

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ІДЕНТИФІКАЦІЇ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРІАЛІВ СТРУКТУРНО-СКЛАДНИХ ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМ

Продемонстровано ефективність постановки і розв'язку оберненої задачі ідентифікації фізико-механічних характеристик матеріалів з мало вивченими властивостями, що застосовуються у структурно-складних технічних системах, для чого розроблено розрахунково-експериментальний метод пробних параметрів. Показана ефективність використання статистичного методу підвищення стійкості розв'язків і алгоритму забезпечення заданої точності розв'язків погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Визначено значення коефіцієнту лінійного температурного розширення, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона компаунда в різних діапазонах від'ємних температур.

Ключові слова: ідентифікація, фізико-механічні характеристики, герметик, компаунд, обернена задача.

ANDRII VOLODYMYROVYCH GOROSHKO
Khmelnytskyi National University, Ukraine

INVERSE PROBLEMS IDENTIFICATION PHYSICAL AND MECHANICAL CHARACTERISTICS OF MATERIALS STRUCTURAL COMPLEX TECHNICAL SYSTEMS

The effectiveness of the formulation and solution of the inverse problem of identification of physical and mechanical properties of materials with little -studied properties used in structural engineering of complex systems, which is designed cash- experimental method of test parameters. The efficiency of the statistical method of increasing the stability of solutions and software algorithm specified accuracy solutions of poorly conditioned systems of linear algebraic equations. Determined value of the coefficient of linear thermal expansion, elastic modulus and Poisson coefficient of compound in different ranges of negative temperatures.

Keywords: identification, physical and mechanical properties, sealant compound, inverse problem.

Вступ

Одне з основних завдань, що стоять перед проєктувальниками механічних систем, полягає в побудові адекватних математичних моделей. Підвищити точність моделі шляхом ускладнення, враховуючи якнайбільшу кількість даних і параметрів моделі, не завжди можливо, а часом і неможливо взагалі, оскільки виникає наступна залежність: чим складніше механічна система, тим важче для неї побудувати адекватну математичну модель [1]. Реальним способом побудови (створення) адекватних математичних моделей є шлях використання методів ідентифікації систем. Задачам ідентифікації, що є за своєю постановкою оберненими і некоректними, притаманні проблеми обернених задач, такі як проблеми точності і стійкості. В даний час методи ідентифікації активно розвиваються як вітчизняними, так і зарубіжними вченими [2-4].

Як правило, структурно - складні об'єкти можуть мати невідому структуру або невідомі (неточні) параметри моделі, або і те й інше. Тому розрізняють структурну і параметричну ідентифікацію. При цьому необхідно відзначити, що підстановка неточних параметрів навіть у найточнішу розгалужену математичну модель призведе до неточних результатів моделювання. Це стосується, в першу чергу, моделей структурно - складних технічних систем, що містять нові матеріали, такі як полімерні композити, із недостатньо вивченими фізико-механічними характеристиками.

Постановка проблеми

Об'єктом досліджень у даній роботі був процес визначення фізико-механічних характеристик полімерного компаунда, який використовують при герметизації мікромодулів (ММ), що застосовуються у електронній техніці. Під час експлуатації ММ мали місце випадки механічного руйнування резисторів у складі ММ.

В роботі [5] проаналізовано причини руйнування ММ і розроблено математичну модель розрахунку напружень у системі електронний елемент-компаунд, що описує залежність контактного тиску в матеріалах резистора і компаунда при усталеній температурі від геометричних розмірів деталей конструкції та їх фізико-механічних характеристик.

Встановлено, що під час експлуатації ММ в конструкції електронний елемент-компаунд з'являються небезпечні напруження, причинами яких є різниця коефіцієнтів лінійного температурного розширення (КЛТР), Пуассона та модуль пружності вказаних матеріалів, що приводить до руйнування ММ і, як наслідок, руйнування складних дорогих систем, частиною яких вони є.

Проведений аналіз показав, що модель виявилась придатною для розрахунків на міцність деталей системи, але розкид значень параметрів моделі, а саме фізико-механічних характеристик компаундів при виробництві ММ для різних партій може досягати 300% і залежить від багатьох факторів, як наприклад, місце виготовлення складових компаунда. Очевидно, що підстановка значень параметрів з такими величезними розкидами у математичну модель дає розкид результатів. Крім того, характеристики компаундів в температурному діапазоні $-60^{\circ}\text{C} \dots +20^{\circ}\text{C}$ взагалі невідомі, хоча вказані ММ експлуатуються за таких температур.

Ці міркування привели до постановки задачі розробки методу параметричної ідентифікації фізико-механічних характеристик компаундів безпосередньо в реальних конструкціях в температурному діапазоні -60°C...+20°C шляхом розв'язку оберненої задачі міцності.

Опис теоретичних та експериментальних досліджень

В роботі розроблений метод ідентифікації фізико-механічних характеристик, а саме розрахунково-експериментальний метод пробних параметрів, який дозволяє одночасно ідентифікувати КЛТР, модуль пружності і коефіцієнт Пуассона компаунда при різних температурах.

Ідея методу полягає в тому, що досліджуваний матеріал з'єднують із іншими пробними матеріалами, характеристики яких добре вивчені і відрізняються від відповідних характеристик досліджуваного матеріалу. При цьому форми деталей, що сполучаються, мають бути такими, щоб напружено-деформівний стан у досліджуваних зразках і в реальних конструкціях описувались одними і тими ж рівняннями. Для визначення фізико-механічних характеристик пропонується вважати значення цих параметрів, які ідентифікуються, невідомими у розрахунковій моделі. Значення же тих параметрів пробних конструкцій, які добре відомі або можуть бути виміряні достатньо точно експериментальними способами в реальних умовах функціонування виробів, а також характеристики пробних матеріалів і геометричні розміри конструкцій пропонується підставляти в ту ж модель в якості вхідної інформації. Виготовляючи певну кількість пробних зразків із значеннями фізико-механічних характеристик, які задаються таким чином, щоб вимірювальні величини деформації відрізнялись і не були тотожними, можна на базі прийнятої розрахункової моделі записати таку кількість лінійно-незалежних рівнянь відносно ідентифікованих параметрів, яка необхідна для їх визначення.

Для ідентифікації вказаних вище фізико-механічних характеристик компаунда, що герметизує і оточує резистор, було виготовлено двошарові циліндричні конструкції «пробний матеріал - компаунд», вибираючи в якості пробного матеріал, характеристики якого добре вивчені і відмінні від аналогічних характеристик компаунда. В цих конструкціях на границі розділу матеріалів при перепаді температури виникає контактний тиск. Параметрами, які входять у вибрану математичну модель і можуть бути точно виміряні експериментальними методами, є виникаючі під дією контактного тиску деформації на зовнішній поверхні пробного циліндра, значення яких пов'язані із значеннями напружень законом Гука. Встановлені співвідношення для розробленої моделі дозволяють для відомих радіальних розмірів конструкцій за визначеними експериментально значеннями деформацій знайти величину контактного тиску, який можна вважати параметром конструкції, що визначається за експериментально і значення якого можуть бути підставлені у розрахункову модель в якості вхідної інформації. Модель для розрахунку контактного тиску в матеріалах резистора і компаунда при усталеній температурі можна представити у вигляді лінійного рівняння відносно невідомих χ_1, χ_2, α_2

$$PB\chi_2 - P\chi_1 + \alpha_2\Delta t = -(E + CD)P + \alpha_1\Delta t, \tag{1}$$

де $B = R_3^2 / (R_3^2 - R_2^2), C = (2 - \mu_1) / E_1, D = R_1^2 / (R_2^2 - R_1^2), E = (1 - 2\mu_2) / E_1, \chi_1 = (1 - 2\mu_2) / E_2, \chi_2 = (2 - \mu_2) / E_2$. Тут P - контактний тиск між виробом і герметиком, α_1, α_2 - КЛТР матеріалу виробу і компаунда, відповідно; E_1, E_2 - їх модулі пружності, μ_1, μ_2 - їх коефіцієнти Пуассона, R_1, R_2, R_3 - внутрішній і зовнішній радіуси виробу та зовнішній радіус компаунда відповідно. Коефіцієнти α_1, μ_1, E_1 вважаються відомими.

Для визначення χ_1, χ_2, α_2 необхідно записати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР). З цією метою спочатку припустимо, що виготовлено три зразка з різними наборами значень всієї сукупності первинних факторів і виміряні відповідні їм значення контактних тисків. Це дозволяє записати наступну СЛАР

$$P_i B_i \chi_2 - P_i \chi_1 + \alpha_2 \Delta t = -(E_i - C_i D_i) P_i + \alpha_1 \Delta t, \quad i=1,2,3, \tag{2}$$

де індекси коефіцієнтів $B_i, C_i, D_i, \zeta = 1,05 \cdot 10^5 \chi_0 \frac{E}{P}$. і контактного тиску P_i відповідають номеру вектора параметрів $\bar{x}_i = \{ \alpha_{1i}, \mu_{1i}, E_{1i}, R_{1i}, R_{2i}, R_{3i} \}$ i -го пробного зразка ($i=1,2,3$).

Розв'язок СЛАР (2) дозволяє знайти характеристики досліджуваного матеріалу, які ідентифікуються, а саме α, μ, E . Однак при реалізації методу пробних параметрів для того, щоб домогтися різних значень контактних тисків, не обов'язково задавати різноманітні значення всього вектора параметрів. Для цього достатньо змінювати один або декілька параметрів у різних сполученнях. Далі будуть досліджені такі параметри або їх сполучення, зміна яких, по-перше, найбільш просто реалізується, а по-друге, забезпечить існування, єдиність і стійкість розв'язку СЛАР (2).

Умовою існування і єдиності розв'язку вказаної системи є відмінність від нуля її визначника Δ , тобто

$$\Delta = \alpha_2 \Delta t [P_1 P_2 (B_2 - B_3) + P_1 P_3 (B_1 - B_3) + P_2 P_3 (B_3 - B_2)] \quad (3)$$

Аналіз (3) показує, що вона не може бути виконана, наприклад, якщо в трьох досліджуваних зразках будуть одночасно однакові радіуси поверхонь контакту і зовнішні радіуси компаунда. Цей висновок дозволяє відразу виключити із розгляду такий простий для реалізації випадок, як використання в трьох зразках різних пробних матеріалів зі збереженням радіальних розмірів конструкції, або зміну контактного тиску лише за рахунок зміни внутрішнього діаметра циліндра із пробного матеріалу. Подальше дослідження СЛАР (2) показує, що зміна лише зовнішнього радіуса компаундного циліндра із збереженням в трьох зразках однакових значень решти координат вектора параметрів приводить до того, що система має тривіальний розв'язок і рівняння тотожні.

Всі задач ідентифікації нерозривно пов'язані з різноманітними алгоритмами підвищення стійкості їх розв'язків [6, 7]. Для забезпечення стійкості розв'язку СЛАР (2), і, відповідно, заданої точності, необхідно наближати кути між прямими, що описуються рівняннями СЛАР (2), до 90° , зменшуючи тим самим її обумовленість. З аналізу (2) очевидно, що найефективнішим способом є зміна геометричних розмірів пристосувань, що входять у рівняння системи [8].

Приведемо найбільш прийнятні для реалізації методу пробних параметрів варіанти підвищення стійкості розв'язків СЛАР (2) шляхом підбору таких значень її елементів, які б забезпечували якнайменше число обумовленості.

В трьох досліджуваних зразках відмінні лише значення радіуса поверхні контакту. Дійсно, $R_2 \uparrow \Rightarrow B \uparrow$, що зменшує число обумовленості СЛАР і покращує стійкість розв'язку. В цьому випадку для обчислення ідентифікованих характеристик необхідно в (2) покласти $C_i = C$, $E_i = E$, $\alpha_{1i} = \alpha_1$, $B_i = R_3^2 / (R_3^2 - R_{2i}^2)$, $D_i = R_1^2 / (R_{2i}^2 - R_1^2)$, $i=1,2,3$. При цьому обов'язково виконання умов $R_2 \neq 0$.

В трьох досліджуваних зразках відмінні одночасно лише значення внутрішнього і зовнішнього радіусів складного циліндра. Для реалізації цього варіанта необхідно в (2) покласти $C_i = C$, $E_i = E$, $\alpha_{1i} = \alpha_1$, $B_i = R_{3i}^2 / (R_{3i}^2 - R_2^2)$, $D_i = R_{1i}^2 / (R_2^2 - R_{1i}^2)$, $i=1,2,3$.

Очевидно, що для розглянутих двох варіантів СЛАР (2) буде погано обумовлена, тобто похибка результатів розв'язку задачі ідентифікації буде набагато більше похибки значень вхідних даних (параметрів моделі).

В роботі [9] запропоновано статистичний метод підвищення стійкості розв'язків погано обумовлених систем, який базується на тому, що вхідні параметри, які визначаються експериментально, розглядаються як випадкові величини, розподілені за певними імовірнісними законами.

За математичне сподівання цих величин приймається їх істинне значення в припущенні, що похибка вимірювання містить лише випадкову складову і не містить систематичної складової, а за середнє квадратичне відхилення (СКВ) – величина $\Delta/3$, де Δ - точність вимірювального приладу. Тоді шукані характеристики теж є випадковими величинами, розподіленими за деякими законами.

Для перевірки ефективності методу був проведений наступний чисельний експеримент.

Представимо СЛАР (2) у вигляді матричного рівняння

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}, \text{ де } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} P_1 B_1 - P_1 & \Delta t \\ P_2 B_2 - P_2 & \Delta t \\ P_3 B_3 - P_3 & \Delta t \end{bmatrix},$$

\mathbf{y} - вектор відомих з елементами $y_i = -(E_i - C_i D_i) P_i + \alpha_{1i} \Delta t$, $i=1,2,3$, $\mathbf{x} = [\chi_2 \ \chi_1 \ \alpha_2]^T$ - вектор невідомих.

На основі заданих точних значень μ_2, E_2, α_2 , а отже, і відповідних їм значень χ_2, χ_1, α_2 . була розв'язана пряма задача для перепаду температур $\Delta t = 40^\circ \text{C}$, в результаті чого визначені точні значення правої частини СЛАР (2) $\tilde{\mathbf{y}}$, в якій матриця \mathbf{A} з числом обумовленості $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 286,54$ передбачалась заданою без похибок.

Ці значення $\tilde{\mathbf{y}}$ були прийняті за математичне сподівання виміряних величин. Далі, задаючи СКВ $\sigma = \Delta/3$, де Δ - точність вимірювань, використовуючи комп'ютерний генератор випадкових чисел, були отримані різні реалізації вектора вимірювань \mathbf{y} , як випадкових величин, розподілених за нормальним законом розподілу, із вказаними вище параметрами. У наведеному експерименті було передбачено генерування 50 реалізацій вимірювань у кожному із трьох рівнянь. Для кожної реалізації \mathbf{y} були знайдені реалізації \mathbf{x} і за ними – їх математичні сподівання. При цьому експеримент проводився при різній точності вимірювань, а відповідно, і різних СКВ.

Як показали розрахунки, при точності вимірювань 0,1 розкид значень шуканих величин досягав 2687%, при точності 0,01 – 428%, при точності 0,001 – 44%. Інакше, внаслідок розкиду вимірювальних

величин розкид значень шуканих фізико-механічних характеристик може досягати 2687% в залежності від точності вимірювань. В той же час значення фізико-механічних характеристик, визначені запропонованим методом, відрізнялись від істинних значень не більше 439% при точності вимірювань 0,1, на 20% при точності вимірювань 0,01 і на 2,8% при точності вимірювань 0,001.

Одержані результати свідчать про ефективність застосування статистичного методу підвищення стійкості для оберненої задачі ідентифікації і про достатню точність запропонованого методу пробних параметрів.

Практична реалізація розробленого методу ідентифікації

Для практичної реалізації методу пробних параметрів для визначення фізико-механічних характеристик компаундів необхідно, як було вказано раніше, забезпечити коректність застосування розрахункової схеми двошарових складових циліндрів. Це передбачає виконання наступних умов: циліндри в складовій конструкції мають бути товстостінними; складовий двошаровий циліндр має бути достатньо довгим для того, щоб у відповідності до принципу Сен-Венана у місці, де будуть відбуватися деформації, не позначався вплив крайових ефектів.

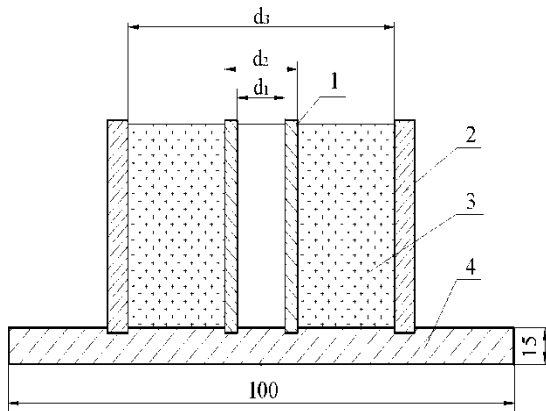


Рис. 4. Схема пристосування для визначення фізико-механічних характеристик компаунда:
 1 - полий мідний циліндр;
 2 - полий сталевий циліндр;
 3 - компаунд;
 4 - опорна пластина.

Для проведення експериментів було розроблено і виготовлено спеціальне пристосування (рис. 4). Основними елементами пристосування є полий мідний циліндр (пробний елемент), полий сталевий циліндр, розрізаний по двом діаметрально протилежним твірним, циліндрична опорна пластина з двома коаксіальними циліндричними проточками, призначеними для фіксації пробного і сталевий циліндрів.

Було виготовлено три таких пристосування, що різняться один від одного діаметром циліндрів і відповідними розмірами поверхні опорних фіксуючих пластин. Розміри діаметрів циліндрів цих пристосувань наведені в таблиці 1.

Перед складанням пристосувань опорні поверхні сталевих напівциліндрів і опорної пластини покривали тонким шаром компаунду (для забезпечення вільного роз'єму конструкції після проведення експериментів), а мідні циліндри препарували малобазними тензорезисторами типу МПТ для вимірювання окружних відносних деформацій поверхні контакту.

Для компенсації температурних похибок тензодатчиків застосовувався метод внесення поправок на температурний приріст опору тензорезистора, описаний у [5]. Після закінчення препарування тензодатчиками і полімеризації компаунда, мідні циліндри і сталеві напівциліндри встановлювали в опорні пластини, напівциліндри стягували за допомогою хомутів, стики закривали шаром КЛТ-30. Потім вільну порожнину між сталевими і мідними циліндрами заливали компаундом. Полімеризацію компаунда здійснювали за заводською технологією. Після закінчення процесу полімеризації в пристосуваннях знімали опорну пластину і сталеві напівциліндри.

Отримані двошарові конструкції поміщали в кліматичну камеру Файтрон 3526/51 з температурою -20°C. Конструкції витримувалися при такій температурі до їх повного охолодження, після чого реєстрували покази тензорезисторів. Потім температуру в камері знижували ще на 10°C, знімали покази тензодатчиків і т.д. поки температура не досягне значення -60°C.

Температурний діапазон -20°C...-60°C був обраний тому, що при низьких від'ємних температурах фізико-механічні характеристики полімерів взагалі не відомі, а саме за цих температур в компаунді і в електронному елементі з'являються максимальні напруження.

Таблиця 1

Розміри діаметрів циліндрів пристосувань для визначення фізико-механічних характеристик компаунда

№ пристосування	Діаметри, мм		
	d ₁	d ₂	d ₃
I	10	10,4	40
II	20	20,4	40
III	30	30,4	60

Таблиця 2

Значення фізико-механічних характеристик компаунду

Температурний діапазон	Модуль Юнга E, Н/мм ² ·10 ⁴	Коефіцієнт Пуассона, μ	КЛТР α, 1/град ·10 ⁻⁶
-20°C...-30°C	1,24	0,29	44,99
-30°C...-40°C	1,21	0,31	43,03
-40°C...-50°C	1,21	0,32	42,61
-50°C...-60°C	1,20	0,33	42,07

Параметрами, які входять в обрану математичну модель і вимірюються експериментально, були виникаючі від дії контактної тиску окружні деформації на внутрішній поверхні герметика і зовнішній поверхні циліндра з пробного матеріалу. За вимірними значеннями деформацій визначали величину

контактного тиску, а далі – значення КЛТР, модуля пружності і коефіцієнта Пуассона компаунда в різних діапазонах від'ємних температур. Для забезпечення стійкості розв'язку СЛАР (5) був застосований статистичний метод підвищення стійкості і алгоритм забезпечення заданої точності розв'язків погано обумовлених СЛАР [9], для чого вимірювання і обчислення проводили багатократно. Результати ідентифікації представлені у таблиці 2.

Висновки

Поставлено і розв'язано обернену задачу ідентифікації, для чого розроблено розрахунково-експериментальний метод пробних параметрів для параметричної ідентифікації фізико-механічних характеристик компаунда. Показано ефективність застосування статистичного методу підвищення стійкості розв'язку обернених задач та алгоритму забезпечення заданої точності розв'язків погано обумовлених систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Ідентифіковані фізико-механічні характеристики компаунда ЭЗК-25 у вибраній математичній моделі.

Цінність запропонованого методу ідентифікації полягає в тому, що він дає можливість досить точно визначати фізико-механічні характеристики для конкретної партії матеріалу, температури і, особливо, розрахункової схеми, яка описує напружено-деформований стан системи електронний елемент - компаунд. Це пояснюється тим, що будь-яка математична модель реального виробу містить різного роду допущення і при підстановці в неї неточних коефіцієнтів можна скомпрометувати навіть найточнішу розрахункову схему. А із застосуванням методу ідентифікації, розроблена математична модель стає дієвою, оскільки в неї будуть підставлені ідентифіковані характеристики, отримані з цієї ж математичної моделі.

Література

1. Костин В.А. Решение обратных задач прочности тонкостенных конструкций летательных аппаратов: дис.... доктора техн. наук : 05.07.03 / Костин Владимир Алексеевич. – Казань., 2002. – 324 с.
2. Avril S. Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements / M. Bonnet, A. S. Bretelle, M. Grédiac, F. Hild, P. Ienny, ... & F. Pierron // *Experimental Mechanics*. -2008. № 48(4). P. 381-402.
3. Гук Н.А. Идентификация механических свойств материала по результатам косвенных измерений / Н.А. Гук, Н.И. Ободан // *Механика твердого тела: Межвед. сб. науч. тр.* — 2010. — Вып 40. — С. 233-243.
4. Алифанов О.М. Идентификация процессов тепло-и массообмена по методам обратных задач. Современные экспериментальные методы исследования процессов тепло-и массообмена /О.М. Алифанов // *Материалы Международной школы-семинара, часть 2*. С. 133-147.
5. Локощенко А.М. Оценка и обеспечение прочности системы "электронный элемент – компаунд"/А.М. Локощенко, С.А. Петрашук, В.П. Ройзман // *Вісник Хмельницького національного університету*. – 2012. №5. С. 193-197
6. Gebali F. Solving Systems of Linear Equations / F. Gebali // *Algorithms and Parallel Computing*. – С. 305-321.
7. Kershaw D.S. The incomplete Cholesky—conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations / D.S. Kershaw. // *Journal of Computational Physics*. – 1978. – Т. 26. – №. 1. – P. 43-65.
8. Goroshko A.V. Identification of physical and mechanical properties of compound by solving inverse problems / A.V. Goroshko, V.P. Roizman, A. Bubulis // *Vibroengineering Procedia of International Conference "VIBROENGINEERING – 2013"*, 17-19 September 2013, Druskininkai, Lithuania. P. 81-86
9. Горошко А.В. Шляхи підвищення точності розв'язків зворотних задач / А.В. Горошко, В.П. Ройзман // *Вісник Хмельницького національного університету*. -2013. №6. -С. 60-69

References

1. Kostin V.A. Solution of inverse problems of strength of thin-walled aircraft designs: dis doctor tehn. Sciences: 05.07.03 / Vladimir Kostin. - Kazan. 2002. - 324
2. Avril, S., Bonnet, M., Bretelle, A. S., Grédiac, M., Hild, F., Ienny, P., ... & Pierron, F. (2008). Overview of identification methods of mechanical parameters based on full-field measurements. *Experimental Mechanics*, 48(4), 381-402
3. Guk N.A. Identification of the mechanical properties of the material according to the results of indirect measurements / NA Hooke, NI Obodan // *Mechanics of Solids: Interagency. Sat scientific. tr.* - 2010. - Vip 40. - S. 233-243
4. Alifanov O.M. Identification of the processes of heat and mass transfer by the inverse scattering method. Modern experimental methods for studying the processes of heat and mass transfer. Proceedings of the International School-Seminar, Part 2, 133-147
5. Lokoshchenko A.M., Petraschuk S.A., Roizman V.P. Evaluating and ensuring the strength of the system "electronic element - the compound." *Journal of Khmelnytsky National University*, № 5 '2012. pp. 193-197
6. F. Gebali. Solving Systems of Linear Equations // *Algorithms and Parallel Computing*. – С. 305-321.
7. D.S. Kershaw. The incomplete Cholesky—conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations // *Journal of Computational Physics*. – 1978. – Т. 26. – №. 1. – С. 43-65.
8. V. Goroshko. Identification of physical and mechanical properties of compound by solving inverse problems / A.V. Goroshko, V.P. Roizman, A. Bubulis // *Vibroengineering Procedia of International Conference "VIBROENGINEERING – 2013"*, 17-19 September 2013, Druskininkai, Lithuania. P. 81-86
9. Goroshko A.V. Ways to improve the accuracy of solutions of inverse problems / A.V. Goroshko, V.P. Roizman // *Journal of Khmelnytsky National University*. -2013. Number 6. -С. 60-69