

## РАСЧЕТ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

Рассмотрены примеры расчета цилиндрических оболочек численно-аналитическим методом граничных элементов на основе полученных ранее авторами аналитических зависимостей. Для оценки точности результатов эти же задачи решены методом конечных элементов в программе ANSYS.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, метод граничных элементов, метод конечных элементов, Scilab, ANSYS.

N.G. SURYANINOV, G.B. PARASKA

Khmelnytsky National University

Y.V. KORNIENKO

Odessa National Polytechnic University

## CALCULATION OF CYLINDRICAL SHELLS BY NUMERICAL METHODS

The examples of calculation of cylindrical shells numerical-analytical boundary element method based on previously obtained by the authors analytical relationships. To assess the accuracy of these same problems are solved by finite element method in ANSYS program.

Keywords: cylindrical shell, boundary element method, finite element method, Scilab, ANSYS.

## Введение

Современная промышленность характеризуется широким применением тонкостенных пространственных конструкций в виде оболочек и пластин различного очертания и размеров во всех важнейших отраслях — машиностроении, промышленном и гражданском строительстве, приборостроении, авиастроении, судостроении, медицине и т.д. Постоянно возрастающие требования практики — экономичность, снижение материалоемкости, повышение степени надежности, более полное использование прочностных характеристик материала и ряд других требований — ставят перед теорией все новые и новые задачи.

Из тонкостенных пространственных конструкций, в частности наибольшее распространение получили цилиндрические оболочки, как наиболее простые. Требования к обеспечению необходимой прочности, устойчивости и несущей способности оболочечных конструкций выдвигают на первый план вопросы, связанные с разработкой методов и алгоритмов расчета их напряженно-деформированного состояния и последующей компьютерной реализации.

В ряде наших предыдущих работ [5, 6] разработан новый подход к расчету цилиндрических оболочек на основе использования численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ). Получена полная система фундаментальных решений задачи, аналитическое выражение функции Грина, построены выражения внешней нагрузки в форме, приемлемой для ЧА МГЭ [3, 4].

В данной работе на основе упомянутых аналитических зависимостей выполнены расчеты замкнутых цилиндрических оболочек постоянной и ступенчато-переменной жесткости. Алгоритмы реализованы в свободно распространяемой программе Scilab [1]. Верификация результатов осуществлена методом конечных элементов в пакете ANSYS [2].

## Результаты исследований

*Расчет цилиндрических оболочек численно-аналитическим методом граничных элементов*

**Задача 1.** Рассмотрим жестко защемленную по торцам цилиндрическую оболочку постоянной жесткости, находящуюся под действием равномерного внешнего давления. Балочная модель такой оболочки, построенная на основании известной аналогии рассматриваемой системы и балки на упругом основании, представлена на рис. 1.

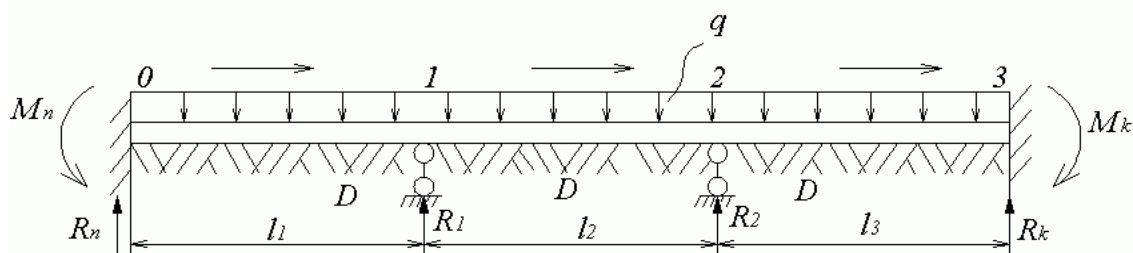


Рис. 1. Балочная модель цилиндрической оболочки с промежуточными опорами

В соответствии с алгоритмом расчета цилиндрической оболочки численно-аналитическим методом граничных элементов [3, 4] разбиваем заменяющую балку (рис. 1) на три одномерных модуля. Начало и конец каждого из них указаны стрелками.

Формируем матрицы начальных и конечных параметров и вектор нагрузки, учитывая в них граничные условия, уравнения равновесия и уравнения совместности перемещений узлов 1 и 2.

$X_* =$	$Dv^{0-1}(0) = 0; Q^{0-1}(l_1)$	;	$Y =$	$Dv^{0-1}(l_1) = 0$	;	$B =$	$-B_{11}^{0-1}(l_1)$
	$D\varphi^{0-1}(0) = 0; Q^{1-2}(l_2)$			$D\varphi^{0-1}(l_1) = D\varphi^{1-2}(0)$			$-B_{21}^{0-1}(l_1)$
	$M^{0-1}(0)$			$M^{0-1}(l_1) = M^{1-2}(0)$			$B_{31}^{0-1}(l_1)$
	$Q^{0-1}(0)$			$Q^{0-1}(l_1)$			$B_{41}^{0-1}(l_1)$
	$Dv^{1-2}(0) = 0; M^{2-3}(l_3)$			$Dv^{1-2}(l_2) = 0$			$-B_{11}^{1-2}(l_2)$
	$D\varphi^{1-2}(0)$			$D\varphi^{1-2}(l_2) = D\varphi^{2-3}(0)$			$-B_{21}^{1-2}(l_2)$
	$M^{1-2}(0)$			$M^{1-2}(l_2) = M^{2-3}(0)$			$B_{31}^{1-2}(l_2)$
	$Q^{1-2}(0)$			$Q^{1-2}(l_2)$			$B_{41}^{1-2}(l_2)$
	$Dv^{2-3}(0) = 0; Q^{2-3}(l_3)$			$Dv^{2-3}(l_3) = 0$			$-B_{11}^{2-3}(l_3)$
	$D\varphi^{1-2}(0)$			$D\varphi^{2-3}(l_3) = 0$			$-B_{21}^{2-3}(l_3)$
	$M^{1-2}(0)$			$M^{2-3}(l_3)$			$B_{31}^{2-3}(l_3)$
	$Q^{1-2}(0)$			$Q^{2-3}(l_3)$			$B_{41}^{2-3}(l_3)$

Анализ матрицы  $X_*$  показывает, что в матрице  $A_*$  нужно обнулить 1, 2, 5 и 9 столбцы, а затем ввести компенсирующие элементы для переноса конечных параметров из  $Y$  в матрицу  $X_*$ .

Уравнение краевой задачи для цилиндрической оболочки по ЧА МГЭ принимает вид (1). Здесь верхний индекс показывает номера узлов, а нижний индекс соответствует положению элемента в матрице.

Решая систему (1) в программе Scilab, получаем кинематические и статические параметры напряженно-деформированного состояния оболочки.

В соответствии с приведенным алгоритмом выполнен расчет цилиндрической оболочки постоянной жесткости на действие внутреннего давления (рис. 2).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
		$-A_{13}$	$-A_{14}$									$Q^{01}(l_1)$	$-B_{11}^{01}(l_1)$
		$-A_{23}$	$-A_{24}$		$-1$							$Q^{12}(l_2)$	$-B_{21}^{01}(l_1)$
		$A_{33}$	$A_{34}$			$-1$						$M^{01}(0)$	$B_{31}^{01}(l_1)$
$-1$		$A_{43}$	$A_{44}$									$Q^{01}(0)$	$B_{41}^{01}(l_1)$
					$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$					$M^{23}(l_3)$	$-B_{11}^{12}(l_2)$
					$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$-1$				$D\varphi^{12}(0)$	$-B_{21}^{12}(l_2)$
					$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$			$-1$		$M^{12}(0)$	$B_{31}^{12}(l_2)$
	$-1$				$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$					$Q^{12}(0)$	$B_{41}^{12}(l_2)$
									$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$Q^{23}(l_3)$	$-B_{11}^{23}(l_3)$
									$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$D\varphi^{23}(0)$	$-B_{21}^{23}(l_3)$
				$-1$					$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$	$M^{23}(0)$	$B_{31}^{23}(l_3)$
								$-1$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$	$Q^{23}(0)$	$B_{41}^{23}(l_3)$

(1)

В результате расчетов в Scilab вычислены значения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, поперечных сил и напряжений. Числовые значения прогибов и напряжений, вычисленные с шагом 1 м в точках верхней образующей оболочки, приведены в табл. 1.

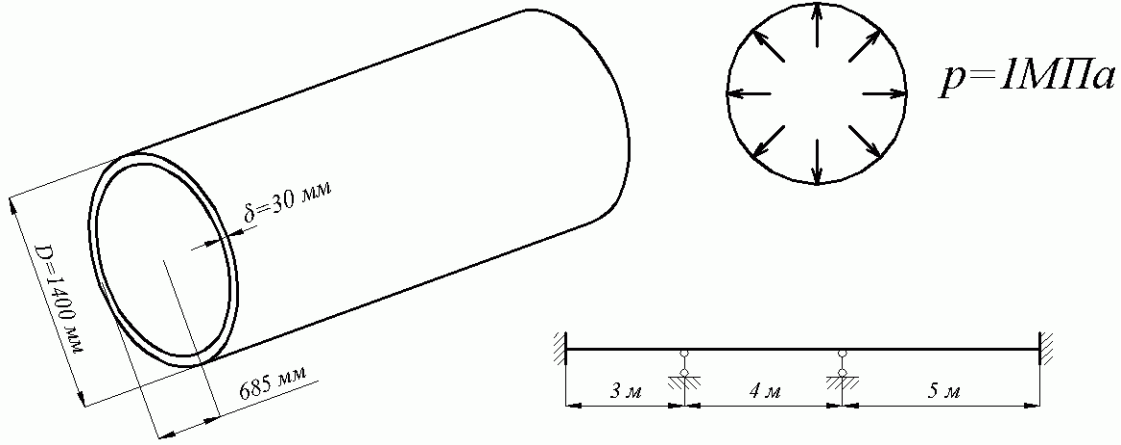


Рис. 2. Цилиндрическая оболочка постоянной жесткости

**Задача 2.** Рассмотрим такую же, как и в предыдущей задаче, жестко защемленную по торцам цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием равномерного внешнего давления, но имеющую ступенчато-переменную жесткость. Балочная модель такой оболочки представлена на рис. 3.

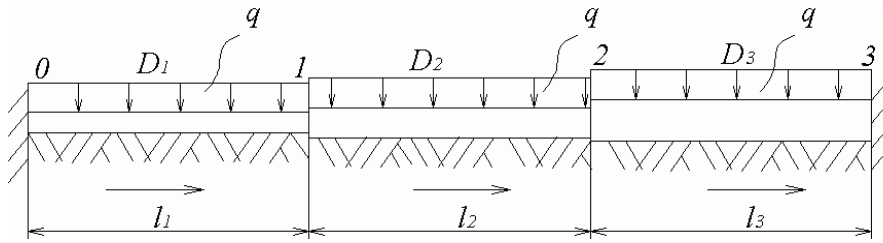


Рис. 3. Балочная модель цилиндрической оболочки с кусочно-переменной жесткостью

Для решения этой задачи снова разбиваем заменяющую балку (рис. 3) на три стержня (модуля) и стрелками указываем начало и конец каждого из них.

Формируем матрицы начальных и конечных параметров и вектор нагрузки, учитывая в них граничные условия, уравнения равновесия и уравнения совместности перемещений узлов 1 и 2.

$$X^* = \begin{matrix} D_1 v^{0-1}(0) = 0; & M^{2-3}(l_3) \\ D_1 \varphi^{0-1}(0) = 0; & Q^{2-3}(l_3) \\ M^{0-1}(0) \\ Q^{0-1}(0) \\ D_2 v^{1-2}(0) \\ D_2 \varphi^{1-2}(0) \\ M^{1-2}(0) \\ Q^{1-2}(0) \\ D_3 v^{2-3}(0) \\ D_3 \varphi^{2-3}(0) \\ M^{2-3}(0) \\ Q^{2-3}(0) \end{matrix} ; Y = \begin{matrix} D_1 v^{0-1}(l_1) = D_1 v^{1-2}(0) \\ D_1 \varphi^{0-1}(l_1) = D_1 \varphi^{1-2}(0) \\ M^{0-1}(l_1) = M^{1-2}(0) \\ Q^{0-1}(l_1) = Q^{1-2}(0) \\ D_2 v^{1-2}(l_2) = D_2 v^{2-3}(0) \\ D_2 \varphi^{1-2}(l_2) = D_2 \varphi^{2-3}(0) \\ M^{1-2}(l_2) = M^{2-3}(0) \\ Q^{1-2}(l_2) = Q^{2-3}(0) \\ D_3 v^{2-3}(l_3) = 0 \\ D_3 \varphi^{2-3}(l_3) = 0 \\ M^{2-3}(l_3) \\ Q^{2-3}(l_3) \end{matrix} ; B = \begin{matrix} -B_{11}^{0-1}(l_1) \\ -B_{21}^{0-1}(l_1) \\ B_{31}^{0-1}(l_1) \\ B_{41}^{0-1}(l_1) \\ -B_{11}^{1-2}(l_2) \\ -B_{21}^{1-2}(l_2) \\ B_{31}^{1-2}(l_2) \\ B_{41}^{1-2}(l_2) \\ -B_{11}^{2-3}(l_3) \\ -B_{21}^{2-3}(l_3) \\ B_{31}^{2-3}(l_3) \\ B_{41}^{2-3}(l_3) \end{matrix}$$

Анализ матрицы  $X^*$  показывает, что в матрице  $A^*$  нужно обнулить первый и второй столбцы, а затем ввести компенсирующие элементы для переноса конечных параметров в матрицу  $X^*$ .

Решая систему (2) в Scilab, получаем кинематические и статические параметры напряженно-деформированного состояния оболочки с кусочно-переменной жесткостью.

В соответствии с приведенным алгоритмом выполнен расчет цилиндрической оболочки кусочно-переменной жесткости на действие внутреннего давления (рис. 4).

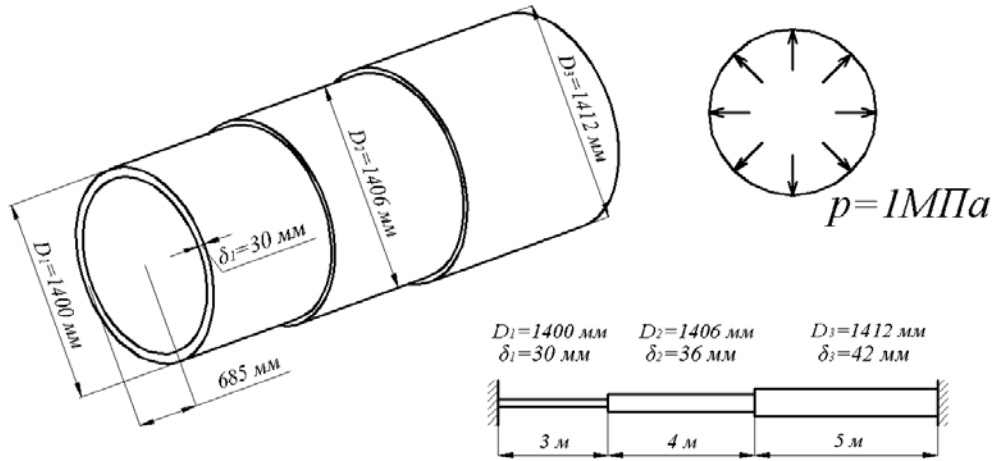


Рис. 4. Цилиндрическая оболочка переменной жесткости

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
		$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-\frac{D_1}{D_2}$								$M^{23}(l_3)$	$-B_{11}^{01}(l_1)$
		$-A_{23}$	$-A_{24}$		$-\frac{D_1}{D_2}$							$Q^{23}(l_3)$	$-B_{21}^{01}(l_1)$
		$A_{33}$	$A_{34}$				-1					$M^{01}(0)$	$B_{31}^{01}(l_1)$
		$A_{43}$	$A_{44}$				-1					$Q^{01}(0)$	$B_{41}^{01}(l_1)$
				$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$-\frac{D_2}{D_3}$				$D_2 v^{12}(0)$	$-B_{11}^{12}(l_2)$
				$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$		$-\frac{D_2}{D_3}$			$D_2 \varphi^{12}(0)$	$-B_{21}^{12}(l_2)$
				$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$				-1	$M^{12}(0)$	$B_{31}^{12}(l_2)$
				$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$					$Q^{12}(0)$	$B_{41}^{12}(l_2)$
								$A_{11}$	$A_{12}$	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$D_3 v^{23}(0)$	$-B_{11}^{23}(l_3)$
								$A_{21}$	$A_{22}$	$-A_{23}$	$-A_{24}$	$D_3 \varphi^{23}(0)$	$-B_{21}^{23}(l_3)$
-1								$-A_{31}$	$-A_{32}$	$A_{33}$	$A_{34}$	$M^{23}(0)$	$B_{31}^{23}(l_3)$
	-1							$-A_{41}$	$-A_{42}$	$A_{43}$	$A_{44}$	$Q^{23}(0)$	$B_{41}^{23}(l_3)$

В результате расчетов в Scilab вычислены значения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, поперечных сил и напряжений. Числовые значения прогибов и напряжений, вычисленные с шагом 1 м в точках верхней образующей оболочки, приведены в табл. 2.

Таблица 2

Напряжения и перемещения в оболочке постоянной жесткости

Координата вдоль оси, м	ЧА МГЭ, Scilab		МКЭ, ANSYS	
	напряжения, МПа	перемещения, м	напряжения, МПа	перемещения, м
1	20,871	0,07133	20,796	0,07132
2	20,644	0,06803	20,796	0,07130
3 (опора)	32,743	0,00164	32,530	0,00162
4	20,643	0,07103	20,796	0,07139
5	20,675	0,07137	20,792	0,07130
6	20,912	0,07139	20,796	0,07130
7 (опора)	32,743	0,00164	32,530	0,00162
8	20,716	0,07131	20,796	0,07140
9	20,715	0,07101	20,792	0,07130
10	20,715	0,07108	20,792	0,07130
11	20,779	0,07135	20,796	0,07139

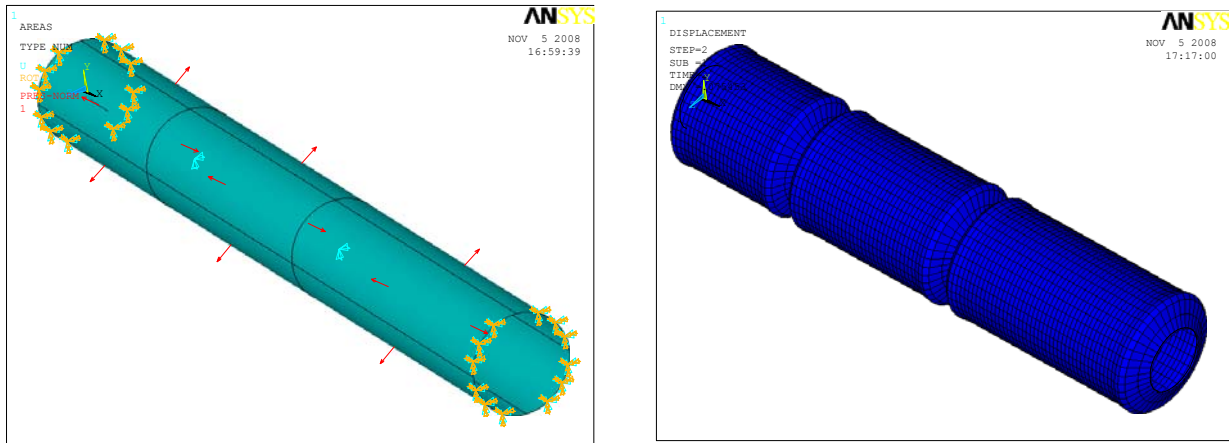
**Расчет цилиндрических оболочек методом конечных элементов в пакете ANSYS**

С целью проверки результатов расчета по алгоритму ЧА МГЭ обе задачи решены в пакете ANSYS.

**Цилиндрическая оболочка постоянной жесткости (задача 1)**

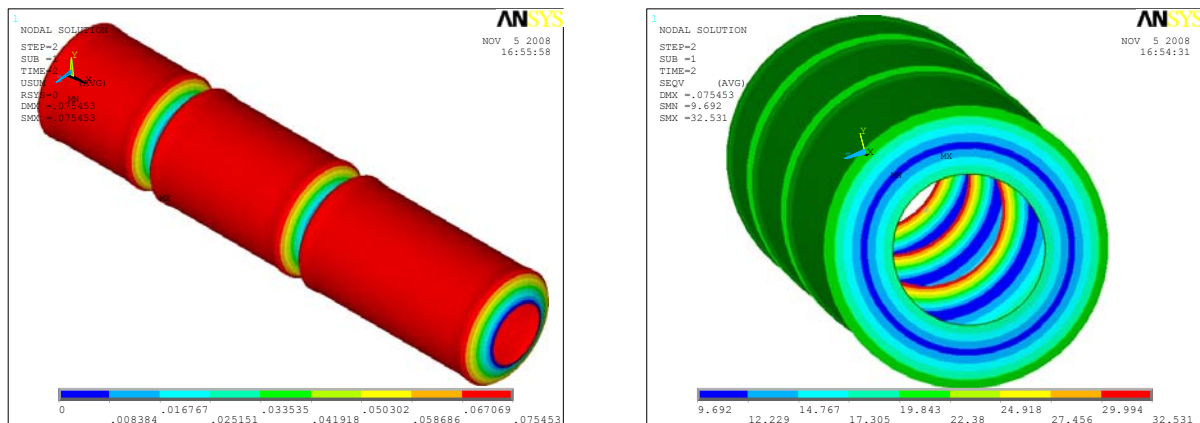
Конечно-элементная модель и деформированная форма оболочки приведены на рис. 5 а, б.

Здесь, как и в MATLAB, вычислены значения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, поперечных сил и напряжений. Числовые значения прогибов и напряжений, вычисленные с шагом 1 м в точках верхней образующей оболочки, приведены в табл. 1.



а б  
Рис. 5. Конечно-элементная модель и деформированная форма

Эпюры напряжений и перемещений показаны на рис. 6 а, б.

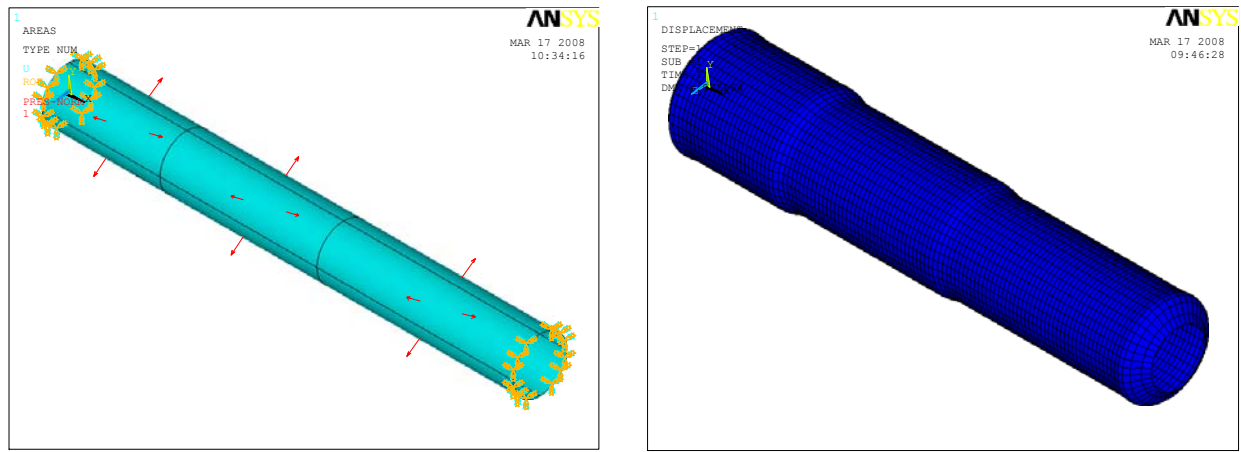


а б  
Рис. 6. Напряжения и перемещения в оболочке

**Цилиндрическая оболочка переменной жесткости (задача 2)**

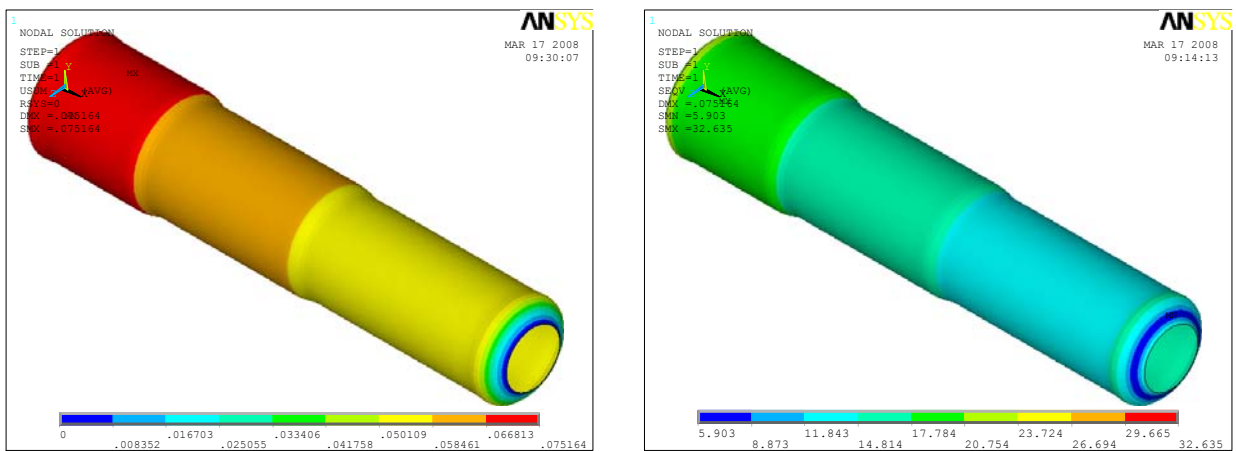
Конечно-элементная модель и деформированная форма оболочки приведены на рис. 7 а, б.

Здесь также вычислены значения прогибов, углов поворота, изгибающих моментов, поперечных сил и напряжений. Числовые значения прогибов и напряжений, вычисленные с шагом 1 м в точках верхней образующей оболочки, приведены в табл. 2.



а б  
Рис. 7. Конечно-элементная модель и деформированная форма

Эпюры напряжений и перемещений показаны на рис. 8 а, б.



а б  
Рис. 8. Напряжения и перемещения в оболочке

Таблица 2

**Напряжения и перемещения в оболочке переменной жесткости**

Координата вдоль оси, м	ЧА МГЭ, Scilab		МКЭ, ANSYS	
	напряжения, МПа	перемещения, м	напряжения, МПа	перемещения, м
1	20,828	0,07419	20,754	0,07114
2	20,731	0,07399	20,751	0,07110
3	19,029	0,06867	19,010	0,06483
4	17,353	0,06294	17,415	0,05923
5	17,377	0,06298	17,415	0,05923
6	17,395	0,06301	17,415	0,05923
7	16,021	0,05814	16,183	0,05480
8	15,026	0,05411	15,034	0,05078
9	15,033	0,05412	15,033	0,05079
10	15,037	0,05414	15,033	0,05080
11	14,974	0,05432	15,023	0,05082

**Выводы**

Сравнение величин напряжений и перемещений, вычисленных двумя методами (ЧА МГЭ и МКЭ), показывает их хорошую сходимость (расхождение составляет 4-5%), что подтверждает правильность полученных нами ранее аналитических зависимостей численно-аналитического метода граничных элементов.

**Литература**

1. Алексеев Е.Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. — М.: ALT Linux; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. — 269 с.  
 2. Дашенко А.Ф. ANSYS в задачах инженерной механики / А.Ф. Дашенко, Д.В. Лазарева, Н.Г. Сурьянинов / Изд. 2-е, перераб. и доп. Под ред. Н. Г. Сурьянинова. — Одесса. — Пальмира, 2011. — 505 с.

3. Дашенко А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2-х томах. — Т.1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
4. Оробей В.Ф. Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
5. Параска Г.Б. Приложение метода граничных элементов к задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Г.Б. Параска, Н.Г. Сурьянинов, Е.В. Слабенко. — Вісник Хмельницького національного університету. — №2, 2012. — С.36-41.
6. Сурьянинов Н.Г. Фундаментальные функции в задаче изгиба длинной цилиндрической оболочки / Н.Г. Сурьянинов, Е.В. Слабенко. — Вісник Одеського національного морського університету. — № (3)36, 2012. — С. 89-96.

## References

1. Alekseev E.R., Chesnokova O.V., Rudchenko E.A. Scilab: Reshenye ynzhenerykh y matematycheskykh zadach. M.: ALT Linux; BYNOM. Laboratoryia znanyi, 2008. 269 s.
2. Dashchenko A.F., Lazareva D.V., Surianynov N.H. ANSYS v zadachakh ynzhenemoi mekhanyky. Izd. 2-e, pererab. y dop. Pod red. N. H. Surianynova. — Odessa. Palmyra, 2011. 505 s.
3. Dashchenko A.F., Kolomyets L.V., Orobei V.F., Surianynov N.H. Chyssenno-analytycheskyi metod hranychnykh elementov. Odessa, VMV, 2010. V 2-kh tomakh. T.1. 416 s.
4. Orobei V.F. N.H. Surianynov Praktikum po resheniyu kraevykh zadach mekhanyky: Uchebnoe posobyе dlia studentov tekhnicheskyykh spetsyalnostei. Odessa: Astroprynt, 2011. 408 s.
5. Paraska H.B., Surianynov N.H., Slabenko E.V. Prylozhenye metoda hranychnykh elementov k zadache yzghyba dlynnoi tsylyndrycheskoi obolochky. Bulletin of Khmelnytsky National Uuniversity. Issue 2, 2012. S. 36–41.
6. Surianynov N.H., Slabenko E.V. Fundamentalnye funktsyy v zadache yzghyba dlynnoi tsylyndrycheskoi obolochky. Visnyk Odeskoho natsionalnoho morskoho universytetu. Vol. (3)36, 2012. S. 89–96.

Рецензія/Peer review : 9.7.2013 р. Надрукована/Printed :21.11.2013 р.  
Рецензент: Параска Г.Б., д.т.н., проф.

УДК 534.833

**В.В. СТРЕЛЬБИЦКИЙ**

Хмельницький національний університет

### НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕМПФИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ СОСТАВНЫХ БАЛОК

*Изложены результаты экспериментальных исследований по изучению влияния конструктивно-технологических факторов на демпфирующую способность составных слоистых балок. Показано, что уровень демпфирования слоистых балок зависит от упругих характеристик материалов балок и промежуточного слоя.*

*Ключевые слова: коэффициент потерь, частота, составная балка.*

V.V. STRELBITSKIY

Khmelnytsky National University

### SOME RESULTS OF RESEARCH OF DAMPING ABILITY OF COMPOSITE BEAMS

*The results of experimental research studies about influence of structurally-technological factors on the damping ability of the composite stratified beams have been expounded in the article. It has been shown that the level of the stratified beams damping depends on resilient descriptions of materials of beams and intermediate layer.*

*The damping capacity of standards with layers from antivibration material substantially depends on descriptions of coverage and frequency of vibrations. The use of the chosen materials of layer results in the increase of damping ability of the stratified beam, and most effective from the point of view of the oscillation damping are coverages from Viponit.*

*Frequency dependence of coefficient of losses depends on material of antivibration layer. The degree of height of its size is more expressed for the material of Viponit, and such dependence is less expressed for a construction without antivibration material.*

*Keywords: coefficient of losses, frequency, composite beam.*

#### Постановка проблемы

Применение вибрационной техники позволяет интенсифицировать традиционные технологические процессы финишной обработки различных деталей. Современная тенденция роста скоростей движения исполнительных механизмов и мощности силовых установок приводит к увеличению колебаний и расширению вибрационного спектра, а также увеличению динамических нагрузок в элементах конструкций, стыках и сопряжениях [1–3].

Вибрация и шум приводят к снижению функциональных возможностей и работоспособности человека – нарушению остроты зрения, ухудшению координации движений, повышению энергетических затрат. Длительное действие вибрации может привести к ухудшению самочувствия и поражению отдельных систем организма: сердечнососудистой, нервной, кровеносной, вестибулярного аппарата и других, изменению мышечных и костных тканей [4–7]. Это естественным образом обуславливает необходимость совершенствования виброзащитных систем и внедрения новых конструктивных решений.

#### Анализ последних публикаций

Для изготовления рам вибрационного оборудования используется, как правило, сварные