиту N_T: $T^* = M_T \cup N_T \cup T$.

Тоді для збалансованої задачі обмеження пропозиції / попиту для справжніх пунктів попиту та пропозиції приймають вигляд, аналогічний (3) з урахуванням розширення множини транзитних пунктів до T*:

$$\sum_{t=1, t\in N_I \cup T^*, i\in M_I}^{w-m_i} x_{it} = a_i; \quad \sum_{g=1, g\in M_I \cup T^*, j\in N_I}^{w-n_i} x_{gj} = b_j, \tag{8}$$

для суто транзитних пунктів зберігають вигляд аналогічний (4):

$$\sum_{g=1,g\in M_I \mathbf{U} T^*, t\in T}^{w-n_i} x_{gt} \le B, \qquad \sum_{t=1,t\in N_I \mathbf{U} T^*, g\in T}^{w-m_i} x_{gt} \le B \tag{9}$$

а для транзитних пунктів пропозиції/попиту приймають вигляд (10), (11):

$$\sum_{t=1,t\in N_I \mathbf{U} T^*, i\in M_T}^{w-m_i} x_{it} \le B + a_i, \qquad \sum_{g=1,g\in M_I \mathbf{U} T^*, i\in M_T}^{w-n_t} x_{gi} \le B + a_i \tag{10}$$

$$\sum_{t=1,t\in N_I \mathbf{U} T^*, j\in N_T}^{w-m_i} x_{jt} \le B + b_j, \qquad \sum_{g=1,g\in M_I \mathbf{U} T^*, j\in N_T}^{w-n_t} x_{gj} \le B + b_j. \tag{11}$$

У [7, с. 213] обґрунтована можливість розв’язання задачі з проміжними пунктами традиційними для *Т*-задачі методами, застосування яких автоматично забезпечує зв’язність оптимальних маршрутів перевезень. При розв’язанні такої моделі у MS Excel Solver як задачі лінійного програмування за симплекс-методом з маршруту будуть усунуті всі проміжні пункти за винятком суміжних з пунктами справжнього попиту і пропозиції.

Для запобігання цьому необхідно ввести у модель задачі обмеження зв’язності оптимальних маршрутів перевезень. Враховуючи, що реалізація умов (3) та (8) забезпечує включення справжніх пунктів попиту та пропозиції у маршрут перевезень, обмеження зв’язності оптимальних маршрутів перевезень може бути реалізовано як обмеження балансу потоків через транзитні пункти.

Умова балансу потоків для суто транзитних пунктів приймає вигляд (12), для транзитних пунктів пропозиції і попиту – (13) та (14) відповідно:

$$\sum_{g=1,g\in M_i \mathbf{U} T^*, t\in T}^{w-n_i} x_{gt} = \sum_{g=1,g\in N_I \mathbf{U} T^*, t\in T}^{w-m_i} x_{tg}, \tag{12}$$

$$\sum_{g=1,g\in N_I \mathbf{U} T^*, i\in M_T}^{w-m_i} x_{ig} - \sum_{t=1,t\in M_I \mathbf{U} T^*, i\in M_T}^{w-n_i} x_{ti} = a_i, \tag{13}$$

$$\sum_{g=1,g\in M_I \mathbf{U} T^*, j\in N_T}^{w-n_i} x_{gj} - \sum_{g=1,t\in N_I \mathbf{U} T^*, j\in N_T}^{w-m_t} x_{jt} = b_j. \tag{14}$$

У запропонованому підході для встановлення обмежень зв’язності остаточного графу та балансу потоків використовуються властивості табличного представлення структури остаточної частини графа таблицею змінних, яка після знаходження шуканих значень x_{ij} може розглядатися як фрагмент його матриці суміжності з урахуванням того, що:

і рядки, і стовпці таблиці змінних відповідають, як і у матриці суміжності, вершинам графа;

кожна вершина повторюється, як і у матриці суміжності, і у рядку заголовків стовпців, і у рядку заголовків рядків не більше 1 разу;

наявність відмінного від 0 значення на перетині i-го стовпця і j-го рядка, як і у матриці суміжності, вказуватиме на суміжність вершин i та j і входження ребра x_{ij} у склад остаточного графа.

Від матриці суміжності заповнена таблиця змінних відрізнятиметься відсутністю стовпців та рядків, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, проте, за очевидної відсутності у маршруті ребер типу «петля», даного фрагменту матриці суміжності достатньо для однозначного задання структури маршруту перевезень. Тоді аналогічним способом сформований фрагмент матриці суміжності вихідного графа, у якому виключені стовпці та рядки, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту відповідно, буде однозначно задавати структуру вихідного графа, оскільки у ньому буде втрачена лише інформація про комірки K_{ii} та K_{jj}, де i, j – номери вершин графа, що відповідають справжнім пунктам пропозиції та попиту. Оскільки у графі моделі задачі не може існувати ребер типу «петля», то значення цих комірок все одно будуть нульовими. Отримана підматриця буде збігатися за розмірністю з матрицею (таблицею) вартостей, що дає підставу розглядати останню як різновид під матриці суміжності вихідного графа.

Якщо такий фрагмент матриці суміжності, для якого ми пропонуємо назву «редукованої матриці суміжності», сформувати, розставивши рядки і стовпці, що відповідають пунктам пропозиції, попиту і транзиту, у тому ж порядку, що і у транспортній таблиці та у матриці невідомих, то отримана матриця задаватиме обмеження на структуру не лише вихідного, а і остаточного графа, який складається з маршрутів перевезень. Якщо позначити K_{gh} значення комірки редукованої матриці суміжності, яка відповідає перетину g-го рядка, який відповідає g-й вершині графа, і h-го стовпця, який відповідає h-й вершині графа, а X_{gh} – значення відповідної комірки матриці змінних, то обмеження на структуру остаточної частини графа прийме вигляд:

$$X_{gh} = \begin{cases} X_{gh} = 0 & \text{якщо} \quad K_{gh} = 0 \\ X_{gh} \ge 0 & \text{якщо} \quad K_{gh} \ne 0 \end{cases}, \tag{15}$$

що відбиває факт неможливості появи у частини графа ребер, відсутніх у вихідному графі.

Реалізація цього обмеження на аркуші Excel може досягатися двома способами:

якщо при заповненні редукованої матриці суміжності вихідного графа на перетині стовпця і рядка, що відповідають суміжним вершинам вихідного графа, вводити не 1, як у традиційній матриці суміжності, а максимально можливий обсяг перевезень через довільний пункт $X_{\max}$, то у модель задачі додасться обмеження:

$$X_{gh} \le K_{gh}, \tag{16}$$

яке разом з початковим обмеженням $X_{gh} \ge 0$ забезпечує виконання обмеження структури графа. Аналогічний результат може бути отриманий домноженням редукованої традиційної матриці суміжності графа на максимально можливий обсяг перевезень через пункти $X_{\max}$, який визначається як:

$$X_{\max} = \max\{B; a_{it}^{\max} + B; b_{jt}^{\max} + B\}, \tag{17}$$

де a_{it}^{max}, b_{jt}^{max} – максимальні обсяги пропозиції та попиту в транзитних пунктах пропозиції та попиту відповідно для випадку, коли транзитними можуть бути не лише проміжні, але й кінцеві пункти пропозиції чи попиту;

2) якщо редукована матриця суміжності задається традиційно, і K_{gh} приймає значення з множини булевих змінних 0, 1, то на змінні X_{gh} має накладатися додаткове обмеження X_{gh} = 0 для всіх K_{gh} = 0. Це обмеження легко досягається без використання функції ЕСЛИ, введення якої у модель задачі виводить останню з класу задач лінійного програмування, шляхом поелементного множення комірок матриці невідомих на відповідні комірки редукованої матриці суміжності вихідного графа, що виключає з остаточного графа неіснуючі у вихідному графі ребра.

Умова балансу потоків як умова рівності сум вхідних і вихідних потоків для кожного з транзитних пунктів реалізується у моделі задачі на аркуші Excel через умову рівності сум по рядках і стовпцях таблиці невідомих, які відповідають тим самим транзитним пунктам, оскільки сума по рядку задає сумарний вихідний потік з кожного пункту, а по стовпцю – сумарний вхідний потік. Для справжнього пункту пропозиції у матриці невідомих існує лише рядок, і сума по ньому дорівнює обсягу пропозиції; для справжнього пункту попиту – лише стовпець, і сума по ньому дорівнює обсягу попиту; для транзитних пунктів попиту різниця між вхідними та вихідними потоками має дорівнювати відповідним обсягам попиту, для транзитних пунктів пропозиції обсягу пропозиції має дорівнювати різниця між вихідними і вхідними потоками. У випадку незбалансованих транспортних задач строга рівність має перетворюватися на нестрогу, але має додаватися умова вивезення / ввезення максимально можливого сумарного обсягу пропозиції / попиту.

Зазначене представлення графа є придатним для розв’язання задач на пошук мінімального чи шляху на графі та задачі на мінімальне покриття графа.

У випадку задачі на пошук мінімального шляху між парою вершин *i* та *j* графа *G*, що містить *w* вершин, одна з цих вершин, наприклад *i*, приймається за пункт пропозиції (початок шляху), а друга, *j*, – за пункт попиту (кінець шляху) з обсягами попиту і пропозиції $a_i = b_j$ =1 [7, с.217]. Решта вершин розглядаються як суто транзитні (приналежні до множини *T*). Розрахований за (5) обсяг буферу *B* = 1. Відповідно змінні приймають значення 1 у разі входження вузла у мінімальний шлях, і 0 = у протилежному випадку. Математична модель задачі наведена нижче:

$$\sum_{t=1, t\in j\mathbf{U}T, g\in i\cup T}^{w-1} \; \sum_{g=1, g\in i\cup T, t\in j\cup T}^{w-1} c_{gt} x_{gt} \to \min; \tag{18}$$

$$x_{gt} \in [0,1],\ \forall g, \forall t \in G; \tag{19}$$

$$\sum_{t=1, t\in j\mathbf{U}T}^{w-1} x_{it} = 1; \qquad \sum_{g=1, g\in i\mathbf{U}T}^{w-1} x_{gj} = 1; \tag{20}$$

$$\sum_{g=1, g\in i\mathbf{U}T, t\in T}^{w-2} x_{gt} \le 1, \qquad \sum_{t=1, t\in j\mathbf{U}T, g\in T}^{w-2} x_{gt} \le 1 \tag{21}$$

$$\sum_{g=1, g\in i\mathbf{U}T, t\in T}^{w-1} x_{gt} = \sum_{g=1, g\in j\mathbf{U}T, t\in T}^{w-1} x_{tg} . \tag{22}$$

Реалізацію зазначеного підходу для пошуку найкоротшого шляху між парою вершин графу – вершиною 1 та 8 – розглянемо для графа на рис. 1. Вершини 1, 8 розглядаємо відповідно як пункти пропозиції та попиту обсягом 1, решту вершин – вершини 2, 3, 4, 5, 6, 7 – як транзитні пункти з обсягом і пропозиції, і попиту у розмірі обсягу буферу, який за (5) дорівнює 1.

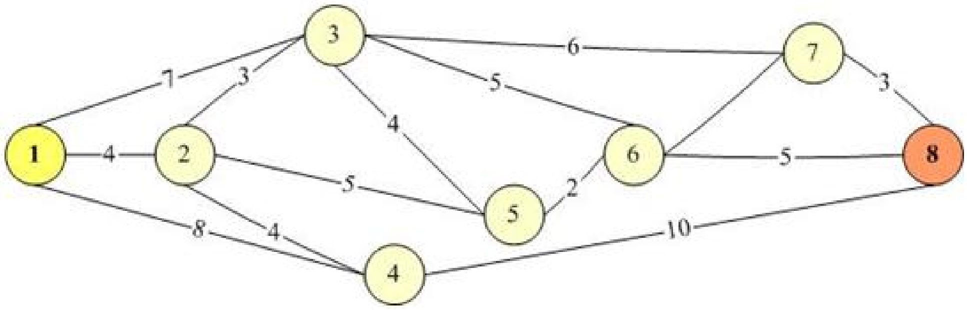

Рис. 1. Граф як транзитна транспортна мережа з нетранзитним пунктами пропозиції (п. 1) та попиту (п. 8), обсяг попиту і пропозиції – 1

Матриця невідомих набуває розмірності (n-1)×(n-1); серед пунктів пропозиції відсутній лише п. 8 (справжній пункт попиту), серед пунктів попиту – п. 1 (справжній пункт пропозиції) (рис. 2).

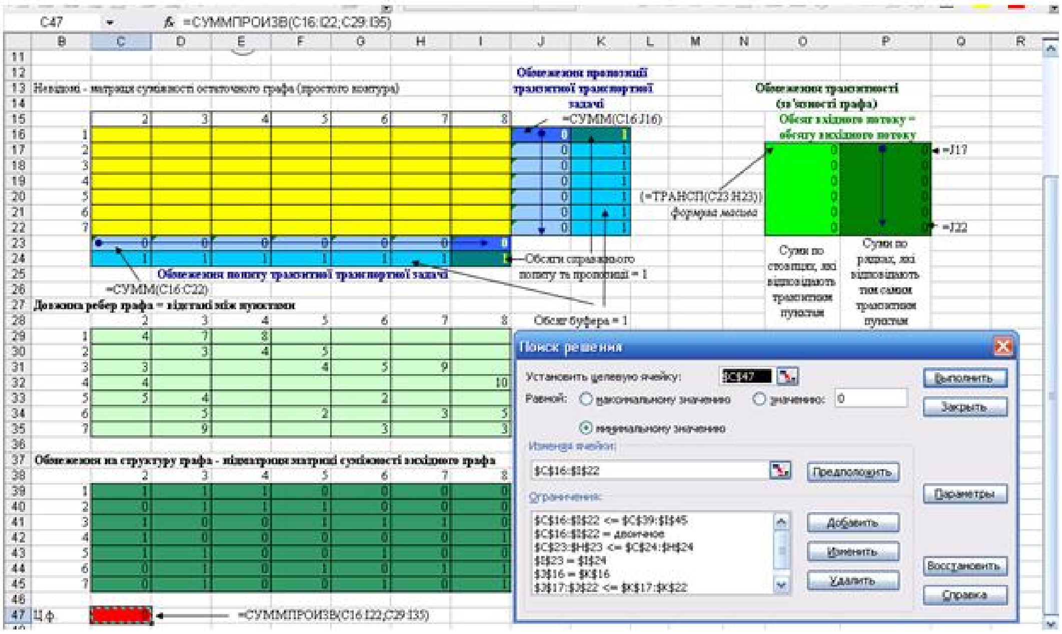

Рис. 2. Модель задачі на пошук мінімального шляху на графі (рис. 1) як транзитної транспортної задачі (*T*-задачі) у Solver MS Excel

Реалізація моделі задачі у MS Excel відображена у табл. 1.

Таблиця 1

Реалізація елементів моделі задачі на пошук мінімального шляху на графі як транзитної Т-задачі (рис. 2) на аркуші MS Excel

Адреса комірки	Формула	Розповсюджена на комірки	Зміст, виконуване завдання
1	2	3	4
C16:I22			Транспортна таблиця (матриця) невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточного графа, який відповідає маршруту перевезень
C29:I35	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами		Транспортна таблиця (матриця) вартостей, яка містить значення відстаней між суміжними вершинами
C39:I45	0∧1		Редукована матриця суміжності вихідного графа; задає обмеження на структуру остаточного графа
C23	=СУММПРОИЗВ(C16:C22;C39:C45)	C23:I23	Обсяг вантажу, вивезеного зі справжніх та транзитних пунктів пропозиції з урахуванням обмежень на структуру графа
K16	1, чисельне значення обсягу пропозиції у п. 1		Чисельне значення «обсягу пропозиції» (вихідного потоку) у вершині-початку
I24	1, чисельне значення обсягу попиту у п. 8		Чисельне значення «обсягу попиту» (вхідного потоку) у вершині-кінці

Продовження табл. 1

1	2	3	4
К17	1, чисельне значення обсягу буфера	К17:К22	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (5)
С24	1, чисельне значення обсягу буфера	С24:Н24	Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (5)
О17:О22	{=ТРАНСП(С23:Н23)}	Формула масиву	Сумарний вхідний потік у кожний з транзитних пунктів за (22)
Р17	=J17	Р17:Р22	Сумарний вихідний потік з кожного з транзитних пунктів за (22)
С47	=СУММПРОИЗВ(С16:І23; С29:І35)		Цільова функція – довжина шляху мінімального шляху за (18)

Постановка зазначеної задачі як оптимізаційної передбачає ідентифікацію у діалоговому вікні Пошуку рішення надбудови Solver (Пошук рішення) MS Excel: типу екстремуму (мінімум); адрес комірок, які містить цільову функцію (С47) та змінні (С16:І22); обмежень (рис. 2) та параметрів пошуку (рис. 3).

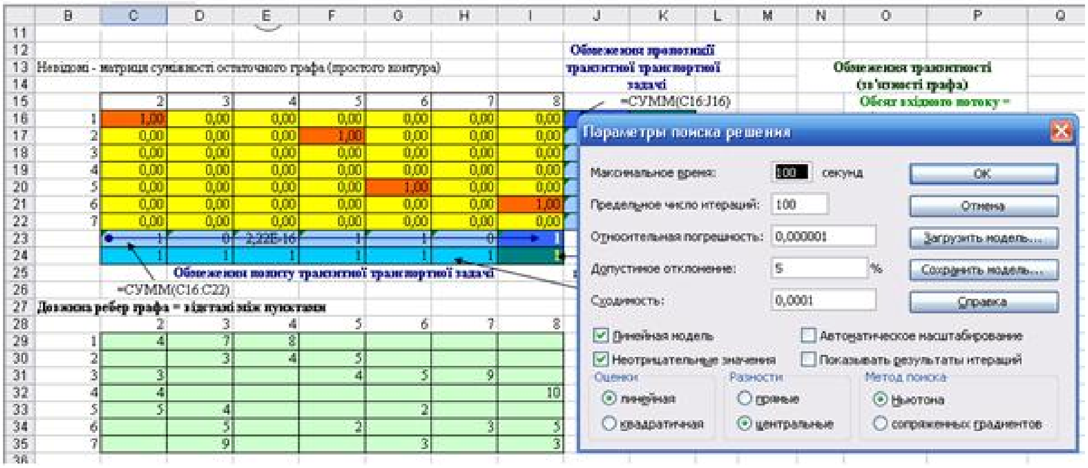

Рис. 3. Параметри пошуку процедури «Пошук рішення» для задачі (рис. 1, 2) та використання умовного форматування (виділення кольором ненульових комірок матриці змінних) для візуалізації мінімального шляху

Оскільки жодна з формул моделі задачі не містить ані нелінійних, ані розривних функцій, то задача відноситься до класу задач лінійного програмування, що дає змогу обрати для її розв'язання підтримуваний Solver симплекс-метод, встановивши у вікні параметрів пошуку прапорець «Лінійна модель». Обмеження невід'ємності змінних є традиційним для *Т*-задачі. Зміст обмежень моделі у полі «Обмеження» діалогового вікна «Пошук рішення» (рис. 2) розкривається у табл. 2.

Таблиця 2

Реалізація обмежень моделі задачі на пошук мінімального шляху на графі як транзитної Т-задачі (рис. 2) у Solver MS Excel

№	Модель обмеження	Зміст обмеження
1.	\$C\$16:\$I\$22=двійкове	Обмеження (19) двійковості (булевості) змінних
2.	\$J\$16=\$K\$16	Обмеження задоволення пропозиції та попиту 20) для справжніх пунктів пропозиції та попиту відповідно – початкової і кінцевої вершин графа
3.	\$I\$23=\$I\$24	
4.	\$J\$17:\$J\$22<=\$K\$17:\$K\$22	Обмеження пропозиції та попиту (21) для транзитних пунктів транспортної мережі – проміжних вершин графа
5.	\$C\$23:\$H\$23<=\$C\$24:\$H\$24	
6.	\$O\$17:\$O\$22=\$P\$17:\$P\$22	Умова балансу потоків (22) для транзитних пунктів транспортної мережі – проміжних вершин графа

Аналогічне представлення графа можна застосувати для розв'язання задачі на знаходження мінімального остівного (фундаментального) дерева графа як транзитної транспортної задачі. У цьому випадку граф G з w вершинами доцільно представити у вигляді транзитної транспортної мережі з одним довільно обраним пунктом справжньої пропозиції; решту вершин графа можна розглядати як транзитні пункти попиту з попитом обсягом 1. Оскільки фундаментальне дерево графа містить всі вершини, тобто попит має бути задоволений у всіх транзитних пунктах попиту, то обсяг попиту слід прийняти рівним кількості вершин мінус 1; тоді обсяг буферу також дорівнюватиме w-1. Задача є різновидом транзитної транспортної задачі з $N_T = w$-1 транзитними пунктами попиту; математична модель задачі для графа G з w

вершинами у разі прийняття i-ї вершини за справжній пункт пропозиції приймає вигляд:

$$\sum_{t=1, t\in N_t, g\in i\cup N_t}^{w-1} \; \sum_{g=1, g\in i\cup N_t, t\in N_T}^{w} c_{gt} x_{gt} \to \min; \tag{23}$$

$$x_{gt} = 0, \ldots, w\text{-}1, \; \forall g, \forall t \in G; \tag{24}$$

$$\sum_{t=1, t\in N_T}^{w-1} x_{it} = w-1 \tag{25}$$

$$\sum_{g=1, g\in i\mathbf{U}N_T, t\in N_T}^{w} x_{gt} \le w, \qquad \sum_{t=1, t\in N_t, g\in T}^{w-1} x_{gt} \le w \tag{26}$$

$$\sum_{g=1, g\in i\mathbf{U}N_T, t\in T}^{w-1} x_{gt} - \sum_{g=1, g\in N_T, t\in T}^{w-1} x_{tg} = 1. \tag{27}$$

Реалізацію зазначеного підходу для пошуку мінімального остівного дерева розглянемо для графа на рис. 1. За справжній пункт пропозиції з обсягом пропозиції 1 приймемо вершину i =1, решту вершин розглянемо як транзитні пункти попиту з обсягом попиту $b_j = 1$, $j = 2 \div 8$. Оскільки граф має $w = 8$ вершин, то обсяг буферу приймемо B= w-1 =7. Матриця невідомих набуває розмірності (n)×(n-1); серед пунктів попиту відсутній лише п.1 (справжній пункт пропозиції) (рис. 4).

Реалізація моделі задачі у MS Excel (рис. 4) деталізована у табл. 3.

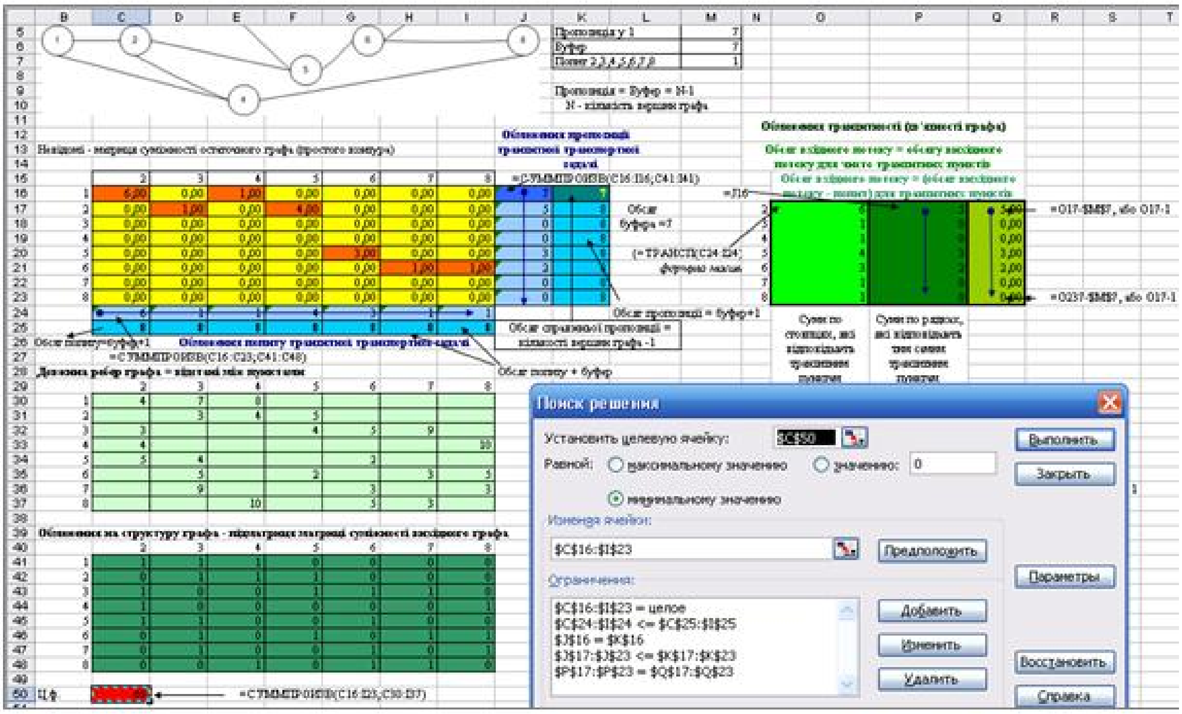

Рис. 4. Модель задачі на пошук мінімального остівного дерева графа (рис. 1) як транзитної *T*-задачі з умовою балансу потоків у Solver MS Excel

Як видно з табл. 1 та 3, умова балансу потоків через транзитні пункти (масив комірок O17:Q23) відбиває необхідність забезпечення попиту у кожній вершині графа у обсязі 1 (комірки Q17:Q23), що тотожне забезпеченню входження у дерево кожної вершини графа. Заборона на формування циклів забезпечується характером шуканого екстремуму (мінімум). Масив комірок, призначених для формування умови балансу потоків, доповнений додатковим стовпцем Q17:Q23 який, містить формули, що враховують необхідність задоволення у вершинах графа, прийнятих за транзитні пункти попиту, реального попиту обсягом 1 за (27).

Формування моделі задачі у вікні «Пошук рішення» надбудови Solver та встановлення параметрів пошуку проводиться аналогічно задачі на пошук мінімального шляху на графі з урахуванням змін у обмеженнях, що відбивають умову балансу потоків для транзитних пунктів попиту (табл. 4).

Таблиця 3

Реалізація елементів моделі задачі на пошук мінімального остівного дерева графа (рис. 4) на аркуші MS Excel

Адреса комірки	Формула	Розповсюджена на комірки	Зміст, виконуване завдання
1	2	3	4
C16:I23			Транспортна таблиця (матриця) невідомих, яка є редукованою матрицею суміжності остаточного графа, який відповідає маршруту перевезень
C30:I37	Чисельні значення відстаней між суміжними вершинами		Транспортна таблиця (матриця) вартостей, яка містить значення відстаней між суміжними вершинами
C41:I48	$0 \wedge 1$		Редукована матриця суміжності вихідного графа; задає обмеження на структуру остаточного графа
M5	7, чисельне значення обсягу пропозиції у п. 1		Обсяг пропозиції у п.1, прийнятому за справжній пункт пропозиції, за (25)
M7	1, чисельне значення справжнього попиту у всіх вершинах графа, крім п.1		Чисельне значення справжнього по-питу у всіх вершинах графа, прийняв-тих за транзитні пункти попиту
M6	=МАКС(M5;M7)		Чисельне значення обсягу буфера, розраховане за (6)
K17	=$M$7+$M$6	K17:K23	Чисельне значення граничного обсягу пропозиції у транзитних пунктах попиту за (10)
C25	=$M$7+$M$6	C25:I25	Чисельне значення граничного обсягу попиту у транзитних пунктах попиту за (11)
C24	=СУММПРОИЗВ(C16:C23;C41:C48)	C24:I24	Обсяг «пропозиції», ввезеної у кожну вершину графа, прийняту за транзит-ний пункт попиту, з урахуванням об-межень на структуру графа (СУММ – дає суму по рядку, а ПРОИЗВ забез-печує невключення у остаточний граф неіснуючих у вихідному графу ребер завдяки обмеженню балансу потоків)
J16	=СУММПРОИЗВ(C16:I16;C41:I41)	J16:J23	Обсяг «пропозиції», вивезеної з кожної вершини графа з урахуванням обмежень на структуру графа
O17:O22	{=ТРАНСП(C24:I24)}	Формула масиву	Сумарний обсяг «вантажу», ввезеного у кожну з вершин графа, прийняту за транзитний пункт попиту за (14), (27) (сумарний вхідний потік)
P17	=J17	P17:P23	Сумарний обсяг вантажу, вивезеного кожної з вершин графа, прийнятої за транзитний пункт попиту за (14), (27) (сумарний вихідний потік)
Q17	=O17-$M$7	Q18:Q23	Сумарний обсяг вантажу, який має бути вивезений з кожного з транзитних пунктів попиту за (14), (27) для задоволення попиту у 1, тобто для забезпечення «остівності» дерева
C47	=СУММПРОИЗВ(C16:I23;C30:I37)		Цільова функція – мінімальне остівне дерево за (23)

Таблиця 4

Реалізація обмежень моделі транзитної Т-задачі (рис. 4) у Solver MS Excel

№	Модель обмеження	Зміст обмеження
1.	$C$16:$I$23=ціле	Обмеження цілочисельності змінних (24)
2.	$J$16=$K$16	Обмеження задоволення пропозиції (25) для вершини графа 1, прийнятої за справжній пункт пропозиції
3.	$J$17:$J$22<=$K$17:$K$22	Обмеження пропозиції та попиту (26) для вершин графа 2 ÷ 8, прийнятих за транзитні пунктів попиту обсягом 1
4.	$C$23:$H$23<=$C$24:$H$24	
5.	$P$17:$P$23=$Q$17:$Q$23	Умова балансу потоків (27) для вершин графа 2 ÷ 8, прийнятих за транзитні пунктів попиту обсягом 1

Виконання оптимізаційної процедури «Пошук рішення» повертає перший знайдений варіант мінімального остівного дерева. Змінюючи початкові значення змінних, можна, у разі їх наявності, отримати інші варіанти остівних дерев тої самої довжини. Аналогічні міркування справедливі і для випадку пошуку мінімального шляху на графі.

Висновки

Запропонований підхід дає змогу автоматизувати розв’язання багатьох оптимізаційних задач, які можуть бути зведені до задач на пошук мінімального шляху та мінімального покриття графу. Водночас при зміні типу екстремуму, як це відбувається, наприклад, у задачах на визначення тривалості проекту, підхід стає непридатним внаслідок неможливості коректного встановлення заборони на цикли у остаточних графах.

Література

1. Черноморов Г.А. Теория принятия решений / Черноморов Г.А. – Новочеркасск : «Известия вузов: Электромеханика». – 2002. – 276 с.
2. Werneck R.F. Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms. – Microsoft Research / Renato F. Werneck – SiliconValley : MIDAS. – 2010. – 123 p., pp. 107 – 116.
3. Седжвик Р. Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах / Роберт Седжвик. – СПб. : ООО»ДиаСофтЮП, 2002. – 496 с.
4. Кузьмичов А. І., Медведєв М. Г. – Математичне програмування в Excel : навч. посіб. / А.І. Кузьмичов, М.Г. Медведєв. – К. : Вид-во Європ. Ун-ту, 2005 – 320 с.
5. . Леоненков А.В. Решение задач оптимизации в среде MS Excel / А. Леоненков – СПб. : БХВ, 2005. – 704 с.
6. Критический путь [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://exsolver.narod.ru/NFP/NFP_short_way.html.
7. Таха Х. Введение в исследование операций. 6-е изд. / Х. Таха. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2001. – 912 с.
8. Зюков М.Е. Обучение транспортной задаче с использованием Microsoft Excel / М. Зюков, М. Зюкова // Вісник ЛНУ ім. Т. Шевченка. – 2010. – № 22 (209). – Ч. ІІІ. – С. 130–136.
9. Мур Д. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Д.Х. Мур, Л.Р. Удерфорд. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024 с.

References

1. Chernomorov G.A. Teoria priniatija reshenij/ -Novocherkassk:”Izvestuja vuzov.Elektromehanika”.-2002/-276 c.-pp.28-73(in Rusian)
2. Werneck R.F. Shortest Paths and Experimental Evaluation of Algorithms. – Microsoft Research / Renato F. Werneck – SiliconValley:MIDAS. – 2010. – 123 p., pp. 107 – 116.
3. Sedgvick R. Fundamentalnye algoritmy na C++. Algoritmy na grafah./Robert Sedgvick- -Spb:OOO „DiasoftUP”, 2002 -496 c (in Russian)
4. Kuzmichov A.I.,Medvedev M.G. – Matematychne programuvannia v Excel:Navch. Posib./A.I. Kuzmichov - K.Vyd-vo Evrop.univ., 2005-320 c (in Ukrainian)
5. Leonenkov A.V. Reshenie zadach optimizacii v srede MS Excel/ A.Leonenkov –S.-Peterburg:BHV-S-Peterburg,2005-704 c (in Russian)
6. Kriticheskij put’[El.source] http://exsolver.narod.ru/NFP/NFP_short_way.html
7. Taha H. Vvedenie v issledovanie operacyj.6 ed./ H. Taha- -M.:Izd. dom „Viljams”2001-912 c(in Russian)
8. Ziukov M.E. Obuchenie transportnoj zadache s ispol’zovaniem Microsoft Excel/M. Ziukov, M.Ziukova//Visnyk LNU im.Shevchenka.-2010, №22(209)-Ch.III, pp.130-136
9. Mur D.Ekonomicheskoe modelirovanie v Microsoft Excel /D.Mur, L.Uderford M.:Izdatelskij dom „Viljams”2004-1024 c(in Russian)

Рецензія/Peer review : 26.7.2013 р. Надрукована/Printed :29.9.2013 р.
Рецензент: д.т.н, проф. каф.. ЕЗІКТ НУ «Львівська політехніка» Романишин Ю.М.