

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ НАЛИЧИЯ СИТУАЦИЙ РАВНОВЕСИЯ ПО НЕШУ В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ В ДИАДИЧЕСКОЙ ИГРЕ СО СТОХАСТИЧЕСКИ ОГРАНИЧИВАЕМЫМИ ВЫИГРЫШАМИ ДЛЯ ЗАДАЧИ РЕАЛИЗАЦИИ ИГРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ РАЦИОНАЛЬНОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РЕСУРСОВ С АЛЬТЕРНАТИВНЫМ ВЫБОРОМ ДЕЙСТВИЯ

*Рассматривается задача реализации игрового моделирования рационального использования ресурсов с альтернативным выбором действия. Моделью взаимодействия является диадическая игра с участием нескольких сторон. Показано, что в диадической игре с определёнными ограничениями на стохастические выигрыши игроков статистическая вероятность наличия ситуаций равновесия по Нешу в чистых стратегиях увеличивается с ростом числа игроков. Эта вероятность не меньше 0.95 при 12 игроках, где в среднем насчитывается не меньше трёх ситуаций равновесия по Нешу в чистых стратегиях.*

*Ключевые слова: рациональное использование ресурсов, альтернативный выбор действия, диадическая игра, ситуации равновесия по Нешу в чистых стратегиях, статистическая вероятность.*

V.V. ROMANUKE

Khmelnitsky National University

## STATISTICAL PROBABILITY OF EXISTENCE OF AN EQUILIBRIUM ON NASHUA IN PURE STRATEGIES IN THE DYADIC GAME WITH STOCHASTIC LIMIT THE GAINS IMPLEMENTATION CHALLENGES FOR SIMULATION GAME MANAGEMENT RESOURCES OF ALTERNATIVE CHOICE

*There is considered the problem of practicing the game modeling in rational usage of resources with alternative choice of action. The interaction model is dyadic game with several participants. It has been shown that in dyadic game with definite constraints on players' stochastic payoffs, the statistical probability of presence of pure strategies Nash equilibrium situations increases as number of players goes up. This probability is not less than 0.95 by 12 players, where on average there are not less than three pure strategies Nash equilibrium situations.*

*Keywords: rational use of resources, the alternative choice of action, dyadic play, a situation of equilibrium in pure strategies in Nashua, statistical probability.*

Диадические игровые модели технических задач рационального использования ресурсов

Рациональное использование ресурсов является неотъемлемой составляющей процесса нормального функционирования любой системы. Прежде всего, это — техническая задача распределения ограниченного ресурса между заинтересованными сторонами, имеющими, впрочем, различные приоритеты. Среди этих приоритетов можно выделить как собственные (внутренние, вырабатываемые самим участником процесса распределения), так и внешние (назначаемые системой, отвечающей за распределение и выполняющей его).

В простейшем случае участнику процесса распределения предоставляется альтернативный выбор действия. В результате между участниками получается взаимодействие, моделью которого является диадическая игра [1]. Примером могла бы послужить известная модель применения очистительных сооружений [1, 2] для ограничения загрязнения окружающей среды (в частности, водоёмов) несколькими промышленными объектами (функционирующими, грубо говоря, однотипно). В этой модели каждый объект самостоятельно принимает решение относительно того, расходовать ли свои средства для применения очистительных сооружений. Контролирующая же сторона (скажем, местная администрация или, вообще говоря, государственная инспекция) назначает взыскания за превышение уровня промышленных загрязнений, получающихся суммарно от всех функционирующих объектов. Некоторые равновесные решения такой диадической игры заведомо невыгодны, поэтому её участники (игроки), персонифицирующие промышленные объекты (также и в машиностроительной отрасли), вынуждены договариваться о совместной поведенческой стратегии.

Диадические игровые модели предоставляют простой и весьма эффективный подход к решению технических задач рационального использования (распределения) ресурсов. Главнейшая задача сводится к установлению одновременно симметричных, выгодных и равновесных ситуаций. Теоретически такие ситуации возможны, однако практически реализуемы они в виде чистых стратегий. Для реализации же смешанных стратегий (даже с двухэлементным спектром в диадической игре) требуется достаточно длинная серия разыгрываний и выборов чистых стратегий (принятия решений).

### Методы решения диадических игр

Если в диадической игре участвуют  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  игроков, то в ней всего имеется  $2^n$  ситуаций в чистых стратегиях [1]. Ситуации в смешанных стратегиях представимы в виде точек  $n$ -мерного единичного куба в неотрицательном ортанте пространства  $\mathbb{R}^n$ , чьё начало координат есть вершина гиперкуба. Вершины

такого гиперкуба суть ситуации в чистых стратегиях. При  $n > 3$  нахождение всех равновесных ситуаций (например, в смысле Неша) представляет собой алгебраическую задачу, процесс аналитического решения которой порой усматривается чрезвычайно сложным. Диадическая игра с тремя игроками благодаря возможности визуализировать куб ситуаций решается с помощью графоаналитических умозаключений. Наконец, при  $n = 2$  получаемая элементарная биматричная игра решается чисто аналитически, по известным соотношениям [1]. Впрочем, невозможность претворения ситуаций в смешанных стратегиях в реальную среднюю полезность, приближающуюся к математическим ожиданиям равновесных выигрышей игроков, в известной степени обесмысливает эти ситуации. А когда одна из координат точки гиперкуба ситуаций получается иррациональной (случаи чего были показаны в [2]), неосуществимость порождаемой ситуации (содержащей, по крайней мере, одну стратегию с иррациональной компонентой) подталкивает к поиску других решений.

#### Цель статьи и задачи для её достижения

Здесь, собственно, под поиском других решений следовало бы понимать стремление к нахождению хотя бы одной ситуации равновесия по Нешу (Nash Equilibrium situation или NE-ситуации), реализуемой практически. Но в идеальном случае — это NE-ситуация в чистых стратегиях (Pure Strategies Nash Equilibrium situation или PSNE-ситуация), и это событие исключать из рассмотрения как недостоверное неблагоприятно. Иными словами, организатор взаимодействия (контролирующая сторона) игроков должен стремиться к тому, чтобы диадическая игровая модель этого взаимодействия содержала хотя бы одну PSNE-ситуацию с целью её стопроцентной практической (технической) реализации. Понятно, что в игре с произвольными выигрышами игроков это бессмысленно. Поэтому на выигрыши игроков будут наложены ограничения. Тем не менее, такое наложение вовсе не означает, что выигрыши перестанут быть стохастическими. Просто они как значения случайных величин зависимы от закона распределения, выбор которого и предопределяет структуру ограничения. Такая ограниченная стохастичность полезности моделирует некоторую разновидность последствий взаимодействия функционирующих технических объектов. В частности, для промышленных объектов, загрязняющих окружающую среду, их полезности определяются взысканиями и поощрениями, рейтинг и соотношения которых непостоянны, изменяясь во времени и будучи различными в географическом и отраслевом понимании.

Итак, цель статьи состоит в выяснении того, существуют ли условия, при которых в диадической игре с ограничениями на выигрыши игроков (без лишения их свойства стохастичности) статистическая вероятность наличия PSNE-ситуаций увеличивается. Для достижения намеченной цели необходимо обосновать выбор закона распределения для формирования случайных значений выигрышей игроков. Далее обоснуем выбор параметра (свойства) диадической игры, которое оказывает ощутимое влияние на наличие PSNE-ситуаций. Сейчас попутно заметим, что таких свойств всего два: количество игроков и назначаемое организатором правило определения их выигрышей. Конечно, это правило не произвольное, а подчиняется ограничениям на выигрыши игроков. После формализации этих ограничений необходимо статистически связать выбранное свойство диадической игры и PSNE-ситуации.

Зависимость статистической вероятности наличия PSNE-ситуации в диадической игре со стохастически ограничиваемыми выигрышами от количества игроков

Пусть дана диадическая игра

$$\left\langle \left\{ D_i = \{x_i, y_i\}_{i=1}^n, \left\{ \mathbf{P}_i = \left[ p_j^{(i)} \right]_F \right\}_{i=1}^n \right\rangle \quad \text{при} \quad F = \prod_{k=1}^n 2 \quad (1)$$

с множеством  $D_i$  чистых стратегий  $i$ -го игрока и  $n$ -мерной  $F$ -матрицей  $\mathbf{P}_i = \left[ p_j^{(i)} \right]_F$  его выигрышей, где с индексацией  $J = \{j_k\}_{k=1}^n$  для  $j_k \in \{1, 2\} \quad \forall k = \overline{1, n}$  в ситуации  $\{z_k\}_{k=1}^n$  по обозначению  $z_k \in \{x_k, y_k\}$  он получает выигрыш  $p_j^{(i)}$  при  $j_i = 1$  для  $z_i = x_i$  и  $j_i = 2$  для  $z_i = y_i$ . Ограничение, накладываемое на матрицы  $\{\mathbf{P}_i\}_{i=1}^n$ , записывается как  $\mathbf{P}_i \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^F \quad \forall i = \overline{1, n}$  при  $\mathcal{P} \cap \mathbb{R}^F \neq \mathbb{R}^F$ , где  $\mathbb{R}^F$  является пространством  $n$ -мерных матриц формата  $F$  с действительными элементами. Первоочередная задача — определить подпространство  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^F$ .

Очевидно, что среди результатов взаимодействия игроков, которые зависят и от интересов организатора, встречаются и поощрения, и убытки (взыскания, штрафы). Естественно ожидать, что их среднее значение должно быть нулевым. Кроме того, эти результаты должны представлять собой нечто обобщающее, содержа признаки многих факторов, мотивирующих назначение (оценивание) тех или иных PSNE-ситуаций. Таким обобщающим свойством здесь может быть нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием. Следовательно, если  $\mathcal{N}(0, 1)$  есть бесконечное множество значений нормально распределённой случайной величины (НРСВ) с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией (НМОЕД), то

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P} = \left[ p_j \right]_F : p_j \in \mathcal{N}(0, 1) \right\} \subset \mathbb{R}^F. \quad (2)$$

Естественным ограничением выступает и подпространство  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^F$  с масштабируемыми

значениями НРСВ с НМОЕД, когда

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P}^{(\alpha)} = [p_j^{(\alpha)}]_F \in \mathbb{R}^F : \alpha > 0, (\alpha^{-1} \cdot p_j^{(\alpha)}) \in \mathcal{N}(0, 1) \right\} \subset \mathbb{R}^F, \tag{3}$$

а также с округляемыми отмасштабированными значениями НРСВ с НМОЕД, когда

$$\mathcal{P} = \left\{ \bar{\mathbf{P}}^{(\alpha)} = [\bar{p}_j^{(\alpha)}]_F \in \mathbb{R}^F : \alpha > 0, (\alpha^{-1} \cdot p_j^{(\alpha)}) \in \mathcal{N}(0, 1), p_j^{(\alpha)} - 1 \leq \bar{p}_j^{(\alpha)} \leq p_j^{(\alpha)}, \bar{p}_j^{(\alpha)} \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}^F. \tag{4}$$

Кстати, игры, которые строятся при ограничениях (2) и (3), аффинно эквивалентны. Поэтому эти ограничения можно назвать аффинно эквивалентными, рассматривая далее лишь подпространство (2).

Положим, что целое  $q(n, r)$  равно количеству PSNE-ситуаций в  $r$ -й генерации игры (1), где  $r = \overline{1, M}$  и  $M \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ,  $n = \overline{2, N}$  и  $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ . Тогда среднее количество PSNE-ситуаций в игре (1) равно

$$q_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M q(n, r). \tag{5}$$

Аналогично, если  $f(n, r) = 1$  при наличии PSNE-ситуаций в  $r$ -й генерации игры (1) и  $f(n, r) = 0$  при отсутствии PSNE-ситуаций в  $r$ -й генерации игры (1), то статистическая вероятность (СВ) наличия PSNE-ситуаций в игре (1) по  $M$  наблюдениям равна

$$f_M(n) = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M f(n, r). \tag{6}$$

Из соображений действительности достаточно взять  $N=12$  и  $M=1000$  для одного цикла генерации. Как видим (рис. 1 и рис. 2), при ограничении выигрышей с подпространством (2) среднее (5) не зависит от количества игроков наряду с убывающей СВ (6). Для случая с подпространством (4) при  $\alpha = 10$  среднее (5) явно возрастает (рис. 3), а СВ (6) убывает почти так же (рис. 4), как и для (2). Однако для (4) СВ  $f_{1000}(n) > 0.7 \quad \forall n = \overline{2, 12}$ . В то же время для (2) СВ  $f_{1000}(n) < 0.7 \quad \forall n = \overline{5, 12}$ . Из этого следует, что ограничение по подпространству (2) для генерации игр (1) с PSNE-ситуациями неэффективно. В этих играх организатор мотивирует игроков с помощью положительных значений элементов матриц их выигрышей, то есть с помощью поощрений (например, премий, бонусов, льгот и прочих видов вознаграждений). Но поощрения не обязательны, поскольку иногда и нулевые выигрыши (отсутствие взысканий) могут восприниматься как мотивация.

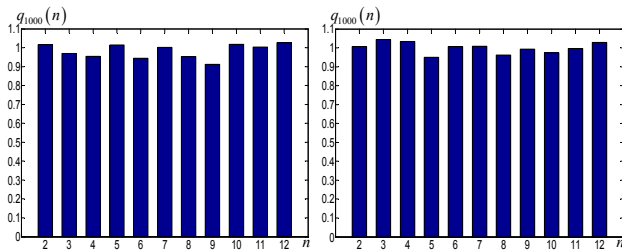


Рис. 1. Среднее количество PSNE-ситуаций в игре (1), в которой элементы матриц выигрышей игроков ограничиваются по подпространству (2)

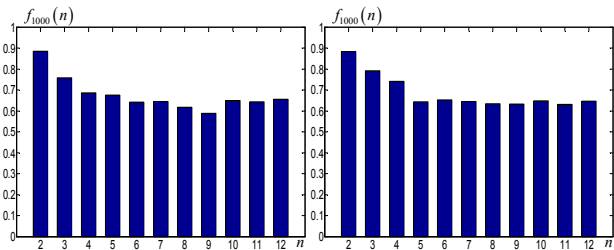


Рис. 2. СВ наличия PSNE-ситуаций в игре (1), в которой элементы матриц выигрышей игроков ограничиваются по подпространству (2)

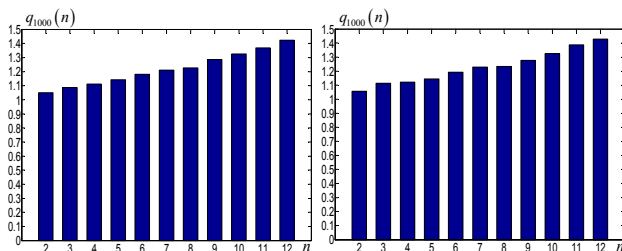


Рис. 3. Среднее количество PSNE-ситуаций в игре (1), в которой элементы матриц выигрышей игроков ограничиваются по подпространству (4) при  $\alpha = 10$

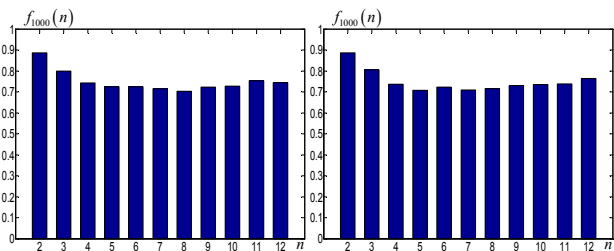


Рис. 4. СВ наличия PSNE-ситуаций в игре (1), в которой элементы матриц выигрышей игроков ограничиваются по подпространству (4) при  $\alpha = 10$

Вследствие этого вместо ограничений (2) — (4) можем предложить следующие. Пусть  $\mathcal{U}([0; 1])$  есть бесконечное множество значений равномерно распределённой случайной величины (PPCB) на единичном сегменте  $[0; 1]$ . Тогда возможны такие варианты подпространства  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^F$ :

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P} = [p_j]_F : (-p_j) \in \mathcal{U}([0; 1]) \right\} \subset \mathbb{R}^F, \tag{7}$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P}^{(\alpha)} = \left[ p_j^{(\alpha)} \right]_F \in \mathbb{R}^F : \alpha > 0, \left( -1 \cdot \alpha^{-1} \cdot p_j^{(\alpha)} \right) \in \mathcal{U}([0; 1]) \right\} \subset \mathbb{R}^F, \quad (8)$$

$$\mathcal{P} = \left\{ \bar{\mathbf{P}}^{(\alpha)} = \left[ \bar{p}_j^{(\alpha)} \right]_F \in \mathbb{R}^F : \alpha > 0, \left( -1 \cdot \alpha^{-1} \cdot p_j^{(\alpha)} \right) \in \mathcal{U}([0; 1]), p_j^{(\alpha)} - 1 \leq \bar{p}_j^{(\alpha)} \leq p_j^{(\alpha)}, \bar{p}_j^{(\alpha)} \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathbb{R}^F. \quad (9)$$

Тут також в силу афінної еквівалентності (7) і (8) нетривіально різні обмеження породжуються на підпространствах (7) і (9). Для обмеження по підпространству (7) характер залежностей (5) і (6) на рис. 5 і рис. 6 відповідно схожий з аналогічними на рис. 1 і рис. 2. А вот середнє (5), незважаючи на вік (рис. 7), робить це значно інтенсивніше в порівнянні з рис. 3. СВ (6) має відмінну особливість — мінімум при  $n=4$ . При  $n \in \{10, 11, 12\}$  СВ (6) порівнянимо з  $f_{1000}(2)$  і починає поступово перевищувати це значення, перевищуючи 0.95, що відчуємо при  $n=12$ .

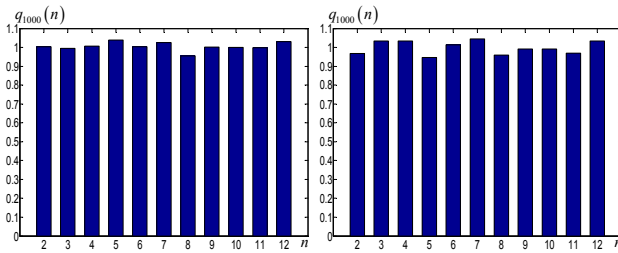


Рис. 5. Середнє кількість PSNE-ситуацій в грі (1), в якій елементи матриць вигравшій гравців обмежуються по підпространству (7)

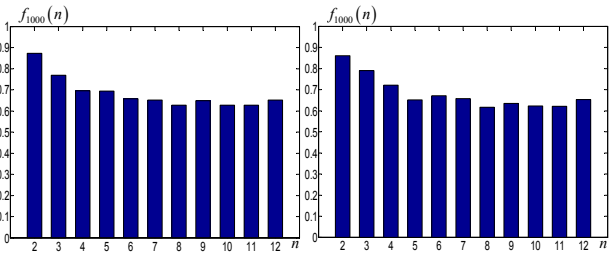


Рис. 6. СВ наявності PSNE-ситуацій в грі (1), в якій елементи матриць вигравшій гравців обмежуються по підпространству (7)

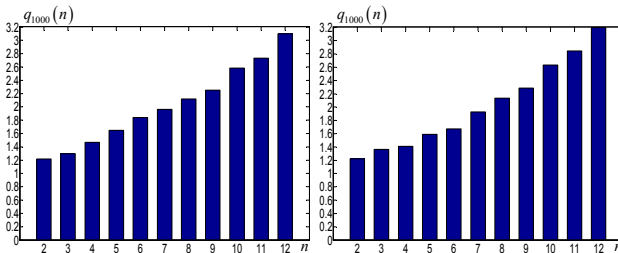


Рис. 7. Середнє кількість PSNE-ситуацій в грі (1), в якій елементи матриць вигравшій гравців обмежуються по підпространству (9) при  $\alpha = 10$

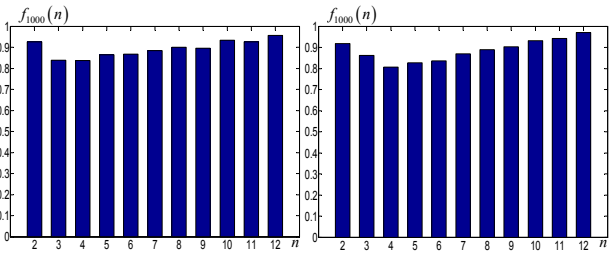


Рис. 8. СВ наявності PSNE-ситуацій в грі (1), в якій елементи матриць вигравшій гравців обмежуються по підпространству (9) при  $\alpha = 10$

### Обсуждение

Судя по рис. 8, СВ  $f_{1000}(12) > 0.95$ , что соответствует, условно говоря, обычному уровню статистической значимости. Следовательно, можно утверждать, что игра (1) с 12 игроками, чьи выигрыши ограничиваются по подпространству (9) с  $\alpha = 10$  (или другим коэффициентом порядка нескольких единиц или десятков), почти наверняка будет иметь PSNE-ситуации, причём в среднем будет не меньше трёх PSNE-ситуаций. Исключением будут не более, чем пять случаев из 100. Наблюдаемая статистика вполне достаточна для столь жёстких выводов. Разумеется, случай с (9) не “нормализован”, и даже нулевого математического ожидания здесь нет. Однако заметим, что нулевое значение для (9) можно воспринимать как максимальное поощрение, смещённое влево. А согласно центральной предельной теореме Ляпунова при многократном использовании ограничений по (9) переход к нормальному распределению неизбежен.

Конечно, получаемые PSNE-ситуации необязательно одновременно симметричны и выгодны. Тем не менее, организатор всегда имеет право слегка отрегулировать матрицы выигрышей так, чтобы симметризовать хотя бы одну PSNE-ситуацию. И это совсем не означает отход от модели ограничений по (9). Корректировка выигрышей выполняется повсеместно, систематичность чего приводит к подпространству (9), связь которого с подпространством (4) уже оговорена.

### Вывод и перспектива дальнейшего исследования

Представленное исследование позволяет конструировать диадические игры, имеющие несколько PSNE-ситуаций. Для этого матрицы выигрышей игроков ограничиваются на матричном подпространстве (9) и участвовать во взаимодействии призываются, вообще говоря, от 10 до 12 игроков (тех же промышленных объектов). Наличие PSNE-ситуаций гарантирует реализацию принципа равновесия. Предполагаемая бескоалиционность игрового взаимодействия является своеобразной минимаксной моделью возможных договорённостей, допускающую невозможность закрытых сговоров. При нарушении бескоалиционного поведения образуемые коалиции могут восприниматься как отдельные игроки. В этих случаях понадобится переназначение выигрышей и поиск новых PSNE-ситуаций. Конечно, чем больше PSNE-ситуаций, тем шире выбор максимально симметричной и выгодной ситуации. Этот вопрос, а также поиск эффективных ситуаций по Парето, может быть рассмотрен в дальнейшем исследовании.

**Литература**

1. Воробьёв Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Воробьёв Н. Н. — М. : Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. — 496 с.
2. Romanuke V. V. Environment guard model as dyadic three-person game with the generalized fine for the reservoir pollution / V. V. Romanuke // Екологічна безпека та природокористування. — 2010. — Вип. 6. — С. 77 — 94.

**References**

1. Vorobyov N. N. Game theory fundamentals. Noncooperative games, Moscow, Nauka, Main editorial office of physic-mathematical literature, 1984, 496 p.
2. Romanuke V. V. Environment guard model as dyadic three-person game with the generalized fine for the reservoir pollution, Ecological Safety and Nature Management, 2010, Iss. 6, pp. 77 — 94.

Рецензія/Peer review : 10.9.2014 р.

Надрукована/Printed :30.9.2014 р.

Стаття рецензована редакційною колегією