

СХЕМА РОЗРАХУНКУ ДИСКОВОГО П'ЄЗОЕЛЕМЕНТА З ЧАСТКОВИМ ЕЛЕКТРОДУВАННЯМ ПОВЕРХОНЬ

В роботі дано загальне формулювання граничної задачі про розрахунок скалярного потенціалу вісесиметричного електричного поля в диску, матеріал якого має анізотропну діелектричну проникність, яка мінімум на порядок перевершує діелектричну проникність вакууму. Запропоновано схему рішення задачі для випадку, коли розташовані на торцевих поверхнях диска електроди мають форму співвісно розташованих круга та кільця, причому зовнішній радіус кільця дорівнює радіусу діелектричного диска, а радіус круга збігається з внутрішнім радіусом кільця. Запропонована схема використовує метод послідовних наближень, що дозволяє отримати аналітичні вирази для розрахунку коефіцієнтів в математичному описі потенціалу електричного поля.

Ключові слова: скалярний потенціал, анізотропія діелектричної проникності, часткове електродування поверхонь, діелектричний диск.

C.V. BAZILO

Cherkasy State Technological University

CALCULATION SCHEME OF DISK PIEZOELECTRIC ELEMENT WITH SURFACES PARTIALLY COVERED BY ELECTRODES

Thanks to its unique properties piezoceramics has applications in various fields of engineering and technology. Piezoelectric disks with partial electrodes of one or two surfaces are often used to create various functional piezoelectronic devices. Disk piezoelectric devices are widely used in the elements of information systems. In disk piezoelectric elements with surfaces partially covered by electrodes we can simultaneously excite oscillations of compression-tension and transverse bending vibrations. Manipulating the geometric parameters of electrodes and their location relative to each other, you can have a significant effect on the energy of oscillatory motion particular type of material particles of piezoelectric disk volume. The multiplicity and variety of the practical application of disks with surfaces partially covered by electrodes naturally stimulates theoretical studies, the purpose of which is to predict the characteristics and technical parameters of piezoelectronic devices that are created on their basis. The paper presents the general formulation of the boundary problem of the scalar potential calculation of the axially symmetric electric field in the disk, the material of which has an anisotropic dielectric constant that is at least an order higher than the dielectric constant of vacuum. It is proposed a scheme for solving the problem in the case when the electrodes placed on the end surfaces of the disk have the shape of coaxially located circle and ring, and ring outer radius equal to the radius of the dielectric disk, while the radius of the circle coincides with the inner radius of the ring. The proposed scheme uses the method of sequential approximations that allows to obtain analytical expressions for the coefficients in the mathematical description of the electric field potential.

Key words: scalar potential, anisotropy of dielectric constant, surfaces' partial covering by electrodes, dielectric disk.

Вступ

Актуальність застосування різних функціональних елементів п'єзоелектроніки в силових і інформаційних системах пояснюється, перш за все, їх високою надійністю [1]. Діскові п'єзоелементи з частковим електродуванням однієї або двох поверхонь досить часто використовуються для побудови різних функціональних пристроїв п'єзоелектроніки [2]. П'єзоелектричні диски з секторним електродуванням поверхні є практично основним елементом багатьох мікроелектромеханічних систем [3]. В дискових п'єзоелектричних елементах з частковим електродуванням поверхні можна одночасно збуджувати коливання стиснення-розтягування і коливання поперечного вигину. Маніпулюючи геометричними параметрами електродів і їх розташуванням один відносно одного, можна робити істотний вплив на енергетику того чи іншого типу коливальних рухів матеріальних частинок об'єму п'єзоелектричного диска. Якщо домінують коливання поперечного вигину, то дисковий п'єзоелектричний елемент може використовуватися як низькочастотний випромінювач акустичних хвиль. Якщо один з електродів піддати спеціальній обробці з метою додання йому якостей відбивача світлових променів, то дисковий п'єзоелектричний елемент з частковим електродуванням поверхні може використовуватися як фокусуєний дефлектор світлового потоку. При цьому особливо слід наголосити на тому, що даний п'єзоелектричний елемент володіє сумісністю з мікросистемними технологіями, тобто може бути виготовлений як мікроелектромеханічні структури (MEMS) [3].

Якщо часткове електродування виконано з порушенням осьової симетрії всієї конструкції, то відкриваються додаткові можливості по управлінню параметрами напружено-деформованого стану п'єзоелектричного диска і передавальними характеристиками електромеханічної системи в цілому.

Все сказане вище є досить вагомою мотивацією для дослідження параметрів і характеристик динамічних електропружних полів в об'ємі дискових п'єзоелектричних елементів з частковим електродуванням поверхонь.

В роботі [4] викладена загальна схема математичного моделювання процесів в п'єзоелектричних елементах з частковим електродуванням поверхонь. Слідуючи викладеним в цій роботі принципам розрахунку п'єзоелектричних елементів з частково електродованими поверхнями, розглянемо першу обчислювальну процедуру, тобто розрахунок просторового розподілу в об'ємі п'єзоелектричного елемента

змінного електричного поля. Вирішення цього завдання дозволяє виконати оцінку кількості енергії, яка споживається п'єзоелектричним елементом від зовнішнього джерела, тобто від генератора електричних сигналів. Ця процедура є першим етапом енергосилового методу [5, 6] аналізу фізичного стану п'єзоелектричних елементів в режимі вимушених коливань під дією зовнішнього джерела електричної енергії.

Отже, метою даної роботи є побудова схеми розрахунку дискового п'єзоелектричного елемента з частковим електродуванням поверхні.

Основна частина

Розрахунок змінного електричного поля в об'ємі дискового п'єзоелектричного елемента з частково електродуваннями поверхнями

Розглянемо диск (рис. 1) з поляризованої по товщині п'єзоелектричної кераміки типу ЦТС (PZT). Електрод на верхній ($z = \alpha$) поверхні п'єзокерамічного диска (позиція 1 на рис. 1) має форму кола радіуса R_0 з центром на вісі Oz циліндричної системи координат. На цей електрод подається гармонійно змінний в часі за законом $e^{i\omega t}$ ($i = \sqrt{-1}$; ω – кругова частота; t – час) електричний потенціал $U(t) = U_0 e^{i\omega t}$. Електрод на нижній ($z = 0$) поверхні диска (позиція 2 на рис. 1) виконаний у формі кільця з центром на вісі Oz . Кільцевий електрод заземлений, тобто його потенціал завжди дорівнює нулю.

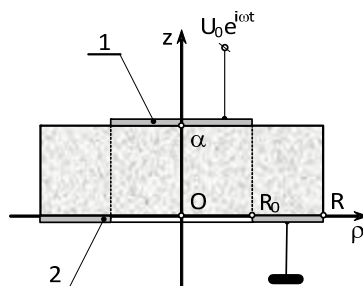


Рис. 1. П'єзоелектричний диск з частковим електродуванням поверхонь

Дослідимо характер розподілу змінного електричного поля в об'ємі п'єзокерамічного диска в припущенні, що зовнішній радіус R_0 верхнього електрода збігається з внутрішнім радіусом нижнього.

В роботі [4] показано, що змінне електричне поле в об'ємі п'єзоелектричного диска визначається за допомогою скалярного потенціалу $\Phi^*(\rho, \varphi, z) e^{i\omega t}$. При співвісному розташуванні верхнього і нижнього електродів амплітудне значення скалярного потенціалу залежить тільки від радіальної ρ і аксіальної z координати циліндричної системи координат. Говорячи іншими словами, показана на рис. 1 електродна структура створює в об'ємі диска з поляризованої по товщині п'єзокераміки вісесиметричне змінне електричне поле, скалярний потенціал якого визначається рівнянням Лапласа такого вигляду

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial \Phi^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right] + \xi^2 \frac{\partial^2 \Phi^*(\rho, z)}{\partial z^2} = 0, \tag{1}$$

де $\xi^2 = \chi_{33}^e / \chi_{11}^e$ – квадрат коефіцієнта анізотропії діелектричної проникності поляризованої кераміки; χ_{33}^e – компонент тензора діелектричної проникності в напрямку електричної поляризації; χ_{11}^e – компонент тензора діелектричної проникності в будь-якому напрямку на площині, яка перпендикулярна напрямку електричної поляризації матеріалу диска.

Для спрощення подальших обчислень розіб'ємо об'єм п'єзокерамічного диску на дві області. Першу область ($0 \leq \rho \leq R_0; 0 \leq z \leq \alpha$) будемо називати внутрішньої і електричний потенціал в її межах будемо позначати символом $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$. Кільцеву область ($R_0 \leq \rho \leq R; 0 \leq z \leq \alpha$) будемо називати зовнішньою областю або другою областю, а електричний потенціал в межах цієї області будемо позначати символом $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$.

На зовнішніх і внутрішніх поверхнях внутрішньої і зовнішньої областей потенціали $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$ і $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$ повинні відповідати наступним граничним умовам:

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, \alpha) = U_0 \forall \rho \in [0, R_0], \tag{2}$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(1)}^*(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \forall \rho \in [0, R_0], \tag{3}$$

$$\Phi_{(1)}^*(R_0, z) - \Phi_{(2)}^*(R_0, z) = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi_{(1)}^*(R_0, z)}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(R_0, z)}{\partial z} = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(1)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} - \left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R_0} = 0 \forall z \in [0, \alpha], \quad (6)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial z} \right|_{z=\alpha} = 0 \forall \rho \in [R_0, R], \quad (7)$$

$$\Phi_{(2)}^*(\rho, 0) = 0 \forall \rho \in [R_0, R], \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi_{(2)}^*(\rho, z)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0 \forall z \in [0, \alpha]. \quad (9)$$

Умови (3), (7) і (9) є наближеними [7] і виконуються тим точніше, чим більше діелектричні проникності χ_{33}^e і χ_{11}^e відрізняються від діелектричної проникності вакууму $\chi_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. Оскільки діелектричні проникності χ_{33}^e і χ_{11}^e більш ніж на три порядки перевершують діелектричну проникність навколишнього для п'єзокерамічного диску середовища, остільки ці граничні умови можна розглядати як практично точні. Умови (4) – (6) мають сенс умов зшивання рішень рівняння (1) на межі $\rho = R_0$ внутрішньої і зовнішньої областей.

Рішення рівняння (1) як по зовнішній, так і по внутрішній областях, будемо шукати за стандартною технологією розділення змінних [8], тобто будемо вважати, що

$$\Phi_{(k)}^*(\rho, z) = R^{(k)}(\rho)Z^{(k)}(z), \quad k = 1, 2, \quad (10)$$

де $R^{(k)}(\rho)$ і $Z^{(k)}(z)$ – функції, що залежать тільки від радіальної і аксіальної координати відповідно.

Підставляючи передбачуваний вид рішення (10) в рівняння (1), отримуємо можливість записати його в наступному вигляді

$$\frac{1}{R^{(k)}(\rho)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho^2} \right] = - \frac{\xi^2}{Z^{(k)}(z)} \frac{\partial^2 Z^{(k)}(z)}{\partial z^2}. \quad (11)$$

Рівність (11) може виконуватися при довільних значеннях змінних ρ і z тільки в одному випадку, коли його ліва і права частини не залежать від ρ і z відповідно, і обидві рівні одній і тій же константі, яка називається константою розділення [8]. Вибір константи розділення в значній мірі зумовлюється фізичним змістом розв'язуваної задачі. Позначимо, для зручності подальших записів константу розділення символом β^2 . При цьому з рівняння (11) слідує два звичайних диференціальних рівнянь такого вигляду:

$$\frac{1}{R^{(k)}(\rho)} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 R^{(k)}(\rho)}{\partial \rho^2} \right] = \beta^2, \quad (12)$$

$$- \frac{\xi^2}{Z^{(k)}(z)} \frac{\partial^2 Z^{(k)}(z)}{\partial z^2} = \beta^2. \quad (13)$$

Велика кількість граничних умов (див. співвідношення (2) – (9)) вимагає відповідного набору констант в загальних рішеннях $\Phi_{(k)}^*(\rho, z)$. Забезпечити відповідну кількість констант можна наступним чином.

Розглянемо внутрішню область ($k = 1$).

Якщо в рівняннях (12) і (13) визначити параметр β як дійсне число β_1 , то отримуємо такий вираз для скалярного потенціалу

$$\Phi_{(11)}^*(\rho, z) = I_0(\beta_1 \rho) [A_1 \cos(\lambda_1 z) + B_1 \sin(\lambda_1 z)], \quad (14)$$

де $I_0(\beta_1 \rho)$ – модифікована функція Бесселя нульового порядку; A_1 і B_1 – константи; $\lambda_1 = \beta_1 / \xi$; β_1 – дійсне число, яке підлягає визначенню.

Припустимо тепер, що параметр β є уявним числом $i\beta_2$, тобто $\beta^2 = -\beta_2^2$. Тоді з рівнянь (12) і (13) отримуємо наступний вираз для розрахунку скалярного потенціалу внутрішньої області дискового п'єзоелемента

$$\Phi_{(12)}^*(\rho, z) = J_0(\beta_2 \rho) [A_2 ch(\lambda_2 z) + B_2 sh(\lambda_2 z)], \quad (15)$$

де $J_0(\beta_2 \rho)$ – функція Бесселя нульового порядку; A_2 і B_2 – константи; $\lambda_2 = \beta_2 / \xi$; β_2 – число, яке

підлягає визначенню. Очевидно, що суперпозиція загальних рішень $\Phi_{(11)}^*(\rho, z)$ і $\Phi_{(12)}^*(\rho, z)$ також є загальним розв'язком рівняння (1), тобто

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, z) = \Phi_{(11)}^*(\rho, z) + \Phi_{(12)}^*(\rho, z). \tag{16}$$

З граничної умови (3) випливає, що

$$\lambda_1 I_0(\beta_1 \rho) B_1 + \lambda_2 J_0(\beta_2 \rho) B_2 = 0 \quad \forall \rho \in [0, R_0]. \tag{17}$$

Якщо покласти константи $B_1 = B_2 = 0$, то рівність (17) і, відповідно, гранична умова (3), будуть виконуватися автоматично.

Оскільки числа β_1 і β_2 можуть призначатися довільно розрахувачем, остільки їх визначимо так, щоб виконувалися наступні умови:

$$\cos(\lambda_1 \alpha) = 0, \tag{18}$$

$$J_0(\beta_2 R_0) = 0. \tag{19}$$

З умов (18) і (19) випливає, що

$$\beta_1 = \beta_n = \frac{\pi}{2\alpha} (1 + 2n) \xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{20}$$

$$\beta_2 = q_m / R_0, \quad m = 1, 2, 3, \dots, \tag{21}$$

де q_m – m -ий корінь рівняння $J_0(x) = 0$. Перші п'ять коренів цього рівняння мають такі числові значення: $q_1 = 2,404826$, $q_2 = 5,520078$, $q_3 = 8,653728$, $q_4 = 11,791534$ і $q_5 = 14,930918$. Легко помітити, що $q_m - q_{m-1} \approx \pi$, при цьому наближена рівність виконується тим точніше, чим більше m номер кореня.

Так як власні числа β_k і λ_k ($k = 1, 2$) утворюють нескінченні множини, то їм повинні відповідати нескінченні множини констант A_{1n} і A_{2m} . При цьому вираз для розрахунку скалярного потенціалу $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$ приймає наступний вигляд

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{1n} I_0(\beta_n \rho) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha} (1 + 2n)\right] + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} J_0\left(\frac{q_m \rho}{R_0}\right) ch(\lambda_m z), \tag{22}$$

де $\lambda_m = q_m / (\xi R_0)$.

При $z = \alpha$ повинно виконуватися гранична умова (3). Підставляючи $z = \alpha$ в розрахункову формулу (22), отримуємо

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} J_0\left(\frac{q_m \rho}{R_0}\right) ch(\lambda_m \alpha) = U_0. \tag{23}$$

Функції Бесселя $J_0(q_m \rho / R_0)$ на інтервалі $0 \leq \rho \leq R_0$ утворюють систему ортогональних функцій, тобто існує інтеграл [9] наступного вигляду

$$\int_0^{R_0} \rho J_0(q_m \rho / R_0) J_0(q_p \rho / R_0) d\rho = \begin{cases} 0 \quad \forall m \neq p, \\ R_0^2 J_1^2(q_m) / 2 \quad \text{при } m = p, \end{cases} \tag{24}$$

де $J_1(q_m)$ – функція Бесселя першого порядку. Використовуючи властивість ортогональності (24), з рівняння (23) отримуємо наступні значення коефіцієнтів A_{2m} :

$$A_{2m} = U_0 \tilde{A}_{2m}(q_m), \tag{25}$$

де безрозмірний множник $\tilde{A}_{2m}(q_m)$ визначається наступним виразом

$$\tilde{A}_{2m}(q_m) = \frac{2}{q_m J_1(q_m) ch\left(\frac{q_m \alpha}{\xi R_0}\right)}. \tag{26}$$

У таблиці 1 наведені результати розрахунків безрозмірних вагових множників $\tilde{A}_{2m}(q_m)$ для перших десяти коренів рівняння $J_0(x) = 0$. При виконанні обчислень коефіцієнт анізотропії $\xi = \sqrt{\chi_{33}^e / \chi_{11}^e}$ діелектричної проникності поляризованої п'єзокераміки дорівнює одиниці, тобто прийнято, що $\chi_{33}^e / \chi_{11}^e = 1$. Насправді для п'єзокераміки типу ЦТС 19 коефіцієнт $\xi = 0,97 \div 0,99$. У третій колонці табл. 1 наведені значення вагового коефіцієнта $\tilde{A}_{2m}^0 = 1 / [q_m J_1(q_m)]$, що не залежать від геометричного параметра α / R_0 . Безрозмірний ваговий множник $\tilde{A}_{2m}(q_m)$ розраховувався при різних значеннях параметра α / R_0 , що зазначено в заголовках відповідних колонок табл. 1.

Отже, скалярний потенціал $\Phi_{(1)}^*(\rho, z)$ у внутрішній області $0 \leq \rho \leq R_0$ дискового п'єзоелектричного елемента визначається наступним виразом

$$\Phi_{(1)}^*(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0 \left[\frac{\pi \rho}{2\alpha} (1+2n) \xi \right] \cos \left[\frac{\pi z}{2\alpha} (1+2n) \right] + U_0 \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{A}_{2m}(q_m) J_0 \left(\frac{q_m \rho}{R_0} \right) ch \left(\frac{q_m z}{\xi R_0} \right). \quad (27)$$

Таблиця 1

Числові значення безрозмірних вагових множників $\tilde{A}_{2m}(q_m)$ для перших десяти коренів q_m рівняння $J_0(x) = 0$

m	q _m	A _{2m} ⁰	A _{2m} (q _m)			
			α/R ₀ =	α/R ₀ =	α/R ₀ =	α/R ₀ =
1	2,404826(00)	1,601975(00)	1,556743(00)	1,433008(00)	1,068376(00)	4,581400(-01)
2	5,520078(00)	-1,064799(00)	-9,208959(-01)	-6,361205(-01)	-2,312844(-01)	-2,572544(-02)
3	8,653728(00)	8,513992(-01)	6,088411(-01)	2,924759(-01)	5,338622(-02)	1,677065(-03)
4	1,179153(01)	-7,296452(-01)	-4,100099(-01)	-1,367963(-01)	-1,305292(-02)	-1,167732(-04)
5	1,493092(01)	6,485236(-01)	2,774129(-01)	6,530816(-02)	3,305117(-03)	8,422161(-06)
6	1,807106(01)	-5,895428(-01)	-1,884451(-01)	-3,173932(-02)	-8,556177(-04)	-6,208900(-07)
7	2,121164(01)	5,441802(-01)	1,286367(-01)	1,564097(-02)	2,248713(-04)	4,646171(-08)
8	2,435247(01)	-5,078936(-01)	-8,828160(-02)	-7,790196(-03)	-5,975099(-05)	-3,514693(-09)
9	2,749348(01)	4,780125(-01)	6,090726(-02)	3,912089(-03)	1,600895(-05)	2,680750(-10)
10	3,063461(01)	-4,528506(-01)	-4,222733(-02)	-1,977401(-03)	-4,317264(-06)	-2,057938(-11)

Примітка. Запис 1,856312(-05) еквівалентна запису $1,856312 \times 10^{-5}$.

Загальні рішення рівнянь (12), (13) для зовнішньої області $R_0 \leq \rho \leq R$ дискового п'єзоелектричного елемента записуються в наступному вигляді:

а) константа розділення – дійсне число β_1 :

$$R_{(1)}^{(2)}(\rho) = C_1 I_0(\beta_1 \rho) + D_1 K_0(\beta_1 \rho), \quad (28)$$

$$Z_{(1)}^{(2)}(z) = E_1 \cos(\lambda_1 z) + F_1 \sin(\lambda_1 z), \quad (29)$$

б) константа розділення – уявне число $i\beta_2$:

$$R_{(2)}^{(2)}(\rho) = C_2 J_0(\beta_2 \rho) + D_2 N_0(\beta_2 \rho), \quad (30)$$

$$Z_{(2)}^{(2)}(z) = E_2 ch(\lambda_2 z) + F_2 sh(\lambda_2 z), \quad (31)$$

де C_k, D_k, E_k і F_k ($k=1,2$) – константи; $K_0(\beta_1 \rho)$ – функція Макдональда нульового порядку; $N_0(\beta_2 \rho)$ – функція Неймана нульового порядку.

Для того, щоб скалярний потенціал $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$ задовольняв умові (9) необхідно і достатньо, щоб функції $R_{(k)}^{(2)}(\rho)$ ($k=1,2$) задовольняли умові такого вигляду

$$\left. \frac{\partial R_{(k)}^{(2)}(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} = 0. \quad (32)$$

Умова (32) еквівалентна наступним двом рівностям:

$$\begin{aligned} \beta_1 [C_1 I_1(\beta_1 R) - D_1 K_1(\beta_1 R)] &= 0, \\ -\beta_2 [C_2 J_1(\beta_2 R) + D_2 N_1(\beta_2 R)] &= 0, \end{aligned}$$

де $K_1(\beta_1 R)$ і $N_1(\beta_2 R)$ – функції Макдональда і Неймана першого порядку. З останніх рівностей випливає, що

$$D_1 = C_1 \frac{I_1(\beta_1 R)}{K_1(\beta_1 R)}, \quad D_2 = -C_2 \frac{J_1(\beta_2 R)}{N_1(\beta_2 R)}. \quad (33)$$

При цьому скалярний потенціал $\Phi_{(2)}^*(\rho, z)$ буде визначатися наступним чином

$$\Phi_{(2)}^*(\rho, z) = \Phi_{(21)}^*(\rho, z) + \Phi_{(22)}^*(\rho, z), \quad (34)$$

де

$$\Phi_{(21)}^*(\rho, z) = \left[I_0(\beta_1 \rho) + \frac{I_1(\beta_1 R)}{K_1(\beta_1 R)} K_0(\beta_1 \rho) \right] \times [E \cos(\lambda_1 z) + F \sin(\lambda_1 z)], \quad (35)$$

$$\Phi_{(22)}^*(\rho, z) = \left[J_0(\beta_2 \rho) - \frac{J_1(\beta_2 R)}{N_1(\beta_2 R)} N_0(\beta_2 \rho) \right] \times [M \operatorname{ch}(\lambda_2 z) + N \operatorname{sh}(\lambda_2 z)]; \quad (36)$$

$$E = E_1 C_1; F = F_1 C_1; M = E_2 C_2 \text{ і } N = F_2 C_2.$$

З метою спрощення подальших викладок, визначимо константи розділення β_1 і β_2 наступним чином:

$$\beta_1 = \beta_\ell = \frac{\pi}{2\alpha}(1 + 2\ell)\xi, \quad \ell = 0, 1, 2, \dots, \quad (37)$$

$$\beta_2 = \beta_p = \zeta_p / R_0, \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (38)$$

де ζ_p – корінь номера p трансцендентного рівняння

$$J_0(x) N_1(kx) - J_1(kx) N_0(x) = 0, \quad (39)$$

де $k = R/R_0$ – геометричний параметр дискового п'єзоелектричного елемента.

У таблиці 2 наведені числові значення перших десяти коренів трансцендентного рівняння (39), які розраховувалися при значеннях співвідношення $R_0/R = 0,8; 0,6; 0,4$ і $0,2$, чому відповідають значення $k = 1,25; 1,67; 2,5$ і 5 . Легко помітити, що числові значення коренів необмежено зростають при $k \rightarrow 1$.

Таблиця 2

Перші десять коренів трансцендентного рівняння $J_0(x) N_1(kx) - J_1(kx) N_0(x) = 0$

p	ζ_p			
	k = 1,25	k = 1,6(6)	k = 2,50	k = 5,00
1	1,875902(01)	2,120370(00)	8,660582(-01)	2,823584(-01)
2	3,136174(01)	6,993940(00)	3,083539(00)	1,139215(00)
3	4,394362(01)	1,173633(01)	5,201067(00)	1,939183(00)
4	5,651859(01)	1,646150(01)	7,305411(00)	2,731207(00)
5	6,909044(01)	2,118098(01)	9,405344(00)	3,520405(00)
6	8,166059(01)	2,589788(01)	1,150327(01)	4,308266(00)
7	9,422974(01)	3,061338(01)	1,360011(01)	5,095389(00)
8	1,067982(02)	3,532806(01)	1,569630(01)	5,882061(00)
9	1,193663(02)	4,004220(01)	1,779206(01)	6,668439(00)
10	1,319340(02)	4,475597(01)	1,988754(01)	7,454613(00)

Множинам констант розділення відповідають еквівалентні за потужністю множини констант E_ℓ , F_ℓ , M_p і N_p . При цьому вирази (35) і (36) записуються в наступному вигляді:

$$\Phi_{(21)}^*(\rho, z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} W_0(\beta_\ell \rho) \left\{ E_\ell \cos \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1 + 2\ell) \right] + F_\ell \sin \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1 + 2\ell) \right] \right\}, \quad (40)$$

$$\Phi_{(22)}^*(\rho, z) = \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right) \left[M_p \operatorname{ch} \left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0} \right) + N_p \operatorname{sh} \left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0} \right) \right], \quad (41)$$

де $W_0(\beta_\ell \rho) = I_0(\beta_\ell \rho) + \frac{I_1(\beta_\ell R)}{K_1(\beta_\ell R)} K_0(\beta_\ell \rho)$; $\Omega_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right) = J_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right) - \frac{J_1(k \zeta_p)}{N_1(k \zeta_p)} N_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right)$; $k = \frac{R}{R_0}$.

Вирази (27), (40) і (41) містять п'ять наборів констант (A_n, E_ℓ, F_ℓ, M_p і N_p), і повинні відповідати умовам зшивання рішень (4), (5) і (6) на межі $\rho = R_0$ розділу внутрішньої і зовнішньої областей і умовам (7) і (8) на верхній і нижній межі зовнішньої області дискового п'єзоелектричного елемента. Конструкція вирізів (27), (40) і (41) забезпечує автоматичне виконання граничних умов (2), (3) і (9).

Випишемо умови (4) – (8) в явному вигляді.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0(\beta_n R_0) \cos \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1 + 2n) \right] = \sum_{\ell=0}^{\infty} W_0(\beta_\ell R_0) \left\{ E_\ell \cos \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1 + 2\ell) \right] + F_\ell \sin \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1 + 2\ell) \right] \right\}, \quad (42)$$

$$-\frac{\pi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) A_n I_0(\beta_n R_0) \sin \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n) \right] = \frac{\pi}{2\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1+2\ell) W_0(\beta_\ell R_0) \left\{ -E_\ell \sin \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell) \right] + F_\ell \cos \left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell) \right] \right\}, \quad (43)$$

$$\frac{\pi\xi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) A_n I_1(\beta_n R_0) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] - \frac{2U_0}{R_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ch[q_m z/(\xi R_0)]}{ch[q_m \alpha/(\xi R_0)]} =$$

$$= \frac{\pi\xi}{2\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1+2\ell) W_1(\beta_\ell R_0) \left\{ E_\ell \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell)\right] + F_\ell \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell)\right] \right\} - \frac{1}{R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_1(\zeta_p) \left[M_p ch\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) + N_p sh\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) \right], \quad (44)$$

$$\frac{\pi}{2\alpha} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1+2\ell) W_0(\beta_\ell \rho) E_\ell + \frac{1}{\xi R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) \left[M_p sh\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) + N_p ch\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) \right] = 0, \quad (45)$$

$$\sum_{\ell=0}^{\infty} W_0(\beta_\ell \rho) E_\ell + \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) M_p = 0, \quad (46)$$

де $W_0(\beta_\ell R_0) = I_0(\beta_\ell R_0) + \frac{I_1(\beta_\ell R)}{K_1(\beta_\ell R)} K_0(\beta_\ell R_0)$; $W_1(\beta_\ell R_0) = I_1(\beta_\ell R_0) - \frac{I_1(\beta_\ell R)}{K_1(\beta_\ell R)} K_1(\beta_\ell R_0)$;

$$\Omega_1(\zeta_p) = J_1(\zeta_p) - \frac{J_1(k\zeta_p)}{N_1(k\zeta_p)} N_1(\zeta_p).$$

У неоднорідній системі з п'яти алгебраїчних рівнянь (42) – (46) міститься п'ять наборів невідомих констант, тобто величин A_n , E_ℓ , F_ℓ , M_p і N_p . Це, в принципі, забезпечує єдність розв'язку системи алгебраїчних рівнянь (42) – (46).

Так як тригонометричні функції $\cos[\pi z(1+2n)/(2\alpha)]$ і $\sin[\pi z(1+2n)/(2\alpha)]$ на інтервалі $0 \leq z \leq \alpha$ утворюють систему ортогональних функцій, тобто існують інтеграли

$$\int_0^\alpha \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2k)\right] \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = \begin{cases} 0 & \forall k \neq n, \\ \alpha/2 & \text{при } k = n, \end{cases}$$

$$\int_0^\alpha \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2k)\right] \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = \begin{cases} 0 & \forall k \neq n, \\ \alpha/2 & \text{при } k = n, \end{cases}$$

то рівняння (42) і (43) без особливих зусиль приводяться до наступного вигляду

$$\frac{\alpha}{2} A_n I_0\left[\frac{\pi R_0}{2\alpha}(1+2n)\xi\right] = \frac{\alpha}{2} W_0(\beta_n R_0) E_n + \frac{\alpha}{2\pi} \sum_{\ell=0}^{\infty} W_0(\beta_\ell R_0) I_{\ell n}^{sc} F_\ell, \quad (47)$$

$$-\frac{\pi}{4}(1+2n) A_n I_0\left[\frac{\pi R_0}{2\alpha}(1+2n)\xi\right] = -\frac{\pi}{4}(1+2n) W_0(\beta_n R_0) E_n + \frac{1}{4} \sum_{\ell=0}^{\infty} (1+2\ell) W_0(\beta_\ell R_0) I_{\ell n}^{cs} F_\ell, \quad (48)$$

де
$$I_{\ell n}^{sc} = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell)\right] \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = I_{\ell n}^{cs} = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2\ell)\right] \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz =$$

$$= \frac{(-1)^{\ell-n}(1+2\ell) - (1+2n)}{(1+\ell+n)(\ell-n)} \forall n \neq \ell;$$

$$I_{\ell n}^{sc} = I_{\ell n}^{cs} = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^\alpha \sin\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = \frac{2}{1+2n}.$$

З рівностей (47) і (48) випливає, що

$$A_n = \frac{W_0(\beta_n R_0)}{I_0(\beta_n R_0)} E_n, \quad F_\ell = 0. \quad (49)$$

З огляду на отримані результати, рівняння (44) – (46) доцільно записати в наступному вигляді

$$\frac{\pi\xi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\beta_n R_0) E_n \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] + \frac{1}{R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_1(\zeta_p) \left[M_p ch\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) + N_p sh\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) \right] = \frac{2U_0}{R_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ch[q_m z/(\xi R_0)]}{ch[q_m \alpha/(\xi R_0)]}, \quad (50)$$

$$\frac{\pi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) W_0(\beta_n \rho) E_n + \frac{1}{\xi R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) \left[M_p sh\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) + N_p ch\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) \right] = 0, \quad (51)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_0(\beta_n \rho) E_n + \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) M_p = 0, \quad (52)$$

де $Q_n(\beta_n R_0) = (1+2n) \left[\frac{I_1(\beta_n R_0)}{I_0(\beta_n R_0)} W_0(\beta_n R_0) - W_1(\beta_n R_0) \right] = \frac{2\alpha}{\pi R_0 \xi} \frac{I_1(\beta_n R)}{I_0(\beta_n R_0) K_1(\beta_n R)}$.

Система рівнянь (50) – (52) точного рішення не має. Разом з тим можна побудувати обчислювальну процедуру, яка дозволяє отримати досить хороші наближення до точного розв'язання зазначеної системи

алгебраїчних рівнянь. В обчислювальній математиці ця процедура називається методом послідовних наближень [10]. При цьому шукані константи E_n , M_p і N_p представляються наступними рядами:

$$E_n = E_n^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta E_n^{(\nu)}, M_p = M_p^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta M_p^{(\nu)}, N_p = N_p^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta N_p^{(\nu)}, \quad (53)$$

де E_n , M_p і N_p – точні рішення системи рівнянь (50) – (52); $E_n^{(0)}$, $M_p^{(0)}$ і $N_p^{(0)}$ нульові, тобто найгрубіші, наближення до точних рішень системи рівнянь (50) – (52); $\Delta E_n^{(\nu)}$, $\Delta M_p^{(\nu)}$ і $\Delta N_p^{(\nu)}$ – поправки порядку ν до наближення $\nu - 1$ порядку до точних рішень системи рівнянь (50)–(52).

Найбільш грубі, тобто нульові наближення, до точних значень констант E_n , M_p і N_p , будемо шукати з видозміненої системи рівнянь (50) – (52), яка записується наступним чином:

$$\frac{\pi \xi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(\beta_n R_0) E_n^{(0)} \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] = \frac{2U_0}{R_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{ch[q_m z / (\xi R_0)]}{ch[q_m \alpha / (\xi R_0)]}, \quad (54)$$

$$\frac{\pi}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) W_0(\beta_n \rho) E_n^{(0)} + \frac{1}{\xi R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) \left[M_p^{(0)} sh\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) + N_p^{(0)} ch\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) \right] = 0, \quad (55)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} W_0(\beta_n \rho) E_n^{(0)} + \sum_{p=1}^{\infty} \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) M_p^{(0)} = 0. \quad (56)$$

Використовуючи властивість ортогональності тригонометричних функцій $\cos[\pi z(1+2n)/(2\alpha)]$ на інтервалі $0 \leq z \leq \alpha$, рівняння (54) можна без особливих зусиль привести до наступного вигляду

$$\frac{\pi \xi}{4} Q_n(\beta_n R_0) E_n^{(0)} = \frac{2U_0}{R_0} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_{mn}}{ch[q_m \alpha / (\xi R_0)]},$$

де $J_{mn} = \int_0^{\alpha} ch\left(\frac{q_m z}{\xi R_0}\right) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = -\xi R_0 \pi \left(\frac{\xi R_0}{2\alpha}\right) \frac{(1+2n)}{\left\{q_m^2 + \left[\frac{\pi(1+2n)\xi R_0}{2\alpha}\right]^2\right\}} ch\left(\frac{q_m \alpha}{\xi R_0}\right).$

З останньої рівності випливає, що

$$E_n^{(0)} = -\frac{4R_0 \xi}{\alpha} U_0 e_n(\beta_n R_0), \quad (57)$$

де $e_n(\beta_n R_0) = \frac{1}{Q_n(\beta_n R_0)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1+2n)}{\left[q_m^2 + \left(\frac{\pi \xi R_0}{2\alpha}\right)^2 (1+2n)^2\right]}.$

Функція $\Omega_0(\zeta_p \rho / R_0)$, що входить до складу рівнянь (55) і (56), на інтервалі $R_0 \leq \rho \leq R$ утворює систему ортогональних функцій, тобто існує інтеграл такого вигляду

$$B_{pq} = \int_{R_0}^R \rho \Omega_0\left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0}\right) \Omega_0\left(\frac{\zeta_q \rho}{R_0}\right) d\rho = \begin{cases} 0 \quad \forall p \neq q, \\ B_0 \quad \text{при } p=q. \end{cases} \quad (58)$$

Прямими обчисленнями можна показати, що

$$B_0 = \frac{2R_0^2}{\pi^2} \Xi_p(k, \zeta_p), \quad (59)$$

де $\Xi_p(k, \zeta_p) = \frac{1}{\zeta_p^2} + \frac{\pi^2}{2} \frac{J_1(k \zeta_p)}{N_1(k \zeta_p)} \times \{J_0(\zeta_p) N_0(\zeta_p) + J_1(\zeta_p) N_1(\zeta_p) - k^2 [J_0(k \zeta_p) N_0(k \zeta_p) + J_1(k \zeta_p) N_1(k \zeta_p)]\};$

$k = R/R_0$ – геометричний параметр п'єзоелектричного диску з частковим електродуванням поверхні.

Використовуючи ортогональність функцій $\Omega_0(\zeta_p \rho / R_0)$, тобто властивості інтеграла (58), рівняння (55) і (56) приводяться до наступного вигляду:

$$-U_0 \frac{\xi R_0 \pi}{\alpha^2} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \frac{Q_{np}(\beta_n, \zeta_p)}{\left[\zeta_p^2 + (\beta_n R_0)^2\right]} e_n(\beta_n R_0) + \frac{\zeta_p}{\xi R_0 \pi^2} \Xi_p(k, \zeta_p) \left[M_p^{(0)} sh\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) + N_p^{(0)} ch\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) \right] = 0, \quad (60)$$

$$-U_0 \frac{2\xi R_0 \pi^2}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{np}(\beta_n, \zeta_p)}{\left[\zeta_p^2 + (\beta_n R_0)^2\right]} e_n(\beta_n R_0) + \Xi_p(k, \zeta_p) M_p^{(0)} = 0, \quad (61)$$

$$\text{де } Q_{np}(\beta_n, \zeta_p) = -\zeta_p N_1(\zeta_p) \left\{ \left[I_0(\beta_n R_0) + \frac{I_1(\beta_n R)}{K_1(\beta_n R)} K_0(\beta_n R_0) \right] \frac{J_1(\zeta_p)}{N_1(\zeta_p)} - \left[I_0(\beta_n R_0) + \frac{I_1(\beta_n R)}{K_1(\beta_n R)} K_0(\beta_n R_0) \right] \frac{J_1(k\zeta_p)}{N_1(k\zeta_p)} \right\}.$$

З рівняння (61) випливає, що

$$M_p^{(0)} = U_0 \frac{2\xi R_0 \pi^2}{\alpha} m_p^{(0)}(k, \zeta_p), \quad (62)$$

$$\text{де } m_p^{(0)}(k, \zeta_p) = \frac{1}{\Xi_p(k, \zeta_p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{np}(\beta_n, \zeta_p)}{[\zeta_p^2 + (\beta_n R_0)^2]} e_n(\beta_n R_0).$$

Підставляючи визначене формулою (62) нульове наближення до точного значення константи M_p в рівняння (60), знаходимо величину $N_p^{(0)}$:

$$N_p^{(0)} = U_0 \frac{R_0}{\alpha} n_p^{(0)}(k, \zeta_p), \quad (63)$$

$$\text{де } n_p^{(0)}(k, \zeta_p) = \frac{\xi^2 R_0 \pi^3}{\zeta_p \alpha \operatorname{ch}[\zeta_p \alpha / (\xi R_0)] \Xi_p(k, \zeta_p)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Q_{np}(\beta_n, \zeta_p)}{[\zeta_p^2 + (\beta_n R_0)^2]} e_n(\beta_n R_0) - 2\xi \pi^2 m_p^{(0)}(k, \zeta_p) \operatorname{th}\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right).$$

Для визначення поправки $\Delta E_n^{(1)}$ підставимо в рівняння (50) наближені значення коефіцієнтів $E_n \approx E_n^{(0)} + \Delta E_n^{(1)}$, $M_p \approx M_p^{(0)}$ і $N_p \approx N_p^{(0)}$. Після цього, беручи до уваги рівняння (54), отримуємо наступний результат

$$\frac{\xi \pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta E_n^{(1)} Q_n(\beta_n R_0) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] + U_0 \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_1(\zeta_p) \left[2\xi \pi^2 m_p^{(0)}(k, \zeta_p) \operatorname{ch}\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) + n_p^{(0)}(k, \zeta_p) \operatorname{sh}\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) \right] = 0. \quad (64)$$

Використовуючи ортогональність функцій $\cos[\pi z(1+2n)/(2\alpha)]$ на інтервалі $0 \leq z \leq \alpha$, можна привести рівняння (64) до наступного вигляду

$$\frac{\xi \pi}{4} \Delta E_n^{(1)} Q_n(\beta_n R_0) = -2U_0 \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_1(\zeta_p) \left[-2\xi \pi^2 m_p^{(0)}(k, \zeta_p) I_1^*(p, n) + n_p^{(0)}(k, \zeta_p) I_2^*(p, n) \right], \quad (65)$$

$$\text{де } I_1^*(p, n) = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha \operatorname{ch}\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = \frac{\pi(1+2n)}{\left(\frac{2\xi \alpha}{\xi R_0}\right)^2 + [\pi(1+2n)]^2} \operatorname{ch}\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right);$$

$$I_2^*(p, n) = \frac{1}{2\alpha} \int_0^\alpha \operatorname{sh}\left(\frac{\zeta_p z}{\xi R_0}\right) \cos\left[\frac{\pi z}{2\alpha}(1+2n)\right] dz = \frac{1}{\left(\frac{2\xi \alpha}{\xi R_0}\right)^2 + [\pi(1+2n)]^2} \left[\frac{2\xi \alpha}{\xi R_0} - \pi(1+2n) \operatorname{sh}\left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0}\right) \right].$$

З рівності (65) випливає вираз для розрахунку поправок $\Delta E_n^{(1)}$:

$$\Delta E_n^{(1)} = -U_0 \Delta e_n^{(1)}(k, \beta_n), \quad (66)$$

де

$$\Delta e_n^{(1)}(k, \beta_n) = \frac{8}{\xi \pi Q_n(\beta_n R_0)} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_1(\zeta_p) \left[-2\xi \pi^2 m_p^{(0)}(k, \zeta_p) I_1^*(p, n) + n_p^{(0)}(k, \zeta_p) I_2^*(p, n) \right]. \quad (67)$$

При організації обчислень функцій $\Delta e_n^{(1)}(k, \beta_n)$ необхідно враховувати аналітичні властивості числових послідовностей $\Omega_1(\zeta_p)$. У таблиці 3 наведені числові значення $\Omega_1(\zeta_p)$ для перших десяти коренів ζ_p рівняння (39), які були визначені при значеннях параметра $k = R/R_0 = 1,25; 1,67; 2,50$ і $5,00$.

З наведених у таблиці даних випливає, що числа $\Omega_1(\zeta_p)$ при різних значеннях параметра k утворюють різні послідовності, які сходяться до різних меж. При $R_0/R = 0,8$ ($k = 1,25$) числа $\Omega_1(\zeta_p)$ утворюють лише одну числову послідовність, і сумування у формулі (67) можна припиняти на довільному номері p , значення якого визначається прийнятою похибкою обчислень. При $R_0/R = 0,6$ ($k = 1,6(6)$) можна углядіти чотири послідовності. При цьому необхідно сумувати парне число послідовно розташованих четвірок чисел $\Omega_1(\zeta_p)$. При $R_0/R = 0,4$ ($k = 2,50$) проглядаються три числові послідовності, і необхідно підсумувати парне число трійок чисел $\Omega_1(\zeta_p)$. При значенні $R_0/R = 0,2$ ($k = 5,00$) знову з'являються чотири послідовності, і знову необхідно сумувати парне число четвірок чисел $\Omega_1(\zeta_p)$. З усього сказаного

впливає єдиний висновок – перед початком обчислень для кожного конкретного значення параметра $k = R/R_0$ необхідно виконати дослідження числових послідовностей $\Omega_1(\zeta_p)$. Це дозволить поліпшити точність подальших обчислень і підвищить достовірність результатів обрахунку.

Таблиця 3

Числові значення функції $\Omega_1(\zeta_p) = J_1(\zeta_p) - J_1(k\zeta_p)N_1(\zeta_p)/N_1(k\zeta_p)$ для перших десяти коренів трансцендентного рівняння $J_0(x)N_1(kx) - J_1(kx)N_0(x) = 0$

p	ζ_p			
	k = 1,25	k = 1,6(6)	k = 2,50	k = 5,00
1	-2,385497(-01)	5,782499(-01)	-2,990785(01)	-2,656170(00)
2	-1,907371(-01)	-3,276138(00)	5,918629(-01)	2,957784(00)
3	-1,635730(-01)	-2,333630(-01)	-3,694197(-01)	6,529087(-01)
4	-1,454753(-01)	4,988860(00)	1,355009(00)	5,143017(-01)
5	-1,323057(-01)	1,734729(-01)	3,567331(-01)	1,001103(00)
6	-1,221691(-01)	-6,251137(00)	-2,455062(-01)	-1,115489(00)
7	-1,140549(-01)	-1,442484(-01)	9,135880(-01)	-3,891323(-01)
8	-1,073692(-01)	7,298745(00)	1,794554(-01)	-3,525693(-01)
9	-1,017365(-01)	1,261117(-01)	-1,968125(-01)	-7,610190(-01)
10	-9,690658(-02)	-8,213966(00)	7,338983(-01)	8,102446(-01)

Для визначення поправок $\Delta M_p^{(1)}$ і $\Delta N_p^{(1)}$ підставимо в рівняння (51) і (52) наближені значення констант $E_n \approx E_n^{(0)} + \Delta E_n^{(1)}$, $M_p \approx M_p^{(0)} + \Delta M_p^{(1)}$ і $N_p \approx N_p^{(0)} + \Delta N_p^{(1)}$. Беручи до уваги раніше використовувані співвідношення (55) і (56), отримуємо такі результати:

$$-\frac{\pi U_0}{2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} (1+2n) \Delta e_n^{(1)}(k, \beta_n) W_0(\beta_n \rho) + \frac{1}{\xi R_0} \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right) \left[\Delta M_p^{(1)} sh \left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0} \right) + \Delta N_p^{(1)} ch \left(\frac{\zeta_p \alpha}{\xi R_0} \right) \right] = 0, \quad (68)$$

$$-U_0 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta e_n^{(1)}(k, \beta_n) W_0(\beta_n \rho) + \sum_{p=1}^{\infty} \zeta_p \Omega_0 \left(\frac{\zeta_p \rho}{R_0} \right) \Delta M_p^{(1)} = 0, \quad (69)$$

Очевидно, що поправки $\Delta M_p^{(1)}$ і $\Delta N_p^{(1)}$ визначаються з системи рівнянь (68), (69) через заданий потенціал U_0 єдиним чином. Після визначення поправок $\Delta M_p^{(1)}$ і $\Delta N_p^{(1)}$ з рівняння (50) визначається поправка $\Delta E_n^{(2)}$. Для цього в рівняння (50) підставляються наступні наближені значення коефіцієнтів $E_n \approx E_n^{(0)} + \Delta E_n^{(1)} + \Delta E_n^{(2)}$, $M_p \approx M_p^{(0)} + \Delta M_p^{(1)}$ і $N_p \approx N_p^{(0)} + \Delta N_p^{(1)}$. Потім з рівнянь (51) і (52) визначаються поправки $\Delta M_p^{(2)}$ і $\Delta N_p^{(2)}$, і після цього – поправка $\Delta E_n^{(3)}$. Після цього цикл обчислень знову повторюється аж до досягнення заданої точності обчислень.

Після визначення з призначеною точністю констант E_n , M_p і N_p , визначаються константи A_{1n} :

$$A_{1n} = \frac{W_0(\beta_n R_0)}{I_0(\beta_n R_0)} \left[E_n^{(0)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} \Delta E_n^{(\nu)} \right]. \quad (70)$$

Таким чином, в математичному описі скалярних потенціалів електричного поля у внутрішній і зовнішній областях п'єзоелектричного елемента точно визначаються лише константи A_{2m} . Константи A_{1n} , E_n , M_p і N_p визначаються наближено. Похибка наближеного визначення цих констант контролюється в процесі виконання обчислень.

Висновки

1. Дано загальне формулювання граничної задачі про розрахунок скалярного потенціалу вісесиметричного електричного поля в диску, матеріал якого має анізотропну діелектричну проникність, яка мінімум на порядок перевершує діелектричну проникність вакууму.
2. Запропоновано схему рішення задачі для випадку, коли розташовані на торцевих поверхнях диска електроди мають форму співвісно розташованих круга та кільця, причому зовнішній радіус кільця дорівнює радіусу діелектричного диска, а радіус круга збігається з внутрішнім радіусом кільця.
3. Запропонована схема рішення задачі використовує метод послідовних наближень, що дозволяє отримати аналітичні вирази для розрахунку коефіцієнтів в математичному описі потенціалу електричного поля в об'ємі диска з анізотропною діелектричною проникністю.

Література

1. Богдан А.В. Математическое моделирование колебаний тонких пьезокерамических дисков для создания функциональных элементов пьезоэлектроники / А.В. Богдан, О.Н. Петрищев, Ю.И. Якименко, Ю.Ю. Яновская // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – 2009. – Ч. 2. – С. 35–42.
2. Джагунов Р.Г. Пьезоэлектронные устройства вычислительной техники, систем контроля и управления / Р.Г. Джагунов, А.А. Ерофеев. – СПб : Политехника, 1994. – 608 с.
3. Варадан В. VЧ МЭМС и их применение / В. Варадан, К. Виной, К. Джозе. – М. : Техносфера, 2004. – 528 с.
4. Петрищев О.Н. Principles of calculation of piezoelectric elements with surfaces partial covering by electrodes / О.Н. Петрищев, В.М. Шарапов, Ж.В. Сотула, К.В. Базило // Вісник Черкаського державного технологічного університету. – 2014. – № 3. – С. 47–55.
5. Sharapov V. Piezoceramic sensors, Springer Verlag, 2011, 498 p.
6. Сотула Ж.В. Підвищення рівня звукового тиску, створюваного мономорфними дисковими п'єзоелементами / Ж.В. Сотула // Вісник Хмельницького національного університету. Серія: Технічні науки. – 2014. – № 5. – С. 178–181.
7. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. – Киев : Наукова думка, 1989. – 280 с.
8. Кошляков Н.С. Уравнения в частных производных математической физики / Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. – М. : Высшая школа, 1970. – 712 с.
9. Прудников А.П. Интегралы и ряды. Специальные функции / Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. – М. : Наука, 1983. – 752 с.
10. Джеффрис Г. Методы математической физики. Выпуск 2 / Джеффрис Г., Свирлс Б. – М. : Мир, 1970. – 352 с.

References

1. Bogdan A.V., Petrishchev O.N., Yakimenko Yu.I., and Yanovskaya Yu.Yu. Matematicheskoe modelirovanie kolebanij tonkix p'ezokeramicheskix diskov dlya sozdaniya funkcional'nykh e'lementov p'ezoe'lektroniki. E'lektronika i svyaz', Tematicheskij vypusk E'lektronika i nanotexnologii, 2009, P. 2, pp. 35–42.
2. Dzhagupov R.G. and Erofeev A.A. P'ezoelektronnye ustroystva vychislitel'noy tekhniki, sistem kontrolya i upravleniya. Politekhnika, Sankt-Peterburg, 1994, 608 p.
3. Varadan V., Vinoy K. and Dzhoze K. VCh MEMS i ikh primenenie. Tekhnosfera, Moskva, 2004, 528 p.
4. Petrishchev O.N., Sharapov V.M., Sotula Zh.V. and Bazilo K.V. Principles of calculation of piezoelectric elements with surfaces partial covering by electrodes. Visnyk Cherkas'kogo derzhavnogo tehnologichnogo universytetu, 2014, No. 3, pp. 47–55.
5. Sharapov V. Piezoceramic sensors, Springer Verlag, 2011, 498 p.
6. Sotula Zh.V. Pidvyshhennja rivnja zvukovogo tysku, stvorjuvanogo monomorfnyimi diskovymi p'jezoelementamy, Visnyk Khmelnytskogo Natsionalnogo Universytetu, Technical sciences, Khmelnytsky 2014, No. 5, pp. 178–181.
7. Grinchenko V.T., Ulitko A.F. and Shul'ga N.A. Mekhanika svyazannykh poley v elementakh konstruksiy. Vol. 5. Elektouprugost', Kiev, Naukova dumka, 1989, 280 p.
8. Koshlyakov N.S., Gliner E.B. and Smirnov M.M. Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki, Moskva, Vysshaya shkola, 1970, 712 p.
9. Prudnikov A.P., Brychkov Yu.A. and Marichev O.I. Integraly i ryady. Spetsial'nye funktsii, Moskva Nauka, 1983, 752 p.
10. Dzheffris G. and Svirls B. Metody matematicheskoy fiziki. Issue 2, Moskva Mir, 1970, 352 p.

Рецензія/Peer review : 2.10.2018 р.

Надрукована/Printed :23.11.2018 р.
Рецензент: д.т.н., проф. Палагін В.В.