УДК 510.6

Л.П. БЕДРАТЮК, Г.І. БЕДРАТЮК
Хмельницький національний університет

ВИКОРИСТАННЯ СИСТЕМИ КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ MAPLE ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ОПТИМІЗАЦІЇ

*Дано опис основних команд пакетів **Optimization** та **simplex** системи комп'ютерної алгебри Maple. Розглянуто способи розв'язання деяких типових задач лінійної та нелінійної оптимізації в Maple. Зокрема розглянуті команди для наступних розділів: задачі лінійного програмування, задачі нелінійної оптимізації, транспортна задачі, метод найменших квадратів. Розглянуті пакети пропонується використовувати при вивченні дисциплін: дискретна математика, методи оптимізації, економічне моделювання.*

Ключові слова: цільова функція, Maple, мінімум, максимум, оптимізація,транспортна задача, метод найменших квадратів.

L.P. BEDRATIUK, A.I. BEDRATIUK
Khmelnytskyi National University, Ukraine

USING OF THE COMPUTER ALGEBRA SYSTEM MAPLE FOR SOLVING OPTIMIZATION PROBLEMS

*Recently we have seen the active penetration of computer algebra systems in the educational process that allows us to create innovative learning technologies, including mathematics education in universities. One of the most popular computer algebra systems is the system Maple, company Waterloo Maple, Inc., which successfully combines symbolic manipulation, computational mathematics, powerful graphics and easy programming language. Because of its convenience and versatility Maple system became an indispensable tool of research for many scientists, engineers and students. Almost every section of modern mathematics in Maple developed some specialized packages. However, at present these technologies, despite their effectiveness and visibility, for various reasons, is not common in the learning process, which is not conducive to the integration of higher education in Ukraine in the World Higher Education. The purpose of this paper is to develop a common approach to the use of computer algebra system Maple to solve some common problems of linear and nonlinear optimization, and which can be used in the educational process. The paper describes the package commands **Optimization** and **simplex** and illustrated by examples of their use for solving typical problems arising in optimization theory. The article can be useful in the study of some sections of discrete mathematics, optimization methods and economic modeling.*

Keywords: objective function, Maple, minimum, maximum, optimization, trans-portation problem, the method of least squares

Постановка проблеми

Останнім часом спостерігається активне проникнення систем комп'ютерної алгебри в освітній процес, що дозволяє формувати інноваційні технології навчання, зокрема математичного навчання в університетах [1–4]. Однією з найбільш популярних систем комп'ютерної алгебри є система Maple, фірми Waterloo Maple, Inc., яка успішно поєднує символьні маніпуляції, обчислювальну математику, потужну графіку та зручну мову програмування. В силу своєї зручності та універсальності система Maple стала незамінним інструментом наукових досліджень для студентів, інженерів та дослідників. Майже для кожного розділу сучасної математики в Maple розроблені окремі спеціалізовані пакети. Проте на даний час ці технології, незважаючи на свою ефективність та наочність, в силу різних причин, ще недостатньо поширені в навчальному процесі, що не сприяє інтеграції системи вищої освіти України у світовий простір вищої освіти. У статті описуються пакети команд Опис ***Optimization та simplex*** та на прикладах ілюструються особливості їхнього використання для вирішення типових задач які виникають в теорії оптимізації. Початкові навики роботи в системі комп'ютерної алгебри Maple, детально розглянуто в [5 – 6], а основні задачі лінійного програмування в [7].

Матеріали статті можуть бути використані студентами та викладачами ВНЗ для розв'язання типових задач, які зустрічаються в процесі вивчення дисциплін "Методи оптимізації", "Дискретні структури ", "Економічне моделювання".

2. Аналіз джерел літературних даних або публікацій та постановка проблеми

Метою даної статті є розгляд основних команд спеціалізованого пакетів **simplex**, **Optimization** які розроблений для розв'язання типових задач лінійної та нелінійної оптимізації в системі Maple. Початкові навики роботи в системі комп'ютерної алгебри Maple, детально розглянуто в [5 – 6].

Нагадаємо що основною задачею лінійного програмування [7] є знаходження мінімуму цільової функції

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

при наступних лінійних обмеженнях на змінні $x_1, x_2, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots a_{1,n}x_n \le b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots a_{2,n}x_n \le b_2, \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots a_{m,n}x_n \le b_m. \end{cases}$$

В матричному записі задача лінійного програмування записується у вигляді

$$A \cdot X \geq B, f = (C, X) \rightarrow \min,$$

для деякої матриці A та векторів X, B, C. Якщо функція f не є лінійною, або обмеження на зміннні не є лінійними, то задача знаходження її мінімуму називається задачею нелінійної оптимізації.

Дана стаття є продовженням статей авторів [8-10], спрямованих на популяризацію систем комп'ютерної алгебри.

Виклад основного матеріалу. Дамо короткий опис тієї частини мови програмування системи Maple та стандартних процедур, які необхідні для вирішення типових задач оптимізації.

Пакет **simplex** являє собою набір процедур для лінійної оптимізації розроблених на основі симплекс-методу. Розглянемо основні типи команд з цього пакету.Для підключення пакету **simplex** потрібно в командному рядку Maple набрати командний рядок такого вигляду:

> **with(simplex);**

$$[\,basis, convexhull, cterm, define\_zero, display, dual, feasible, maximize, minimize, pivot, pivoteqn, pivotvar, ratio, setup, standardize\,]$$

Команди minimize та maximize

Основними серед цих команд є команди minimize та maximize. Команда **minimize** використовується з додатковими параметрами, які визначають цільову функцію (або її ім'я, якщо вона вже була задана заздалегідь), лінійні обмеження записані у канонічній формі. Також, у списку параметрів можуть вказуватися тип змінних і імена змінних, яким будуть присвоєні деякі допоміжні значення, що виникають при розв'язанні задачі. Спрощений синтаксис цієї команд виглядає так:

minimize (Z, {C1, C2,C3…Cn});

Тут **Z** - цільова функція задачі лінійного програмування а C1,C2,…Cn – лінійні обмеження на змінні записані у канонічному вигляді, тобто з використанням нерівності ≤. Для формування канонічного вигляду обмежень задачі лінійного програмування використовується команда **convert/stdle**

> **convert({4 <= 3*x+4*y, 5 <= 4*x+3*y, 5*x+6*y=10}, stdle);**

$$\{-5\,x - 6\,y \leq -10, -4\,x - 3\,y \leq -5, -3\,x - 4\,y \leq -4, 5\,x + 6\,y \leq 10\}$$

Розглянемо приклад.

Приклад 1. Знайти мінімум функції $Z(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 - 3x_2 + 2x_3$ при обмеженнях $3x_1 - 5x_2 + 2x_3 \leq 60$, $x1 - x_2 + 2x_3 \leq 10$, $x_1 + x_2 - x_3 \leq 20$, і невід'ємних x_1, x_2, x_3.

Записуємо цільову функцію та обмеження

>**Z:=4*x[1]-3*x[2]+2*x[3]:C:={3*x[1]-5*x[2]+x[3]<=60,x[1]-x[2]+2*x[3]<=10,x[1]+x[2]-x[3]<=20};**

Змінній Sol присвоїмо результат виконання команди minimize

> **Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE);**

$$Sol := \{x_1 = 0, x_3 = 30, x_2 = 50\}$$

Зауважимо, що команди minimize та maximize повертають результат типу set (множина). Тому для знаходження мінімального значення функції Z можна виконати команду підстановки

> **subs(Sol,Z);**

$$-90$$

Отже, мінімальне значення цільової функції рівне - 90.

Якщо після натискання Enter числова відповідь не з'являється і немає повідомлень про синтаксичні помилки, то це означає, що задача не має розв'язку. У цьому випадку виводиться символ порожньої множини {}. Це означає, що у заданої цільової функції немає скінченого екстремуму, тобто при виконанні всіх заданих лінійних обмежень цільова функція необмежена за абсолютним значенням, або система лінійних умов несумісна. Спеціально для перевірки спільності умов у пакеті **simplex** є команда **feasible** яка повертає логічні константи true або false. Наприклад

> **feasible(C, NONNEGATIVE);**

$$true$$

тобто система умов C є сумісною.

Матрична форма запису задачі

Для великих оптимізаційних задач виписувати вручну умови незручно, тому такі задачі краще розглядати у матричній формі написавши відповідні Maple процедури

Приклад 2. Знайти мінімум функції $Z = 5x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 6x_5$ при наступних обмеженнях невід'ємних змінних $2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 \geq 10$, $6x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \geq 30$, $-3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \geq -5$, $-x_1 - x_2 - x_4 \geq -10$.

Для роботи з матрицями подрібно завантажити пакет linalg.

> with(linalg):

Задамо вектор змінних X:

> **X:=convert([seq(x[i],i=1..5)],vector);**

$$X := [x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$$

та вектор C, який визначає коефіцієнти цільової функції

> **C:=vector([5,-7,7,5,6]);**

$$C := [\,5,\ \text{-}7,\ 7,\ 5,\ 6\,]$$

Скалярний добуток векторів X та C задасть необхідну цільову функцію:

> **Z:=dotprod(X,C);**

$$Z := 5\,x_1 - 7\,x_2 + 7\,x_3 + 5\,x_4 + 6\,x_5$$

Задамо матрицю A та вектор B:

> **A:=Matrix([[2,3,4,2,2],[6,5,4,1,4],[-3,-2,-3,-4,0],[-1,-1,0,-1,0]]);**

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 4 \\ -3 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

> **B:=vector([10,30,-5,-10]);**

$$B := [\,10,\ 30,\ \text{-}5,\ \text{-}10\,]$$

Обмеження на змінні сформуємо як скалярний добуток рядків матриці на вектор X при допомозі оператора циклу

> **C:={}: for i from 1 to 4 do C:=C union {dotprod(X,row(A,i))>=B[i]} end do: C;**

$$\{\,10 \le 2\,x_1 + 3\,x_2 + 4\,x_3 + 2\,x_4 + 2\,x_5,\ \text{-}5 \le -3\,x_1 - 2\,x_2 - 3\,x_3 - 4\,x_4,$$
$$30 \le 6\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + x_4 + 4\,x_5,\ \text{-}10 \le -x_1 - x_2 - x_4\,\}$$

Перевіримо систему нерівностей на сумісність

> **feasible(C, NONNEGATIVE);**

$$true$$

Отже, оптимізаційна задача має розв'язок, який знаходимо командою

> **Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE);**

$$Sol := \{x_4 = 0,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = 0,\ x_1 = 0,\ x_5 = \frac{35}{8}\}$$

Значення цільової функції

> **subs(Sol,Z);**

$$\frac{35}{4}$$

Для зручності оформимо окрему процедуру для розв'язання задачі лінійного програмування записаної у матричному вигляді

> **Simplex_Matrix:=proc(A,B,C) local n,m,Z,Ob,i,j,X,Sol:m:=rowdim(A):n:=coldim(A):X:=convert([seq(x[i],i=1..n)],vector):Z:=dotprod(X,C):Ob:={}: for j from 1 to m do Ob:=Ob union {dotprod(X,row(A,j))>=B[j]} end do:Sol:=minimize(Z,C,NONNEGATIVE): [Sol,subs(Sol,Z)] end proc;**

```
Simplex_Matrix := proc (A, B, C)
local n, m, Z, Ob, i, j, X, Sol;
    m := rowdim(A);
    n := coldim(A);
    X := convert([seq(x[i], i = 1 .. n)], vector);
Z := dotprod(X, C);
Ob := { };
for j to m do Ob := Ob union {B[j] ≤ dotprod(X, row(A, j))} end do ;
Sol := minimize(Z, C, NONNEGATIVE);
[Sol, subs(Sol, Z)]
end proc
```

Формальними параметрами для процедури **Simplex_Matrix** є матриці A,B,C які потрібно визначити перед зверненнямм до неї. Процедура виводить точку мінімуму та значення цільвої функції у цій точці.

Транспортна задача

Розглянемо приклад розв'язання транспортної задачі в Maple. Як правило, транспортна задача розв'язується вручну методом мінімального елемента або методом Фогеля. Хоча її можна розв'язати і симплекс-методом.

Приклад 3. Деяка компанія має два заводи, F1 і F2, кожен з яких з яких виробляє два вироби, P1 і P2, які повинні бути відправлені до трьох дистрибютерських центрів, D1, D2, D3. У Таблиці 1 наведені витрати, пов'язані з доставкою кожного продукту з заводів в дистрибютерський центр, мінімальна кількість кожного продукту, потреби дистрибютерських центрів, і макси-мальну потужність кожного заводу. Скільки кожного продукту повинні бути відправлені з кожного заводу в кожний дистрибютерський центр щоб мінімізувати загальну вартість доставки?

Таблиця 1

Транспортна задача

	F1/P1	F1/P2	F2/P1	F2/P2	Потреби
D1/P1	0.75		0.80		500
D1/P2		0.50		0.40	400
D2/P1	1.00		9.00		300
D2/P2		0.75		1.20	500
D3/P1	0.90		0.85		700
D3/P2		0.80		0.95	300
Виробництво	1000	400	800	900	

Позначимо через $x_{i,j}$ кількість продукції яку нам потрібно перевезти до дистрибютера D_i від виробника Fj. Тоді нам необхідно мінімізувати наступну цільову функцію

$$f = 0.75x_{1,1} + 0.8x_{1,3} + 0.5x_{2,2} + 0.4x_{2,4} + x_{3,1} + 9x_{3,3} + 0.75x_{4,2} + 1.20x_{4,4} + 0.9x_{5,1} + 0.85x_{5,3} + 0.9x_{6,2} + 0.95x_{6,4}$$

при таких обмеженнях

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{3,1} + x_{5,1} \le 100, \\ x_{2,2} + x_{4,2} + x_{6,2} \le 400, \\ x_{1,3} + x_{3,3} + x_{5,3} \le 800, \\ x_{2,4} + x_{4,4} + x_{6,4} \le 400, \\ x_{1,1} + x_{1,2} \ge 500, \\ x_{2,2} + x_{2,3} \ge 400, \\ x_{3,1} + x_{3,3} \ge 300, \\ x_{4,2} + x_{4,4} \ge 500, \\ x_{5,1} + x_{5,3} \ge 700, \\ x_{6,2} + x_{6,4} \ge 300, \\ x_{i,j} \ge 0. \end{cases}$$

Сформуємо в Maple цільову функцію. Для цього викличемо пакет linalg

> **with(linalg):**

та перетворимо матрицю тарифних коефіцієнтів M у вектор *C*:

>M:= **Matrix([[0.75,0,0.8],[0,0.5,0,0.4],[1, 0, 0.9,0],[0,0.8,0,0.95]]): C:=convert(M,vector);**

$$C := [0.75, 0, 0.8, 0, 0, 0.5, 0, 0.4, 1, 0, 0.9, 0, 0, 0.8, 0, 0.95]$$

Тепер сформуємо матрицю невідомих і конвертуємо її також у вектор.

> ff:= (i,j)->x[i,j]: X:=convert(Matrix(6,4,ff),vector):

Тоді скалярний добуток цих векторів дасть нам потрібну цільову функцію:

> f:=dotprod(X,C);

$$f := 0.75\ x_{1,\,1} + 0.8\ x_{1,\,3} + 0.5\ x_{2,\,2} + 0.4\ x_{2,\,4} + x_{3,\,1} + 0.9\ x_{3,\,3} + 0.75\ x_{4,\,2} + 1.20\ x_{4,\,4} + 0.9\ x_{5,\,1} + 0.85\ x_{5,\,3} + 0.8\ x_{6,\,2} + 0.95\ x_{6,\,4}$$

Сформуємо вектори потреб і запасів

> Mp:=[500,400,300,500,700,300]:Mo:=[1000,400,800,900]:

Сформуємо систему обмежень на змінні

> **Co:={}:for i from 1 to 6 do Co:=Co union {dotprod(row(XX,i),row(MM,i))>=Mp[i]} end do:for j from 1 to 4 do Co:=Co union {dotprod(col(XX,j),col(MM,j))<=Mo[j]} end do:Co;**

$$\{x_{2,\,4} + x_{4,\,4} + x_{6,\,4} \le 900,\ x_{2,\,2} + x_{4,\,2} + x_{6,\,2} \le 400,\ 500 \le x_{1,\,1} + x_{1,\,3},\ 400 \le x_{2,\,2} + x_{2,\,4}, \\ 300 \le x_{3,\,1} + x_{3,\,3},\ 700 \le x_{5,\,1} + x_{5,\,3},\ 500 \le x_{4,\,2} + x_{4,\,4},\ 300 \le x_{6,\,2} + x_{6,\,4}, \\ x_{1,\,1} + x_{3,\,1} + x_{5,\,1} \le 1000,\ x_{1,\,3} + x_{3,\,3} + x_{5,\,3} \le 800\}$$

Перевіряємо її на сумісність

> **feasible(Co, NONNEGATIVE);**

$true$

Знаходимо точку мінімуму

> **Sol:=minimize(f,Co,NONNEGATIVE);**

$$Sol := \{x_{2,2}=0, x_{2,4}=400, x_{1,3}=0, x_{3,1}=0, x_{6,2}=0, x_{3,3}=300, x_{6,4}=300, x_{4,2}=400, x_{4,4}=100, x_{1,1}=500, x_{5,3}=500, x_{5,1}=200\}$$

Знаходимо значення цільової функції в цій точці

> **subs(Sol,f);**

2115.00

Нелінійні оптимізаційні задачі.

Нелінійні задачі розв'язуються при допомозі команд пакету **Optimization:**

> **with(Optimization);**

$[ImportMPS, Interactive, LPSolve, LSSolve, Maximize, Minimize, NLPSolve, QPSolve]$

Команда **Minimize(Maximize)** знаходить глобальний мінімум(максимум) цільової функції при заданій системі обмежень. Зауважимо, що як цільова функція так і обмеження можуть бути нелінійними:

> **Minimize((x-1)^3 + (x-y)^2, {x*(1+y^4)>=8});**

$[0.0624112370095334657, [x = 1.35084580137843, y = 1.48949879719504]]$

Команда NLPSolve знаходить екстремум нелінійної функції багатьох змінних наближеними методами. Функція може бути задана на інтервалах:

> **NLPSolve(x^3+2*x*y-2*y^2, x=-10..10, y=-10..10, initialpoint={x=3,y=4}, maximize);**

$[1050., [x = 10., y = 5.]]$

Команда LSSolve знаходить параметри оптимальної апроксимації таблично заданої функції методом найменших квадратів.

Приклад 4. Методом найменших квадратів знайти многочлен степеня 4 який найкраще апроксимує функцію задану таблично.

Задамо значення функції у вибраних точках і многочлен з невідомими коефіцієнтами:

> **data := [[1, 1.5], [2, 3.5], [2.5, 1.9], [3.1, 4.5], [4.3, 1.9], [4.7, 2.4], [5.8, 3]];**

$$data := [[1, 1.5], [2, 3.5], [2.5, 1.9], [3.1, 4.5], [4.3, 1.9], [4.7, 2.4], [5.8, 3]]$$

> p := a*x^4+b*x^3+c*x^2+d*x+e;

$p := a\,x^4 + b\,x^3 + c\,x^2 + d\,x + e$

Сформуємо систему рівнянь на коефіцієнти многочлена:

> **residues := map(proc (d) options operator, arrow; eval(p, x = d[1])-d[2] end proc, data);**

$$\begin{aligned} residues := [&a + b + c + d + e - 1.5, 16\,a + 8\,b + 4\,c + 2\,d + e - 3.5,\\ &39.0625\,a + 15.625\,b + 6.25\,c + 2.5\,d + e - 1.9,\\ &92.3521\,a + 29.791\,b + 9.61\,c + 3.1\,d + e - 4.5,\\ &341.8801\,a + 79.507\,b + 18.49\,c + 4.3\,d + e - 1.9,\\ &487.9681\,a + 103.823\,b + 22.09\,c + 4.7\,d + e - 2.4,\\ &1131.6496\,a + 195.112\,b + 33.64\,c + 5.8\,d + e - 3] \end{aligned}$$

Розв'яжемо перевизначену систему методом найменших квадратів і знайдемо вигляд многочлену наближення:

> **sol := LSSolve(residues);poly := eval(p, sol[2]);**

$$sol := [1.97866029509854924, [a = 0.0786123242184958, b = -0.914090550341305, c = 3.23250869429249, d = -3.22920414225409, e = 2.38896286480389]]$$

$$poly := 0.0786123242184958x^4 - 0.914090550341305x^3 + 3.23250869429249x^2 - 3.22920414225409x + 2.38896286480389$$

Висновки. В статті запропонована методика вивчення деяких розділів математики з використанням відомої системи коп'ютерної алгебри Maple. Такі підходи, на думку авторів, сприятимуть активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів та підвищать ефективність організації їхньої самостійної роботи. Крім того вони внесуть новизну в традиційні методи навчання, які зараз характеризуються пасивністю та епізодичним безсистемним використанням інформаційних технологій. В статті дано опис опис основних команд пакетів **Optimization** та **simplex** системи комп'ютерної алгебри **Maple**. Розглянуто способи розв'язання деяких типових задач лінійної та нелінійної оптимізації.

Література

1. Blythab, B. Labovic A., Using Maple to implement eLearning integrated with computer aided

assessment [Текст] / B. Blythab, A. Labovic // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. –2009. – 40(7). –P. 975-988

2. Chvatalova, Z. Education of Economics with Maple [Text] / Z. Chvatalova, J. Hrebicek // Proceedings of the 30th international conference mathematical methods in economics, Karviná, Czech Republic, 2012.– P. 435–440.

3. Wiest, L., The Role of Computers in Mathematics Teaching and Learning [Текст]/ Lynda R. Wiest// Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research. –2001. – 17(1-2).– P.41–55.

4. Adym, E. The use of computers in mathematics education: A paradigm shift from "computer assisted instruction" towards "student rogramming" [Текст] /E.Adym // The Turkish Online Journal of Educational Technology. –2005. – 4(2).– P.27–34.

5. Adams P., Smith K., Vyborny R., Introduction To Mathematics With Maple.[Текст]/ P. Adams, Smith K., Vyborny R., –World Scientific Pub Co Inc, –2004, –544 p.

6. Васильев А. Н. Maple 8. Самоучитель[Текст] / А.Н. Васильєв. –М.: Диалектика, 2003.– 352 с.

7. Кормен Т., Лейзерсон Ч., Ривест Р., Штайн К. Алгоритмы. Построение и анализ. [Текст] / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон та ін. –М.:Вильямс, 2013. –1324 с.

8. Бедратюк, Г. Використання Maple при вивченні дисципліни "Методи синтезу та оптимізації" [Текст] / Г. Бедратюк// Збірник наукових праць ФПМКТ. - Хмельницький: ХНУ. -2010. - №1(3). - с. 137-141.

9. Бедратюк, Л. Computer algebra systems in graph theory / Л. Бедратюк, Г. Бедратюк // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2012. – Vol. 6, N 4(60). - P. 43-46

10. Бедратюк, Л. Computer algebra systems in the elementary number theory / Л. Бедратюк, Г. Бедратюк // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2013. – Vol. 6, N 4(66). - P. 10-13. – Way of Access :

References

1. Blythab, B. Labovic A.(2009) Using Maple to implement eLearning integrated with computer aided assessment, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. –40(7).). –P. 975-988

2. Chvatalova, Z., Hrebicek, J. (2012). Education of Economics with Maple, Proceedings of the 30th international conference mathematical methods in economics, Karviná, Czech Republic, 435–440.

3. Wiest, L. (2001), The Role of Computers in Mathematics Teaching and Learning , Computers in the Schools: Interdisciplinary Journal of Practice, Theory, and Applied Research. – 17(1-2).– P.41–55.

4. Adym, E. (2005).The use of computers in mathematics education: A paradigm shift from "computer assisted instruction" towards "student rogramming", The Turkish Online Journal of Educational Technology, 4(2), 27–34.

5. Adams P., Smith K., Vyborny R. (2004), Introduction To Mathematics With Maple, -World Scientific Pub Co Inc, –2004, –544 p.

6. Васильев А. Н. (2003), Maple 8. Самоучитель. –М.: Диалектика,- 352 с.

7. Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stain C. (2009). Introduction to Algorithms, MIT press, 1313 p.

8. Bedratyuk A.I. (2010). Using Maple for teaching of Synthesis and Optimization[Vykorystannya Maple pry vyvchenni dyscypliny "Metody Syntezu ta optymizacii], Collected Works FPMKT, V. 1(3),137-141

9. Bedratyuk A.I., Bedratyuk L.P. (2012) Computer algebra systems in graph theory. Eastern-European Journal Of Enterprise Technologies,6(4(60)), 43-46

10. Bedratyuk A.I., Bedratyuk L.P. (2013). Computer algebra systems in the elementary number theory. Eastern-European Journal Of Enterprise Technologies, 6(4(66)), 10-13.

Рецензія/Peer review : 26.09.2014 р. Надрукована/Printed :1.10.2014 р.
Стаття рецензована редакційною колегією

Повні вимоги до оформлення рукопису http://visniktup.narod.ru/rules/

Рекомендовано до друку рішенням вченої ради Хмельницького національного університету, протокол № 3 від 24.09.2014 р.

Підп. до друку 26.02.2014 р. Ум.друк.арк. 18,26 Обл.-вид.арк. 22,65
Формат 30x42/4, папір офсетний. Друк різографією.
Наклад 100, зам. № _____

Тиражування здійснено з оригінал-макету, виготовленого
редакцією журналу "Вісник Хмельницького національного університету"
редакційно-видавничим центром Хмельницького національного університету
29016, м. Хмельницький, вул. Інститутська, 7/1. тел (0382) 72-83-63