

## РОЗВ'ЯЗАННЯ КОНТАКТНИХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЗА ЗНАЧНИХ ПРОКОВЗУВАНЬ ТА СИЛ ТЕРТЯ

В роботі розглянуто випадок контакту двох об'єктів, коли контакт здійснюється між вузлом та стороною скінченного елемента, а відносно проковзування викликає виникнення сил тертя. Пропонується спосіб врахування контактних умов, який відрізняється від відомих тим, що контактні умови задовольняються шляхом корегування глобальної матриці жорсткості. Перевагою цього способу є те, що матриця жорсткості зберігає стрічковість при зменшенні загальної кількості рівнянь рівноваги.

Ключові слова: контактна взаємодія, метод скінчених елементів, матриця жорсткості, рівняння рівноваги, граничні умови, симетрія матриці жорсткості.

V.L. MARCHENKO

Khmelnytsky National University

### DECISION OF CONTACT PROBLEMS WITH FINITE ELEMENT METHOD WITH LARGE FORCES AND FRICTION SLIP

In work the way of the decision of contact problems a method of the ended elements which differs from known themes is offered, that contact conditions are satisfied by a correcting of a global matrix of rigidity. Advantage of this way is that the matrix of rigidity keeps symmetry and tape at reduction of total of the equations of balance. The case when contact is carried out between unit of one and the party of other object is considered. The dependence of friction force on the relative movement of the contact surface is a nonlinear function. Ensuring contact conditions are integration process. There is algorithm for solving the problem in which the frictional forces were caused by physical significance.

Keywords: contact interaction, finite element method, stiffness matrix, equilibrium equation, boundary conditions, symmetry of the matrix stiffness.

**Вступ.** Наявність на контактній поверхні значних відносних проковзувань обумовлює те, що при рішенні задачі методом скінчених елементів забезпечити контакт між вузлами елементів, що належать до різних об'єктів досить важко. Сили тертя звичайно визначаються з результатів розрахунку попереднього етапу обчислень, що може призвести до жорсткого зміщення при контакті декількох об'єктів і відсутності заданих кінематичних граничних умов на одному з них. Врахування контактних умов звичайно полягає в введенні додаткових невідомих сил та доповнення системи рівнянь рівноваги додатковими рівняннями, які описують співвідношення між силами та переміщеннями на контактній поверхні. При цьому система рівнянь стає не стрічковою і кількість обчислень суттєво збільшується. Розробка способу врахування контактних умов, який позбавлений вказаних недоліків, дозволить підвищити ефективність використання методу скінчених елементів при рішенні контактних задач.

Відомо досить багато моделей та алгоритмів рішення контактних задач, які не позбавлені вказаних недоліків [1–6]. Це моделі, засновані на побудові матриці граничної податливості [1]; введені контактного шару чи фіктивних жорсткостей [2, 3]; методи, засновані на окремому розгляді тіл (з використанням методу сил [4, 5]), та сумісному розгляді контактуючих об'єктів [6] та деякі інші. В роботі [7] запропоновано спосіб рішення контактних задач, який засновано на корегуванні глобальної матриці жорсткості. Але при цьому, хоча й кількість рівнянь не збільшується, система рівноваги теж не є стрічковою та симетричною. Окрім того, розглянуто тільки випадок вертикального контакту.

**Постановка завдання.** В роботі поставлена задача розробити спосіб врахування контактних умов при значних відносних проковзуваннях і силах тертя, при якому матриця жорсткості залишається стрічковою а кількість рівнянь рівноваги зменшується

Основна частина. Розробка способу рішення контактних задач та здійснення розрахунків.

Спосіб, запропонований в даній роботі, полягає в наступному.

Розглянемо взаємодію двох плоских об'єктів, які контактують по деякій поверхні (рис. 1). Використання методу скінчених елементів для розв'язку контактних задач передбачає рішення системи рівнянь рівноваги

$$[K]\{\delta\} = \{F\}, \quad (1)$$

при врахуванні силових

$$|\sigma_1^r| = \tau; |\sigma_2^r| = \tau; \quad (2)$$

та кінематичних

$$\delta_1^n + \delta_2^n = -\Delta \quad (3)$$

контактних умов. В співвідношеннях (1–3)  $[K]$  – глобальна

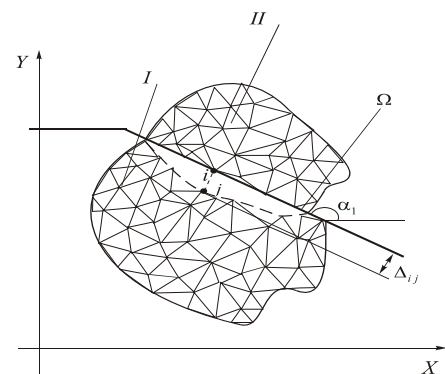


Рис. 1. Контакт двох плоских об'єктів

матриця жорсткості,  $\{\delta\}, \{F\}$  – вектори вузлових переміщень та сил,  $\sigma_1^r, \sigma_2^r$  – проекції контактних напружень на нормаль  $\eta$  до поверхні контакту,  $\delta_1^n, \delta_2^n$  – нормальні до поверхні переміщення,  $\Delta$  – величина натягу (чи зазору). Індексами 1, 2 позначено перший та другий контактуючий об’єкти. Прийmemo в першому наближенні, що контакт здійснюється по деякій максимально можливій поверхні. Нехай між вузлом  $i$ , та стороною  $jk$  існує початковий натяг  $\Delta_{ijk}$  (рис.2). В подальшому для спрощення будемо розглядати тільки контакт цього вузла зі стороною елемента. Позначимо через  $\{F_n\}$  вектор проєкцій нормальної до контактної поверхні складової вузлових сил, а вузлові сили тертя  $\tau$  прийmemo у вигляді лінійної функції відносного проковзування.

$$\tau_1 = (\delta_{2,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{2,y} \cos(\alpha_2 - 90^0) - (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^0))) G \tag{4}$$

$$\tau_2 = (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^0) - (\delta_{2,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{2,y} \cos(\alpha_2 - 90^0))) G \tag{5}$$

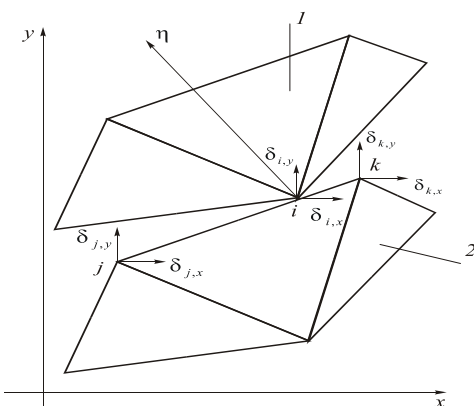


Рис. 2. Контакт вузла зі стороною скінченного елемента

В співвідношеннях (4,5) через  $\delta_{2,x}, \delta_{2,y}$  позначено проєкції переміщень точки, контакту вузла  $i$ , зі стороною  $jk$ . Визначаючи ці величини через переміщення вузлів  $j, k$  і використовуючи позначення роботи [8] отримаємо:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & ((\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_j + \\ & + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_k - \\ & - (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^0))) G \\ \tau_2 = & \delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^0) - \\ & ((\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_j + \\ & + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_k) G \end{aligned}$$

де  $N_j, N_k$  – функції форми скінченного елемента.

Коефіцієнт пропорційності  $G$  повинен бути достатньо великим, щоб сили тертя досягали величин сил тертя ковзання  $\tau_k$  при незначному відносному переміщенні.

Запишемо рівняння повної енергії системи

$$\begin{aligned} \chi = & \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \int_V \{\varepsilon^e\}^T \{\sigma^e\} dv - \sum_{k=1}^K (\{F_k\}^T \{\delta_k\}) + \\ & + \sum_{n=1}^N (\{F_{1n}\}^T \{\delta_{1n}\} + \{F_{2n}\}^T \{\delta_{2n}\}) + \tau_{1n} (\delta_{1n}^r - \delta_{2n}^r) \end{aligned} \tag{6}$$

де  $E, K$  – кількість елементів та вузлів скінченно-елементної моделі,  $N$  – кількість пар вузлів контактної поверхні;  $\delta_n^r$  – проєкції вузлових переміщень на дотичну до контактної поверхні. Враховуючи, що

$$\begin{aligned} \delta_{1n}^r = & \delta_{1,x} \sin(\alpha_1 - 90^0) + \delta_{1,y} \cos(\alpha_1 - 90^0); \\ \delta_{2n}^r = & (\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_j + \\ & + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^0) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^0)) N_k \end{aligned}$$

підставимо в рівняння (6) співвідношення (4), (5), а також відомі вирази [8] для рівнянь Коші і закону Гука. В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
\chi &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \int_V \{\delta_e\}^T \int_V [B^e]^T [D][B^e] dv \{\delta_e\} - \left( \sum_{k=1}^K \{F_k\}^T \{\delta_k\} \right) + \sum_{n=1}^N \left( \{F_{1n}\}^T \{\delta_{1n}\} + \{F_{2n}\}^T \{\delta_{2n}\} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} \left( (\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_j + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \right. \\
&+ \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_k - (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ)) G (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \\
&+ \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ)) + ((\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ)) - ((\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \\
&+ \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_j + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_k) G (\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \\
&+ \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_j + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_k \left. \right) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^E \int_V \{\delta_e\}^T \int_V [B^e]^T [D][B^e] dv \{\delta_e\} - \left( \sum_{k=1}^K \{F_k\}^T \{\delta_k\} \right) + \sum_{n=1}^N \left( \{F_{1n}\}^T \{\delta_{1n}\} + \{F_{2n}\}^T \{\delta_{2n}\} \right) + \\
&+ \frac{1}{2} G \left( (\delta_{j,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{j,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_j + (\delta_{k,x} \sin(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{k,y} \cos(\alpha_2 - 90^\circ)) N_k - \right. \\
&\left. - (\delta_{i,x} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{i,y} \cos(\alpha_1 - 90^\circ)) \right)^2
\end{aligned}$$

Умовою мінімуму енергії системи є

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\delta\}} = 0$$

В розрахунковому вигляді вона зводиться до рівнянь:

$$\sum_{e=1}^E [K^e] \{\delta_e\} + \sum_n [K^n] \{\delta_n\} = (\{F\} + \{F_n\}), \quad (7)$$

де  $[K^e]$  – матриця жорсткості елемента скінченно-елементної моделі,  $[K^n]$  назвемо тангенційною матрицею жорсткості

контактного елемента, до якого входять вузол одного об'єкту та два вузли сторони скінченного елемента, що з ним контактують,  $\{\delta_n\}$  – вектор вузлових переміщень контактної вузла, для розглянутого елемента контакту

$$[K^n] = G \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \\ -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \\ -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \\ -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \\ -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \\ -\sin(\alpha_1^n) \dots -\cos(\alpha_1^n) \dots \sin(\alpha_2^n) N_j \dots \cos(\alpha_2^n) N_j \dots \sin(\alpha_2^n) N_k \dots \cos(\alpha_2^n) N_k \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\sin(\alpha_1^n) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos(\alpha_1^n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\alpha_2^n) N_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_2^n) N_j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha_2^n) N_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_2^n) N_k \end{bmatrix}$$

Через  $(\alpha_1^n)$ ,  $(\alpha_2^n)$  позначено кути  $(\alpha_1 - 90^\circ)$  та  $(\alpha_2 - 90^\circ)$  відповідно.

Для врахування контактних умов шляхом корегування матриці жорсткості запишемо співвідношення (2), (3) в дещо іншому вигляді, а напруження замінимо вузловими силами скінченно-елементної сітки

$$\begin{aligned}
&\delta_{i,x} \cos(\alpha_1 - 90^\circ) + \delta_{i,y} \sin(\alpha_1 - 90^\circ) + ((\delta_{j,x} \cos(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{j,y} \sin(\alpha_2 - 90^\circ)) N_j + \\
&+ ((\delta_{k,x} \cos(\alpha_2 - 90^\circ) + \delta_{k,y} \sin(\alpha_2 - 90^\circ)) N_k) = -\Delta_{i,jk}
\end{aligned} \quad (8)$$

Для врахування кінематичних контактних умов достатньо одну з проекцій будь-якого з контактуючих вузлів визначити з рівняння (8) через інші. Визначимо для прикладу компоненту  $\delta_{i,x}$ .

$$\delta_{i,x} = -\delta_{i,y} \tan(\alpha_1 - 90^\circ) + ((\delta_{j,x} + \delta_{j,y} \tan(\alpha_1 - 90^\circ))N_j + ((\delta_{k,x} + \delta_{k,y} \tan(\alpha_1 - 90^\circ))N_k - \frac{\Delta_{i,jk}}{\cos(\alpha_1 - 90^\circ)}) \tag{9}$$

В співвідношенні (9) при значеннях кута  $\alpha_1 = 0^\circ, 180^\circ$  тангенс, що входять у співвідношення дорівнює нескінченності. В цьому випадку визначати необхідно іншу складову переміщення  $-\delta_{i,y}$ . В одному і в іншому випадку подальші перетворення аналогічні і будемо вважати, що не дорівнює нулю.

Підставляючи співвідношення (9) в систему рівнянь (7) та зводячи подібні члени глобальну матрицю жорсткості можна скорегувати наступним чином

$$\begin{aligned} K_{n,2i} &= K_{n,2i} - K_{n,2i-1} \tan(\alpha_1 - 90^\circ), \\ K_{n,2j-1} &= K_{n,2j-1} + K_{n,2i-1} N_j, \\ K_{n,2j} &= K_{n,2j} + K_{n,2i-1} \tan(\alpha_1 - 90^\circ) N_j, \\ K_{n,2k-1} &= K_{n,2k-1} + K_{n,2i-1} N_k, \\ K_{n,2k} &= K_{n,2k} + K_{n,2i-1} \tan(\alpha_1 - 90^\circ) N_k, \end{aligned} \tag{10} \quad n = 1, NN$$

де  $NN$  – кількість рівнянь рівноваги.

Права частина кожного з рівнянь у відповідності з (9) дорівнює

$$\{F_n\} = \{F_n\} + K_{n,2i-1} \frac{\Delta_{i,jk}}{\cos(\alpha_1 - 90^\circ)}, \quad n = 1, NN$$

Врахування кінематичних контактних умов наведеним способом призводить до зменшення невідомих та, відповідно, кількості рівнянь і стовпців. Для розглянутих вузла і сторони скінченного елемента необхідно вилучити рядок та стовпчик з індексом  $2i - 1$ .

Аналогічні перетворення належить виконати для кожного вузла, що контактує зі стороною елемента. При цьому необхідно враховувати, що в вектор вузлових переміщень, які отримуються при рішенні скоригованої системи рівнянь рівноваги, не увійдуть переміщення, виключені при корегуванні. Тому їх нумерацію необхідно відповідним чином змінити. Однак перед обчисленням напружень вектор переміщень повинен бути доповнений у відповідності до співвідношення (9).

Отримане рішення повинно перевірятися на відсутність напружень розтягу на контактних поверхнях. При наявності напружень розтягу в даному вузлі, вузол виключається з контактних (поверхня  $\Omega$  зменшується) і розрахунок повторюється.

Рішення системи рівнянь (7), скоригованої наведеним способом, дає поле напружень та вузлових переміщень, використовуючи які визначаються сили тертя за співвідношеннями (4, 5).

Сили тертя нелінійно зв'язані з переміщеннями. Тому система (7) є нелінійною навіть при рішенні пружних задач. За аналогією з функцією текучості в теорії пластичності для сил тертя можна записати

$$f f = |\tau(\Delta f)| - \tau(q) \leq 0 \tag{11}$$

де  $\tau(\Delta f)$ ,  $\tau(q)$  – величина обчислених сил тертя та визначених з прийнятої моделі тертя, наприклад за законом Кулона,  $\Delta f$  – величина відносного проковзування.

Характер залежності сил тертя від переміщень можна продемонструвати графіками, зображеними на рис. 3.

Похилі ділянки графіків відповідають силам тертя спокою, горизонтальні – ковзання. Кожному значенню нормального навантаження  $q$  відповідає своя величина сил тертя ковзання  $\tau(q)$  і своя горизонтальна пряма. Найбільша величина сил тертя для пластичних матеріалів не може перевищувати границі текучості  $\tau_s$ . Тому всі горизонтальні прямі на графіку будуть проходити нижче граничної прямої, що показано на рисунку пунктиром.

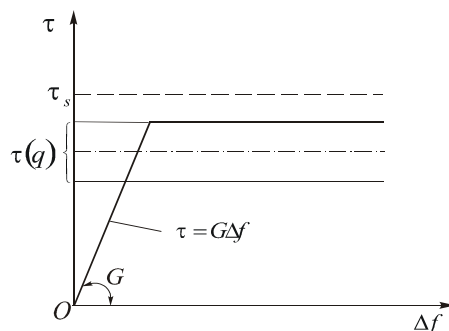


Рис. 3. Залежність сил тертя від відносного переміщення

Задовольнити умові (11) можна за допомогою ітераційної процедури, яка в роботі [9] названа методом фіктивних сил тертя, і є аналогом методу початкових напружень. Метод полягає в тому, що розраховані в першому наближенні сили тертя порівнюються з тими величинами, які виходять із відомих закономірностей, наприклад. Різниця цих величини використовується в подальших розрахунках для визначення неув'язок, які приймаються з від'ємним знаком.

Алгоритм методу можна представити графічно в наступному вигляді (рис. 4, а).

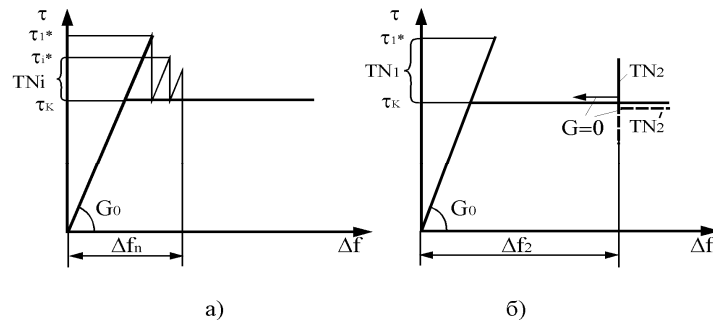


Рис. 4. Схема ітераційного процесу методу фіктивних сил тертя

Нехай на першій ітерації отримано, що сили тертя в точці контактної поверхні дорівнюють  $\tau_1^*$ . Величина цих сил, яка відповідає закономірностям тертя на даному наближенні (умовно дійсні сили тертя) дорівнює  $\tau_k$ . Обчисливши невірноважену частину  $TN = \tau_1^* - \tau_k$  визначаються неув'язки, сила тертя приймається рівною  $\tau = \tau_k$ , а величина проковзування  $\Delta f_k$ . Наступні ітерації виконуються аналогічним чином.

Можна помітити, що обчислення будуть виконуватись доти, доки вся величина невірноваженої частини сил тертя  $TN$  не буде врівноважена напруженнями в контактуючих об'єктах ( $TN_i = 0$ ). Звісно, при тій умові, що  $\tau_k$  – величина незмінна.

Тому можна запропонувати інший алгоритм (рис. 4, б).

Приймемо, що після першої ітерації і визначення неув'язок сили тертя на контактній поверхні дорівнюють  $\tau_k$ , а коефіцієнт  $G = 0$ . Тоді невірноважені сили тертя одразу будуть сприйняті контактуючими об'єктами.

На другій ітерації отримується повна величина проковзування  $\Delta f_n$ . В тому випадку, коли умовно дійсні сили тертя мало відрізняються від  $\tau_k$ , процес обчислень може бути без ітераційним.

Якщо абсолютна величина невірноваженої частини сил тертя  $TN_2$  більша за задану точність, уточнення необхідні. При чому значення  $TN$  може бути додатним чи від'ємним. Від цього залежить напрям подальшого деформування. При умові  $TN_2 < 0$  проковзування буде зменшуватись (на рисунку показано суцільною стрілкою) і навпаки, при  $TN_2' > 0$  величина проковзування зростає (на рисунку штрихова стрілка).

Ознакою закінчення розрахунків є:

$$|\tau(\Delta f) - \tau(q)| \leq \xi$$

де  $\xi$  – точність обчислень.

**Висновки.** Отримані математичні співвідношення можуть бути використані для рішення контактних задач при значному відносному переміщенні. Використання сил тертя у вигляді лінійної функції відносного переміщення дозволяє уникнути жорсткого зміщення, яке може виникнути при контакті декількох об'єктів при відсутності заданих кінематичних умов для одного з них. Запропонований спосіб врахування контактних умов дозволяє зберегти стрічковість глобальної матриці жорсткості та кількості рівнянь рівноваги.

## Література

1. Sachdeva T.D., Ramakrishnan C.V. A finite element solution for two-dimensional elastic contact problems with friction. Int. Journal Num. Meth. Engng. 1981. V. 17. № 8. P. 1257–1271.
2. Паутов А.Н. Метод фиктивных жесткостей в численном решении контактных задач / А.Н. Паутов, А.И. Солуянова // Прикладные проблемы прочности и пластичности. – 1978. – № 9. – С. 49–54.
3. Фурунжиев Р.И. Контактные конечные элементы в расчетах конструкций с учетом податливости узловых связей / Р.И. Фурунжиев // Строит. Конструкций. – Минск, 1978. – № 20. С. 16–18.
4. Гольник Э.Р. Дискретное моделирование упругих тел, контактно взаимодействующих при произвольных статических нагрузках, зазорах, натягах / Э.Р. Гольник, И.Г. Радченко // Изв. Вузов. Машиностроение. – 1987. – № 12. – С. 11–13.
5. Иосилевич Г.Б. Решение конструкционно-контактных задач численными методами / Г.Б.

Иосилевич, Г.В. Осипова // Машиностроение. – 1976. – № 4. – С. 69–72.

6. Шевченко Ю.А. Применение метода конечных элементов к решению контактной задачи теории упругости с переменной зоной контакта без трения / Ю.А. Шевченко // Ученые записки ЦАГИ. – 1976. – Т. 7. – № 6. – С. 109–147.

7. Марченко В.Л. Разработка конструкций и методик проектирования осесимметричного инструмента для холодной объемной штамповки : автореф. дис. на соискание науч. степени канд. техн. наук / Марченко В.Л. – М., 1984. – 25 с.

8. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике / Зенкевич О.К. – М. : Мир, 1975. – 541 с.

9. Марченко В.Л. Розробка моделі пружно-пластичного контакту тіл з лінійчатою контактною поверхнею / В.Л. Марченко // Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – 1999. – № 4. – С. 10–14.

#### References

1. Sachdeva T.D., Ramakrishnan C.V. A finite element solution for two-dimensional elastic contact problems with friction. // Int. Journal Num. Meth. Engng. - 1981. - V. 17. - №8. - P. 1257 - 1271.
2. Petersen, A. N., Solujanova A. I. Method of fictitious stiffness in the numerical solution of contact problems. // Applied problems of strength and plasticity. - 1978, No. 9, S. 49 – 54.
3. Furungiev R. I. Contact finite elements in structural analysis, taking into account the compliance of the nodal connections. // In Proc. Builds. Structures. - Minsk. - 1978, No. 20, S. 16 – 18.
4. Golnik E. R., I. Radchenko, Discrete simulation of elastic bodies, contact interacting with arbitrary static loads, clearances, tightness. "Izv. Higher education institutions. - Engineering - 1987 - No. 12 - S. 11 - 13.
5. Iosilevich, B., Osipov, C. structural Solution-contact problems by numerical methods. - Engineering, No. 4, 1976, S. 69 - 72.
6. Shevchenko Y. A. Application of the finite element method to the solution of contact problems of elasticity theory with a variable area of contact without friction. // Uchenye Zapiski TSAGI - 1976 - so 7 - No. 6 - S. 109 - 147.
7. Marchenko C. L. Development of structures and design methods axial tool for cold object roadways stamping: author. Diss.... Kida. technology. Sciences. - M - 1984. - 25 C.
8. Zenkevich O. K., the finite element Method in engineering. - M.: Mir. - 1975, S. 541.
9. Marchenko C. L. development model progno-plastic contact til C lneato contact surface // Vimruntime absolutely machinery in of technological processes. -1999. No. 4.- C. 10-14.

Рецензія/Peer review : 14.11.2014 р.

Надрукована/Printed :29.11.2014 р.

Стаття рецензована редакційною колегією