

УДК 621.01

Р.В. АМБАРЦУМЯНЦ, А.П. ЛИПИН, С.А. РОМАШКЕВИЧ
Одесская национальная академия пищевых технологийКИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЯТИЗВЕННОГО
ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

Решена задача кинематического анализа пятизвенового зубчато-рычажного механизма, входным звеном которого является цилиндрическое зубчатое колесо, установленное соосно с одним из рычагов базового шарнирного четырехзвенника. Математическое моделирование поставленной задачи осуществлено с применением элементов векторной алгебры и понятия «обращенный механизм», что позволило получить функцию положения механизма относительно рычага, соосного с зубчатым колесом, в виде алгебраического уравнения четвертого порядка. Установлено, что из четырех возможных корней уравнения, действительными могут быть только два, соответствующие двум сборкам базового шарнирного четырехзвенника. Приведен числовой пример.

Ключевые слова: кинематический анализ, входное звено, зубчатое колесо, моделирование, алгебраическое уравнение, корень уравнения, базовый шарнирный четырехзвенник.

R. V. AMBARTSUMYANTS, A. P. LIPIN, S. A. ROMASHKEVICH
Odessa National Academy of Food Technologies

KINEMATIC RESEARCH OF THE GEARED FIVE-BAR LINKAGES MECHANISM

Among geared linkages mechanisms a five-bar geared linkages mechanism is the most widespread in the technique, as well as its varieties. It happens because of a small number of its links. The analysis of the modern condition of the question of the kinematic analysis of the five-bar geared linkages mechanism has been carried out and urgency of the task, stated in the work, has been substantiated. In the research of this mechanism, which was made before, the links of the base jointed four-linked mechanism were used as an entrance link. In the given work the spur gear wheel, mounted on the basis of the mechanism coaxially with one of the levers of the base jointed four-linked mechanism, was taken as an entrance link. It allows to reveal new functional abilities of the mechanism. The solution of the task of the kinematic analysis has been carried out by application of the elements of vectorial algebra and abstract notion of "a transformed mechanism". The function of the condition of the exit link of the base jointed four-linked mechanism coaxial with the entrance spur gear wheel, has been received as an algebraic equation of the fourth order. The analysis of this function has shown that from the four possible roots of the equation only two roots can be real, which correspond to two assemblies of the base jointed four-linked mechanism. It has also been determined, that the exit link of the jointed four-linked mechanism, coaxially with the entrance gear wheel, must be a crank. The simple expressions, determining the kinematic indices (condition, analogues of the speeds and accelerations) of the other exit link of the base jointed four-linked mechanism have been received. The numerical example has been given.

Keywords: kinematic analysis, entrance link, spur gear wheel, modelling, algebraic equation, root of equation, base articulated mechanism.

Пятизвённые зубчато-рычажные механизмы (ЗРМ) с одной степенью подвижности, синтезированные на базе шарнирного четырехзвенного рычажного механизма путем внесения пары сопряженных зубчатых колес, нашли сравнительно большее применение в различных отраслях техники благодаря более широким функциональным возможностям в сравнении с базовыми четырехзвенными рычажными механизмами различных модификаций [1, 3, 5, 6]. В этой связи в технической литературе исследованию кинематики вышеуказанных ЗРМ посвящено много работ. Однако, в работах по кинематическому исследованию пятизвённого ЗРМ определенной структуры (рис. 1), в качестве входного звена выбрано одно из рычажных звеньев базового шарнирно-рычажного четырехзвенника, образующего кинематическую пару со стойкой – звено 1, либо 3, что, естественно, сравнительно облегчает математическое моделирование поставленной задачи кинематического анализа и ее реализацию.

На наш взгляд, особый интерес представляет исследование кинематики представленного механизма, входным звеном которого является зубчатое колесо 4. В этом случае ведомыми звеньями могут быть как звено 1, так и звено 3.

Целью работы является исследование кинематики представленного пятизвённого ЗРМ, входным

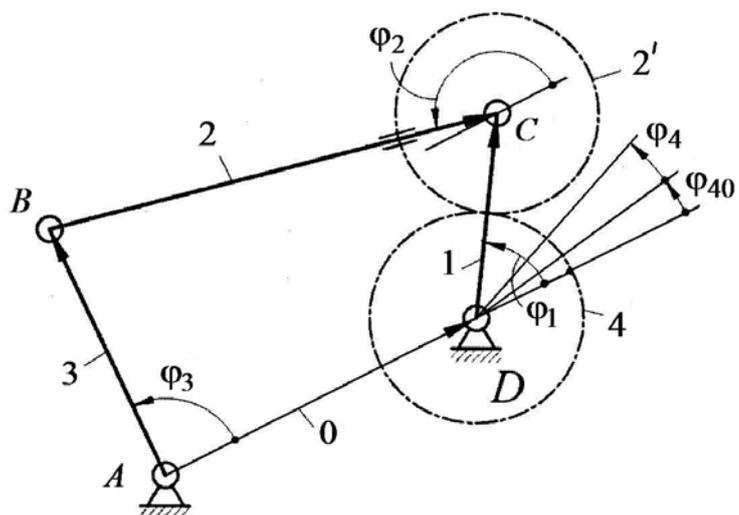


Рис. 1. Пятизвённый зубчато-рычажный механизм

звеном которого выступает зубчатое колесо 4, а выходным – рычаги 1, 3. Следовательно, закон движения звена 4 задан в виде $\varphi_4 = \varphi_4(t)$, где φ_4 – угол поворота звена 4 относительно стойки механизма; известен угол φ_{40} – начальный угол поворота данного звена, а также линейные размеры l_i ($i = 0,1,2,3$) рычажных звеньев.

Обозначим через φ_j ($j = 1,2,3$) углы поворота подвижных звеньев базового шарнирного четырехзвенника.

Для определения функции положения $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$ рассмотрим векторный контур $ABCD$ (рис. 1).

Запишем

$$\bar{l}_3 + \bar{l}_2 = \bar{l}_0 + \bar{l}_1 \text{ или } \bar{l}_0 + \bar{l}_1 - \bar{l}_2 = \bar{l}_3. \tag{1}$$

Для перехода к скалярной форме запишем уравнение (1) возводим в квадрат

$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_0l_1 \cos \varphi_1 - 2l_0l_2 \cos \varphi_2 - 2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = l_3^2, \tag{2}$$

или
$$l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + 2l_0l_1 \cos \varphi_1 - 2l_0l_2 \cos \varphi_2 - 2l_1l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0. \tag{3}$$

Для удобства дальнейших преобразований введем обозначения: $a_0 = l_0^2 + l_1^2 + l_2^2 - l_3^2$, $a_1 = 2l_0l_1$,

$a_2 = 2l_0l_2$, $a_3 = 2l_1l_2$, тогда выражение (3) примет вид

$$a_1 \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 - a_3 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_0 = 0. \tag{4}$$

Преобразуя выражение (4) получим следующий многочлен

$$a_1 \cos \varphi_1 - a_2 \cos \varphi_2 - a_3 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + a_0 = 0$$

и далее

$$\cos \varphi_1 (a_1 - a_3 \cos \varphi_2) - a_2 \cos \varphi_2 - a_3 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + a_0 = 0. \tag{5}$$

Для нахождения угла φ_2 мысленно отсоединим звено 3 от звена 2 и рассмотрим вновь образованный механизм (рис. 2). Данный механизм является дифференциальным, и он обладает двумя степенями свободы.

Используя, применительно к данному механизму, метод обращения движения, запишем [2]

$$i_{42}^{(1)} = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \pm \frac{z_2'}{z_4}, \tag{6}$$

где знак «+» соответствует внутреннему зацеплению колес $z_4 - z_2'$, знак «-» – внешнему зацеплению.

Преобразуем выражение (6) к более удобному виду

$$\omega_4 - \omega_1 = (\omega_2 - \omega_1) \cdot i_{42}^{(1)} \text{ или}$$

$$\omega_4 = \omega_2 \cdot i_{42}^{(1)} - \omega_1 \cdot i_{42}^{(1)} + \omega_1 = \omega_2 \cdot i_{42}^{(1)} + \omega_1 \cdot (1 - i_{42}^{(1)}). \tag{7}$$

Делим левую и правую часть уравнения (7) на ω_1 , имеем

$$\frac{\omega_4}{\omega_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} i_{42}^{(1)} + 1 - i_{42}^{(1)} \text{ или } \varphi_4' = \varphi_2' i_{42}^{(1)} + 1 - i_{42}^{(1)}, \tag{8}$$

где φ_4' , φ_2' – аналоги угловых скоростей звеньев 4 и 2 соответственно.

Запишем уравнение (8) в дифференциальной форме

$$\frac{d\varphi_4}{d\varphi_1} = i_{42}^{(1)} \frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} + 1 - i_{42}^{(1)} \text{ или } d\varphi_4 = i_{42}^{(1)} d\varphi_2 + d\varphi_1 - i_{42}^{(1)} d\varphi_1. \tag{9}$$

После интегрирования уравнения (9), ввиду того, что $i_{42}^{(1)} = const$, получим

$$\varphi_4 = i_{42}^{(1)} \varphi_2 + (1 - i_{42}^{(1)}) \varphi_1, \tag{10}$$

Из (10) для угла φ_2 получим выражение

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_4 - (1 - i_{42}^{(1)}) \varphi_1}{i_{42}^{(1)}} = i_{24}^{(1)} \varphi_4 - (i_{24}^{(1)} - 1) \varphi_1, \tag{11}$$

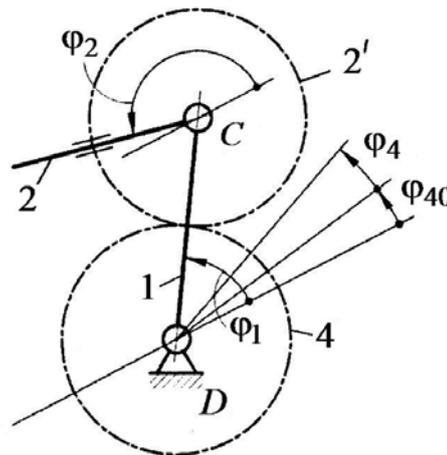


Рис. 2. Дифференциальный зубчато-рычажный механизм

Выражение (5) с учетом (11) приобретает вид

$$a_1 \cos \varphi_1 - A \cos \varphi_1 \cos(\lambda \varphi_1) - B \cos \varphi_1 \sin(\lambda \varphi_1) - C \cos(\lambda \varphi_1) - D \sin(\lambda \varphi_1) - B \sin \varphi_1 \times \\ \times \cos(\lambda \varphi_1) + A \sin \varphi_1 \sin(\lambda \varphi_1) + a_0 = 0,$$

где $\lambda = i_{24}^{(1)} - 1$, $A = a_3 \cos(i_{24}^{(1)} \varphi_4)$, $B = a_3 \sin(i_{24}^{(1)} \varphi_4)$, $C = a_2 \cos(i_{24}^{(1)} \varphi_4)$, $D = a_2 \sin(i_{24}^{(1)} \varphi_4)$.

После преобразования данного выражения получим

$$a_1 \cos \varphi_1 - A \cos(i_{24}^{(1)} \varphi_1) - B \sin(i_{24}^{(1)} \varphi_1) - C \cos((i_{24}^{(1)} - 1) \varphi_1) - D \sin((i_{24}^{(1)} - 1) \varphi_1) + a_0 = 0. \quad (12)$$

Очевидно, уравнение (12) решаемо для каждого значения передаточного отношения $i_{24}^{(1)}$, за исключением $i_{24}^{(1)} = 1$. Для дальнейшего решения задачи примем $i_{24}^{(1)} = -1$. Тогда на основании (12) находим

$$K \cos \varphi_1 + B \sin \varphi_1 - C \cos(2\varphi_1) + D \sin(2\varphi_1) + a_0 = 0, \quad (13)$$

где $K = a_1 - A$.

Применив известные в тригонометрии формулы к нашему случаю, выражение (13) представим в виде

$$K \cos \varphi_1 + B \sin \varphi_1 - 2C \cos^2 \varphi_1 + 2D \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + F = 0. \quad (14)$$

где $F = C + a_0$.

Далее, для решения уравнения (14) перейдем к одноименной тригонометрической функции, например к тангенсу. Используя формулы двойного аргумента получим

$$K \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)} + B \frac{2 \operatorname{tg}(\varphi_1/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)} - 2C \frac{(1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2))^2}{(1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2))^2} + 2D \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)} \cdot \frac{2 \operatorname{tg}(\varphi_1/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\varphi_1/2)} + F = 0.$$

Вводя обозначения $x = \operatorname{tg}(\varphi_1/2)$ и проводя преобразования, находим

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \quad (15)$$

где $a = -K - 2C + F$, $b = 2B - 4D$, $c = 4C + 2F$, $d = 2B + 4D$, $e = K - 2C + F$.

Таким образом, относительно неизвестного угла φ_1 имеем алгебраическое уравнение четвертого порядка. Естественно, из четырех полученных значений корней решения данного уравнения, действительными будут только два, соответствующие двум сборкам базового шарнирно-рычажного четырехзвенника.

Точное решение уравнения (15) произвести довольно сложно, поэтому рекомендуем осуществлять его численными методами [4].

Коэффициенты уравнения (15) a , b , c , d , e являются функциями от угла φ_4 поворота входного звена. Следовательно, из решения уравнения (15) в табличной форме находим функциональную зависимость $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$, что позволит методом численного дифференцирования определить аналоги угловой скорости и ускорения звена 1. После этого, определить кинематические параметры звена 3 не представляет труда.

Из рис. 1 следует

$$\varphi_3 = \operatorname{arctg} \frac{l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2}{l_0 + l_2 \cos \varphi_2 - l_1 \cos \varphi_1}. \quad (16)$$

Функция $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$ определена. Тогда из выражения (11) находим функцию $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_4)$, что позволяет найти первую и вторую производные функции (16).

Пример. Определить функцию положения $\varphi_1 = \varphi_1(\varphi_4)$ пятизвенного зубчато-рычажного механизма с параметрами: $l_0 = 0,1$ м, $l_1 = 0,048$ м, $l_2 = 0,09$ м, $l_3 = 0,08$ м, передаточное отношение $i_{12} = -1$.

Решение уравнение (15) осуществлено с использованием интернет-ресурса <http://erichware.info/sposob/matemat/urav234.htm>. График функции положения звена 1 и его аналога угловой скорости представлен на рис. 3, откуда следует, что выходное звено совершает полный оборот с переменной угловой скоростью. Звено 3 базового шарнирного четырехзвенника совершает качательное движение с углом размаха $(\varphi_3)_{\max} = 1,344$ радиан.

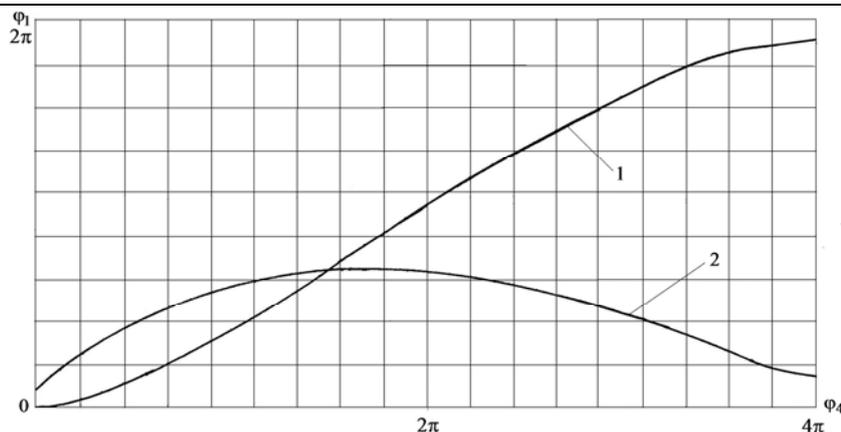


Рис. 3. График функции положения звена 1 (кривая 1) и его аналог угловой скорости (кривая 2)

Выводы:

1. Функция положения выходного кривошипа в зависимости от угла поворота входного зубчатого колеса нелинейная и ее невозможно выразить в явном виде.
2. Лишь в табличной форме можно получить информацию о его положениях после решения алгебраического уравнения четвертого порядка.
3. Для обеспечения полной проворачиваемости входного зубчатого колеса должно соблюдаться неравенство $l_1 < l_3 < l_0 < l_2$, т.е. базовый шарнирный четырехзвенник должен быть однокривошипным или двухкривошипным, причем кривошип и входное зубчатое колесо должны быть соосными.
4. Анализ кинематики рассматриваемого механизма позволяет установить, что ведомый кривошип вращается неравномерно и максимальный его угол поворота за полный оборот входного звена определяется выражением $(\varphi_1)_{\max} = 0,5(1 - i_{12})$.

Литература

1. Амбарцумянц Р.В. К синтезу пятизвенного зубчато-рычажного механизма / Амбарцумянц Р.В., Липин А.П. – М. : Изв.вузов. Машиностроение, 1989. – № 7. – С. 56–59.
2. Артоболевский И.И. и др. Синтез плоских механизмов / И.И. Артоболевский, Н.И. Левитский, С.А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
3. Демурчян С.Н. Синтез пятизвенного передаточного зубчато-рычажного механизма / Демурчян С.Н. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. техн. наук. – 1973. – № 1. – С. 20–24.
4. Калиткин Н.Н. Численные методы / Калиткин Н.Н. – М. : Наука, 1978. – 512 с.
5. Карелин В.С. Проектирование рычажных и зубчато-рычажных механизмов / Карелин В.С. – М. : Машиностроение, 1988. – 181 с.
6. Шашкин А.С. Зубчато-рычажные механизмы / Шашкин А.С. – М. : Машиностроение, 1971. – 192 с.

References

1. Ambarcumyanc R.V., Lipin A.P. K sintezu pyatizvennogo zubchato-ry'chazhnogo mexanizma // - M.: Izv.vuzov. Mashinostroenie, 1989. - № 7. - P. 56-59.
2. Artobolevskij I.I. i dr. Sintez ploskix mexanizmov // I.I. Artobolevskij, N.I.Levitskij, S.A.Cherkudunov. - M.: Fizmatgis, 1959. - 1084c.
3. Demurchyan S.N. Sintez pyatizvennogo peredatochnogo zubchato-ry'chazhnogo mexanizma // Izv.AN Arm.SSR. Ser.texn.nauk, 1973. - № 1. - P.20-24.
4. Kalitkin N.N. Chislenny'e metody'. - M.: Nauka, 1978. – 512 p.
5. Karelin V.S. Proektirovanie ry'chazhny'x i zubchato-ry'chazhny'x mexanizmov. - M.: Mashinostroenie, 1988. – 181p.
6. Shashkin A.S. Zubchato-ry'chazhny'e mexanizmy'. - M.: Mashinostroenie, 1971. – 192p.

Рецензия/Peer review: 21.06.2018 г. Напечатана/Printed: 21.9.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Гладушняк А.К.