

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ ПУЛЬСУ ТА ТИСКУ ПРИ ОЦІНЦІ ТОЛЕРАНТНОСТІ СЕРЦЕВО-СУДИННОЇ СИСТЕМИ ДО ФІЗИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

*В статті розглянуто принцип моделювання реабілітації в післялікарняний період з використанням фізичного навантаження. Розроблено математичну модель для прогнозування субмаксимальних рівнів основних показників організму, а саме, пульсу та тиску. На основі даної моделі з використанням узагальненої кубічної параболі модифіковано математичну модель реакції серцево-судинної системи, що дозволяє прогнозувати субмаксимальні рівні пульсу та тиску результатів велоергометрії. Це дає можливість отримати прогнозні значення реакції тиску організму для процесу реабілітації використовуючи дані вимірювання початкового етапу реабілітації та рівні субмаксимальних значень.*

*Ключові слова: математична модель, кубічна парабола, серцево-судинна система, реабілітація, фізичні навантаження.*

O.V. VOVKODAV

Ternopil National Economic University, Ternopil, Ukraine

### MATHEMATICAL MODEL OF THE DYNAMICS OF PULSE AND PRESSURE WHEN ASSESSING TOLERANCE OF CARDIOVASCULAR SYSTEM TO EXERCISE

*Abstract – The article deals with modeling principle of rehabilitation in hospital after a period of use of physical activity.*

*A mathematical model for predicting submaximal levels of key indicators of the body, heart rate and pressure. Based on this model using the generalized cubic parabola refined mathematical model of cardio-vascular system to predict the level of submaximal heart rate and pressure results veloergometry.*

*This makes it possible to obtain predicted values of pressure response of the organism to the rehabilitation process using the measurement data of the initial stage of rehabilitation and the level of submaximal values.*

*Keywords: mathematical model, the cubic parabola, cardiovascular system, rehabilitation, exercise.*

#### Вступ

Фізична реабілітація — це комплекс послуг, який включає повторні обстеження та оцінку стану пацієнта із коригуванням програми лікування. Програма лікування формується на основі емпіричного узагальнення результатів клінічної практики, яка включає мануальну терапію та фізичні вправи. Оцінка стану пацієнтів здійснюється на основі спеціальних медичних тестів із відслідковуванням динаміки лише пульсу та тиску [1].

Режими використання фізичного навантаження у після лікарняний період реабілітації:

1. Щадний режим – для практично здорових, що потребують відпочинку. Дозволяється без обмежень застосовувати всі фізкультурні заходи, передбачені в санаторії.

2. Щадно-тренуючий режим – призначається особам з хронічними захворюваннями, фізично слабким, неадаптованим до фізичних навантажень. Обмежуються вправи, які можуть викликати втому, неадекватні реакції організму, рекомендується ранкова гігієнічна гімнастика з обмеженням бігу, без підскоків. Дозволяються малорухливі ігри, екскурсії.

3. Тренуючий режим дає змогу якнайповніше використовувати засоби і форми ЛФК, брати участь у всіх заходах, які проводять у стаціонарі. У реабілітації застосовуються вправи великої та максимальної інтенсивності.

Для складання індивідуального рухового режиму та оцінки ефективності фізичної реабілітації у лікарсько-трудої експертизі використовується аналіз толерантності до фізичного навантаження [2]. Толерантність до фізичних навантажень оцінюється за допомогою спеціалізованих технічних систем, зокрема велоергометра та тредмілу. Ці системи забезпечують дозоване фізичне навантаження та фіксацію значень пульсу і тиску під їх впливом. Кількість даних систем в реабілітаційних центрах є обмеженою, що обумовлює їх використання лише для діагностування стану на початку та завершні періоду реабілітації. В той же час якісний моніторинг процесу реабілітації вимагає оцінки стану пацієнта із врахуванням індивідуальних особливостей організму на всіх етапах періоду реабілітації, що може бути здійснено лише за допомогою відповідної математичної моделі. Відомі моделі [3-6] динаміки серцево-судинної системи використовують значну кількість параметрів, що ускладнює використання таких моделей в умовах моніторингу реабілітації. Це робить актуальною задачу побудови математичної моделі динаміки пульсу та тиску при оцінці толерантності серцево-судинної системи до фізичного навантаження, розв'язанню якої присвячена дана робота.

#### Постановка задачі

Спостереження за динамікою пульсу та тиску в під дією дозованих фізичних навантажень показують їх подібність. Також встановлено, що в процесі реабілітації змінюються математичні сподівання початкових значень пульсу і тиску при відсутності фізичних навантажень. В той же час поточні значення даних параметрів при відсутності фізичних навантажень підлягають значним коливанням, які обумовлені мінливістю фізичного, психологічного станів організму, а також впливом зовнішнього середовища. Однак субмаксимальні значення пульсу і тиску які фіксуються при максимально-допустимих навантаженнях позбавлені згаданих коливань і

демонструють стійку тенденцію до зниження в процесі реабілітації. Тому задачу побудови моделі динаміки параметрів серцево-судинної системи в процесі реабілітації розіб'ємо на підзадачі моделювання динаміки субмаксимальних значень параметрів та моделювання результатів використання технічних вимрювальних систем на основі прогнозованих субмаксимальних значень. При побудові моделей динаміки субмаксимальних значень параметрів серцево-судинної системи необхідно врахувати як індивідуальні особливості організму так і загальні тенденції, що характеризують процес реабілітації.

**Математична модель толерантності серцево-судинної системи**

Аналіз експериментальних даних перебігу процесу реабілітації виявив монотонне спадання субмаксимальних значень пульсу та тиску. При цьому спостерігається два етапи швидкого спадання цих значень, та два етапи відносної стабілізації які представлені на рисунку 1.

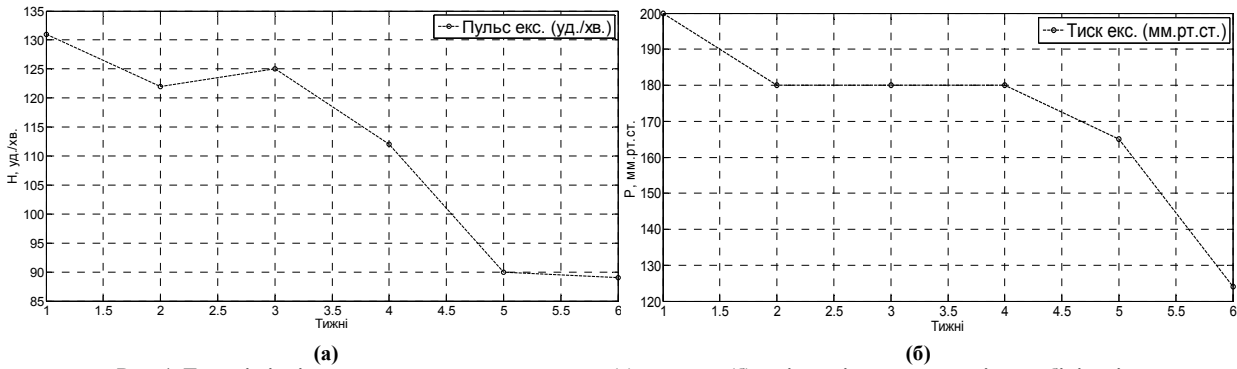


Рис. 1. Типові рівні максимальних значень пульсу (а) та тиску (б) у після лікарняний період реабілітації

Такі залежності зручно моделювати узагальненою кубічною параболою, в якій один із періодів стабілізації моделюється малим градієнтом кубічної параболи поблизу нульового значення, а період остаточної стабілізації моделюється переходом від кубічної залежності до деякої константи. Згадані залежності для субмаксимальних значень пульсу та тиску представимо за допомогою наступних функцій  $H_{pr}(t), P_{pr}(t)$ :

$$H_{pr}(\tau) = \begin{cases} -A_h(\tau - x_h)^3 + b_h; & -A_h(\tau - x_h)^3 + b_h > H_{norm} \\ H_{norm}; & -A_h(\tau - x_h)^3 + b_h \leq H_{norm} \end{cases} \quad (1)$$

$$P_{pr}(\tau) = \begin{cases} -A_p(\tau - x_p)^3 + b_p; & -A_p(\tau - x_p)^3 + b_p > P_{norm} \\ P_{norm}; & -A_p(\tau - x_p)^3 + b_p \leq P_{norm} \end{cases} \quad (2)$$

де  $A_h, A_p$  – параметри моделей, що підбираються емпірично,  $x_h, x_p$  – представляють середину першого періоду стабілізації,  $b_h, b_p$  – рівні стабілізації для першого періоду,  $H_{norm}, P_{norm}$  – рівні остаточної стабілізації субмаксимальних значень пульсу та тиску.

Аналіз спостереженої динаміки коефіцієнтів дозволяє стверджувати, що значення параметрів  $x_h, x_p$  є відносно постійними для всіх пацієнтів. Параметри  $H_{norm}, P_{norm}$  індивідуальні для кожного хворого. Однак вони не впливають на точність прогнозу аж до моменту переходу до остаточної стабілізації. Тому ці параметри можуть бути оцінені деякими середньостатистичними значеннями. Таким чином, для хворого необхідно встановити лише параметри  $A_h, A_p, b_h, b_p$ , що можна зробити за результатами двох перших спостережень. При цьому отримаємо наступні оцінки:

$$b_h = H_2 \quad (3)$$

$$A_h = \frac{b_h - H_1}{(\tau_1 - x_h)^3} \quad (4)$$

$$b_p = P_2 \quad (5)$$

$$A_p = \frac{b_p - P_1}{(\tau_1 - x_p)^3} \quad (6)$$

Таким чином, на основі двох спостережень параметрів процесу реабілітації можна прогнозувати його подальший результат. Субмаксимальні значення пульсу та тиску адекватніше характеризують стан хворого, ніж значення цих параметрів при відсутності фізичних навантажень. Це обґрунтовує їх використання для відслідковування змін прогнозування результатів велоергометрії в залежності від прогнозованого стану хворого.

Пульс характеризується більшою чутливістю до дії випадкових факторів, основним його контрольним параметром слугує максимальне значення. В той же час тиск є основною характеристикою контролю стану хворого за даними велоергометрії. На основі моделі представленої в роботі [7]

використаємо співвідношення для прогнозування динаміки тиску під дією фізичного навантаження з використанням велоергометрії. Узагальнимо ці співвідношення для моделювання стану серцево-судинної системи на момент  $\tau$  періоду реабілітації, отримуючи:

$$(p^\tau(t))' = B_1 W'(t) \frac{W(t)}{(1+W(t-t_0))} - \left(1 - \frac{W(t-t_0)}{(1+W(t-t_0))}\right) B_2 (p^\tau(t))^{B_3} \quad (7)$$

$$p^\tau(0) = 0 \quad (8)$$

де  $B_1$  – показник впливу динаміки навантаження на зміни пульсу та тиску,  $B_2$  – показник швидкості адаптації до зняття навантаження,  $B_3$  – коефіцієнт степеня впливу пульсу та тиску на процес адаптації до зняття навантаження,  $p$  – перевищення функціональних рівнів пульсу тиску  $P_m$ .

$$p^\tau = P^\tau - P_m^\tau \quad (9)$$

При зміні функціонального стану організму на момент  $\tau$  періоду реабілітації повинні змінюватися середні значення пульсу тиску  $P_m^\tau$  при відсутності фізичних навантажень. Прив'яжемо зміну цих параметрів до змін субмаксимальних значень тисків  $\hat{P}$  за допомогою наступних співвідношень:

$$P_m^\tau = P_m^1 \frac{\hat{P}(\tau)}{\hat{P}(1)} \quad (10)$$

Представлення (7)-(10) в сукупності із формулами (1)-(2) дають змогу прогнозувати результати рівнів тиску велоергометрії на протязі періоду реабілітації.

### Отримані результати

Для перевірки математичної моделі проводилися спостереження за групою хворих з післяінфарктним станом в післялікарняний період на протязі 6 тижнів, та фіксувалися їхні початкові та максимальні значення пульсу та тиску. В таблиці 1 представлено значення еволюції динаміки пульсу та тиску для деякого із спостережуваних пацієнтів, а також їх рівні максимальних похибок:

Таблиця 1

Значення еволюції динаміки пульсу та тиску та рівні максимальних похибок

Тижні	Рівні пульсу		Рівні тиску		Похибки	
	Н0 (уд./хв.)	Нmax (уд./хв.)	P0 (мм.рт.ст.)	Pmax (мм.рт.ст.)	Пульс (%)	Тиск (%)
1	96	131	155	200	0,43	2
2	94	122	150	180	0,24	1
3	83	125	140	180	2,53	0
4	82	112	140	180	1,19	1
5	68	90	130	165	0,00	0,5
6	65	89	110	124	0,76	1

Отже при проведенні експериментів отримано значення максимальних рівнів похибок – 2,52% по пульсу, та 2% по тиску за весь період реабілітації.

Графічно результати прогнозування динаміки субмаксимальних значень математичної моделі (1)-(2) представлені на рисунку 2.

На основі отриманих прогнозних субмаксимальних рівнях тиску використовуючи представлення (7)-(10) можемо прогнозувати реакцію тиску на дозоване фізичне навантаження, що аналогічне використанню велоергометра. При прогнозуванні початкове значення перераховується по максимальному значенні першого виміру по відношенню до наступних. Результати отримані внаслідок прогнозування першого та останнього періодів проходження реабілітації представлено нижче на рисунку 3.

Відповідно рівні максимальних похибок на початковому етапі (а) склали – 7,3%, та кінцевому (б) – 5,82%.

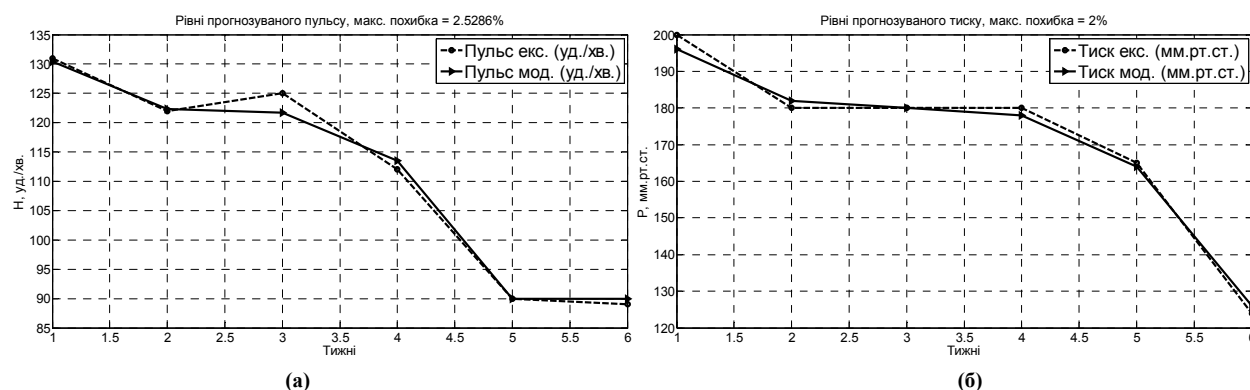


Рис. 2. Результати прогнозування субмаксимальних рівнів пульсу (а) та тиску (б).

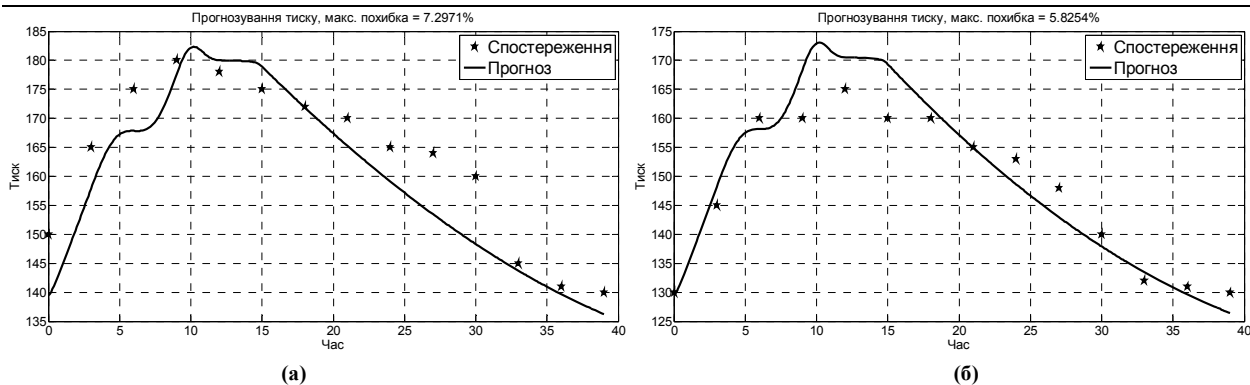


Рис. 3. Прогнозовані рівні тиску початкового (а) та кінцевого (б) етапів проходження реабілітації

### Висновки

В статті розглянуто принцип проведення реабілітації в після лікарняний період з використанням фізичного навантаження. Розроблено математичну модель для прогнозування субмаксимальних рівнів основних показників організму, а саме, пульсу та тиску. Прогноз формується на основі узагальненої кубічної параболи в якій один із періодів стабілізації моделюється малим градієнтом кубічної параболи поблизу нульового значення, а період остаточної стабілізації моделюється переходом від кубічної залежності до деякої константи. Перерахунок початкового значення відбувається за використанням субмаксимальних рівнів пульсу та тиску, які адекватніше характеризують стан хворого, ніж значення цих параметрів при відсутності фізичних навантажень. Оскільки пульс характеризується більшою чутливістю до дії випадкових факторів, основним його контрольним параметром слугує максимальне значення. В той же час тиск є основною характеристикою контролю стану хворого за даними велоергометрії. Це обґрунтовує використання даної моделі для прогнозування рівнів тиску, які описують результати велоергометрії в залежності від прогнозованого стану хворого. Проаналізовані експериментальні і прогнозні дані та рівні максимальних похибок підтвердили адекватність розробленої математичної моделі.

### Література

1. Швед М.І., Левицька Л.В. Сучасні стратегії лікування та реабілітації хворих на інфаркт міокарда. – Київ: Медкнига, 2013. – 144 с.
2. Жарінов О. Й., Куць В. О., Тхор Н. В. Навантажувальні проби в кардіології. Навчальний посібник. Видавництво «Медицина світу», Львів – 2006.
3. F. Kappel and R. O. Peer, A mathematical model for fundamental regulation processes in the cardiovascular system, Journal of Mathematical Biology 31 (1993), no. 6, 611-631.
4. S. Timischl, A global model of the cardiovascular and respiratory system, Ph.D. thesis, University of Graz, Institute for Mathematics and Scientific Computing, 1998.
5. Magosso E. A mathematical model of cardiovascular response to dynamic exercise / Magosso E., Felicani A., Ursino M. // 23rd Annual Conference – IEEE/EMBS Oct.25-28, 2001, Istanbul, TURKEY.
6. Кюгерян С. Г. Математическая модель сердечно-сосудистой системы организма при физической нагрузке / С. Г. Кюгерян, Т. Г. Петросян // Автоматизация и системы управления, 2005. Т. LVIII, №3.
7. Вовкодав О. В. Модель реакції серцево-судинної системи організму на дозоване фізичне навантаження в процесі реабілітації після неускладненого інфаркту міокарда / О. В. Вовкодав, Р. М. Пасічник, Л. В. Левицька // Системи обробки інформації. Випуск 1 (108). Харків – 2013. С. 224-228.

### References

1. Shved M. I., Levytska L. V. Suchasni stratehiyi likuvannya ta reabilitatsiyi khvorykh na infarkt miokarda. – Kyiv: Medknyha, 2013. – 144 s.
2. Zharinov O. Y., Kuts V. O., Tkhor N. V. Navantazhuvanni proby v kardiologii. Navchalnyy posibnyk. Vydavnytstvo «Medytsyna svitu», Lviv – 2006.
3. F. Kappel and R. O. Peer, A mathematical model for fundamental regulation processes in the cardiovascular system, Journal of Mathematical Biology 31 (1993), no. 6, 611-631.
4. S. Timischl, A global model of the cardiovascular and respiratory system, Ph.D. thesis, University of Graz, Institute for Mathematics and Scientific Computing, 1998.
5. Magosso E. A mathematical model of cardiovascular response to dynamic exercise / Magosso E., Felicani A., Ursino M. // 23rd Annual Conference – IEEE/EMBS Oct.25-28, 2001, Istanbul, TURKEY.
6. Kyugeryan S. G. Matematicheskaya model' serdechno-sosudistoy sistemy organizma pri fizicheskoy nagruzke / S. G. Kyugeryan, T. G. Petrosyan // Avtomatizatsiya i sistemy upravleniya, 2005. T. LVIII, №3.
7. Vovkodav O. V. Model reaktsiyi sertsevo-sudynnoyi sistemy orhanizmu na dozovane fizychno navantazhennya v protsesi reabilitatsiyi pisllya neuskkladnenoho infarktu miokarda / O. V. Vovkodav, R. M. Pasichnyk, L. V. Levytska // Systemy obrobky informatsiyi. Vypusk 1 (108). Kharkiv – 2013. S. 224-228.

Рецензія/Peer review : 29.5.2014 р.

Надрукована/Printed : 12.7.2014 р.

Рецензент: д.т.н., професор, декан факультету комп'ютерних інформаційних технологій, завідувач кафедри комп'ютерних наук Тернопільського національного економічного університету  
Дивак Микола Петрович